Operazioni differenziali sui campi

- Sono operazioni di derivazione delle componenti del campo. Agiscono su campi e definiscono nuovi campi.
  - **Gradiente**
  - **Divergenza**
  - **Rotore**
  - **Laplaciano**

- Siccome le componenti sono funzioni di più variabili, avremo derivate parziali

Gradiente di un campo

$$\vec{\nabla}\Phi = \hat{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Il gradiente di un campo scalare e` un campo vettoriale

ESEMPIO

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$

In *coordinate cartesiane*:

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right] = -\vec{\nabla}V}$$

In *coordinate POLARI:*

$$\boxed{\vec{E}(r,\vartheta) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\vec{u}_\vartheta}$$

Divergenza di un campo vettoriale

- In coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Formalmente si può considerare come il prodotto scalare tra l'operatore gradiente e il campo vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \right)$$

- E` un campo scalare

Rotazione di un campo vettoriale

- In coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

- Formalmente si può considerare come il prodotto vettoriale tra l'operatore gradiente e il campo vettoriale:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

- è un campo vettoriale

Laplaciano di un campo

- In coordinate cartesiane: $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$
- Il laplaciano di un campo scalare è un campo scalare
- È la divergenza del gradiente:
- Formalmente:

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

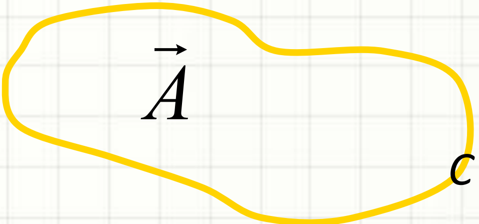
- Può agire anche su una qualunque componente di un campo vettoriale:

$$\Delta A_k = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial z^2}$$

Operazioni integrali sui campi

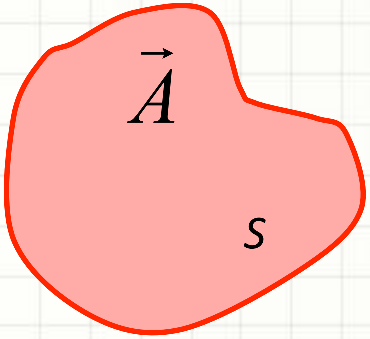
- **Circuitazione**: integrale lungo una linea (1-dim)

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



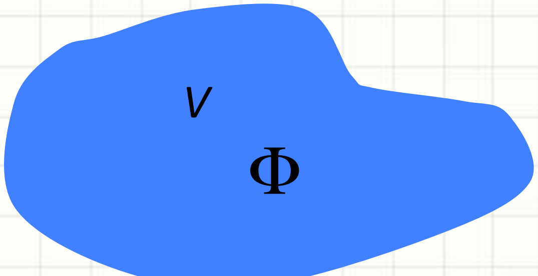
- **Flusso**: integrale su una superficie (2-dim)

$$\iint_S \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



- **Integrale nello spazio** (di volume): 3-dim

$$\iiint_V \Phi\, dV$$



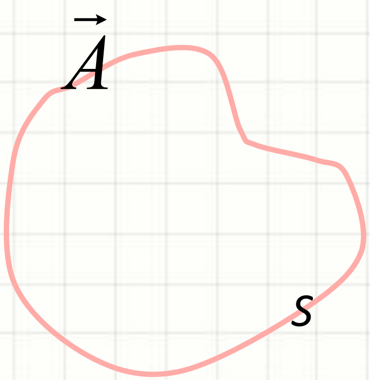
Teoremi integrali

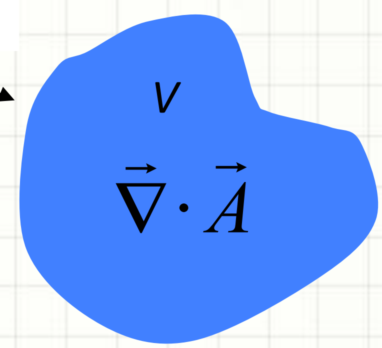
- Esistono due teoremi che coinvolgono integrali multipli degli operatori differenziali:
  - Teorema della divergenza
  - Teorema di Stokes

Teorema della divergenza

- Lega il **flusso** di un campo vettorale **all'integrale di volume della divergenza** del campo stesso
- (Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa) = (Integrale della divergenza del campo nello spazio interno alla superficie)

