Risposta alla domanda: "Perché la funzione d'onda di un sistema fisico è intrinsecamente complessa?"
Ulisse, portale di divulgazione scientifica della Sissa, Trieste
(Domanda posta da Salvatore Pascale il 20 aprile 2004, risposta apparsa l’8 ottobre 2004)

Difficilmente la fisica risponde in modo soddisfacente a domande sul “perché” dei fenomeni naturali. Piuttosto, è in grado di dare risposte sul “come”, o sulle cause che danno origine a determinati comportamenti. Cerchiamo quindi prima di tutto di inquadrare la domanda in un contesto appropriato (che purtroppo non può essere elementare).

L’equazione d’onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \;, \qquad (1)$$

dove *x, v* e *t* sono spazio, velocità e tempo, ammette soluzioni del tipo $f(x \pm vt)$, come è facile verificare, per esempio per sostituzione diretta. La soluzione *f* si “propaga” dunque lungo le linee $x \pm vt$.
Si assume di solito che la funzione *f* sia reale. Questo è probabilmente naturale, perché la *f* rappresenta sempre una grandezza reale: la coordinata di una corda che oscilla, una pressione, un campo elettrico e via dicendo.
Esempi di soluzioni reali sono:

$$f_1 = A \sin k(x - vt) \,,$$

con *A* e *k* costanti, oppure

$$f_2 = A \exp[k^2((x - x_0) - v(t - t_0))^2] \,,$$

soluzione quest’ultima che descrive un onda “compatta” che si trova localizzata nei dintorni della posizione $x=x_0$ al tempo $t=t_0$. Si noti che f_1 ed f_2 restano reali al passare del tempo.

E’ però importante osservare che, dal punto di vista matematico, si possono altrettanto lecitamente considerare soluzioni *complesse* della (1). Per esempio,

$$f_3 = \exp[ik(x - vt)] \,,$$

dove la *i* è l’immaginario, è una soluzione altrettanto valida (che torna utile in moltissime applicazioni).

Scopo di questa breve discussione preliminare è quello di chiarire che un’equazione differenziale “reale” può benissimo ammettere soluzioni in campo complesso.

Le evoluzioni temporali in meccanica quantistica sono governate dall’equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial y}{\partial t} = Hy \quad , \qquad (2)$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck, H l'operatore Hamiltoniano e la i compare esplicitamente. La y è la *funzione d'onda* della meccanica quantistica.
L'equazione di Schroedinger è dunque "complessa" e, sebbene non ne abbia l'aspetto, è un'equazione d'onda: descrive cioè fenomeni di propagazione, un pò come la (1).
Come la (1), ammette soluzioni reali e complesse. La presenza della i però complica le cose: per esempio, una soluzione y inizialmente reale diventa complessa al passare del tempo. Tecnicamente si dice che la i "mescola" al passare del tempo la parte reale e quella immaginaria della soluzione.

Riassumendo: l'equazione di Schroedinger ammette in generale soluzioni complesse, che possono essere ridotte a soluzioni reali soltanto in casi particolari (casi che in più richiedono, a posteriori, l'interpretazione di un "fattore di fase" moltiplicativo).

Si dice (e vi sono alcune prove a riguardo) che Schroedinger cercasse una equazione reale e capì di dover "aggiungere" la i alla sua equazione durante un periodo di circa 3-4 settimane, dopo vari tentativi andati a vuoto. Schroedinger era anche parzialmente insoddisfatto del fatto che l'equazione da lui scoperta fosse complessa ed in particolare che non fosse "relativistica". La sua insoddisfazione non era motivata: in un certo senso si sbagliava, ma in modo sottile, che non possiamo discutere qui. E' interessante sottolineare che Schroedinger non disponeva di un'interpretazione coerente per la funzione y. La y doveva descrivere un'onda associata alla particella quantistica, ma non era chiaro in che modo.

Soltanto in seguito Born capì (in una nota a pie' di pagina di un suo articolo!) che si poteva interpretare il modulo quadro della y come "densità di probabilità". In poche parole, questo vuol dire che

$$\int_D |y|^2 \, dV = \text{probabilità che la particella quantistica sia nella regione di spazio } D$$

e dunque che

$$\int_{\text{tutto lo spazio}} |y|^2 \, dV = 1 ,$$

legge questa che esprime la conservazione delle probabilità. L'interpretazione di Born (oggi universalmente accettata) è *successiva* alla scoperta dell'equazione (2) da parte di Schroedinger.
E' stupefacente, se si guardano le cose con il senno di poi, che l'Eq. (2) funzioni tanto bene da non aver mai dato risultati in contraddizione con l'esperienza.

Avendo capito cosa la grandezza $|y|^2$ rappresentasse, per la funzione d'onda y fu coniato un nuovo termine, quello di "ampiezza di probabilità".
Non è esagerato dire che i fisici nascondono la propria ignoranza dietro costanti ("universali"), postulati e definizioni. L'ampiezza di probabilità ne è un buon esempio.

La funzione d'onda è intrinsecamente complessa?
E' questa una domanda difficile. Probabilmente no. Vi sono casi particolari in cui la funzione d'onda può essere considerata reale, a meno di una "fase".

L'uso dei numeri complessi è fondamentale in meccanica quantistica?
Probabilmente si. Si può decomporre la y nel suo modulo e nella sua fase (entrambe quantità reali) e poi tradurre l'equazione di Schroedinger in due equazioni reali, che descrivono l'evoluzione di

queste due quantità. Così facendo, però, si perde in qualche modo la semplicità delle idee originali e l'eleganza dell'apparato matematico che è alla base della meccanica quantistica. Non si sa fare, inoltre, la transizione alla cosiddetta teoria quantistica dei campi, soggetto questo che ha portato alle più accurate previsioni mai fatte in fisica.

Si può argomentare che la funzione d'onda "debba" essere complessa?
Questo problema è stato discusso da molti fisici di prim'ordine. Per esempio Bohm e Schwinger (che hanno scritto due fra i migliori manuali di meccanica quantistica), il primo partendo dalla dinamica, il secondo dalla struttura stessa della teoria quantistica. Entrambi gli argomenti, molto eleganti, richiedono studio approfondito. E necessitano di ipotesi indipendenti.