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV$$

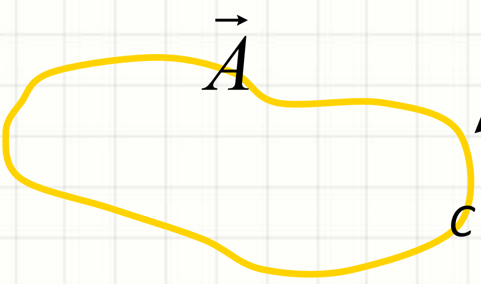


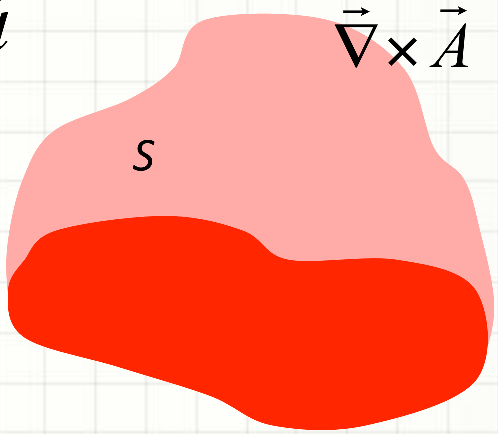


Teorema di Stokes

- Lega la **circuitazione** di un campo vettoriale al **flusso della rotazione** del campo stesso
- (Circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa) = (Flusso della rotazione del campo attraverso una qualunque superficie che poggia su tale linea)

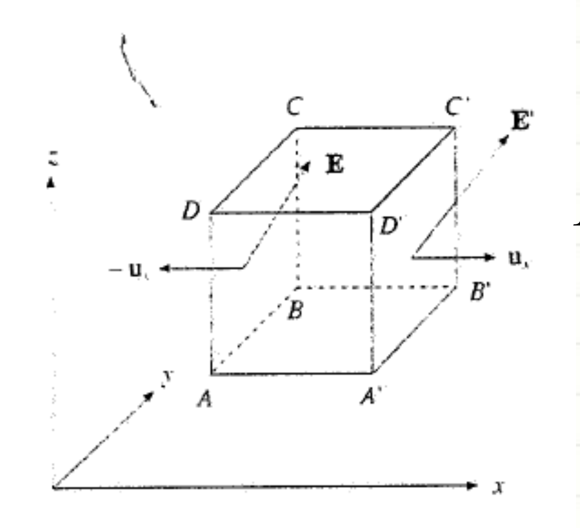
$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{a}$$





Teorema di Gauss in forma Locale

Il teorema di Gauss :
in **forma integrale** lega il flusso del campo E attraverso una superficie chiusa alle sorgenti del campo interne.
In forma differenziale costituisce una relazione locale che lega le derivate del campo in un punto con le densità di carica ρ in quel punto.



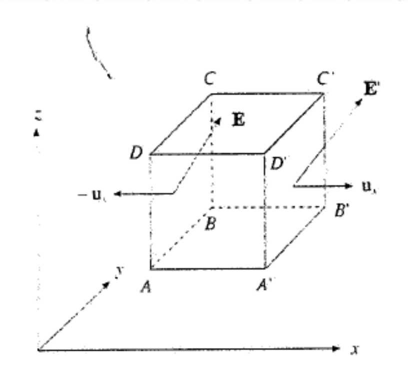
$$\vec{E}'\cdot\vec{u}_x dydz = E'_x dydz \quad \text{attraverso A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'$$

$$\vec{E}\cdot -\vec{u}_x dydz = -E_x dydz \quad \text{attraverso ABCD}$$

$$(E'_x - E_x)dydz = \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial x} dxdydz$$

Sviluppo in serie al primo termine essendo dx piccolo

Teorema di Gauss in forma Locale



$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\, d\tau$$

$$d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\, d\tau}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Formulazione locale della L. di Gauss

Teorema della divergenza

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow \quad (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{d\Phi}{d\tau} \Rightarrow$$

La **divergenza** del campo in P è pari al rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato in P ed il suo volume (vale per qualunque campo vettoriale)

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow \quad (2) \quad \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

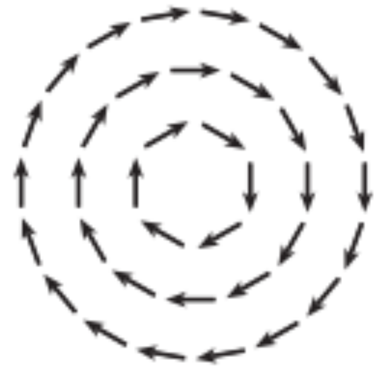
Il flusso del campo attraverso una superficie chiusa S è pari alla divergenza del campo stesso esteso al volume racchiuso da S **(T. della divergenza)**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Campi solenoidali

Se $\rho = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$



Il campo si dice **solenoidale.** Le linee di forza del campo non originano da alcun punto.

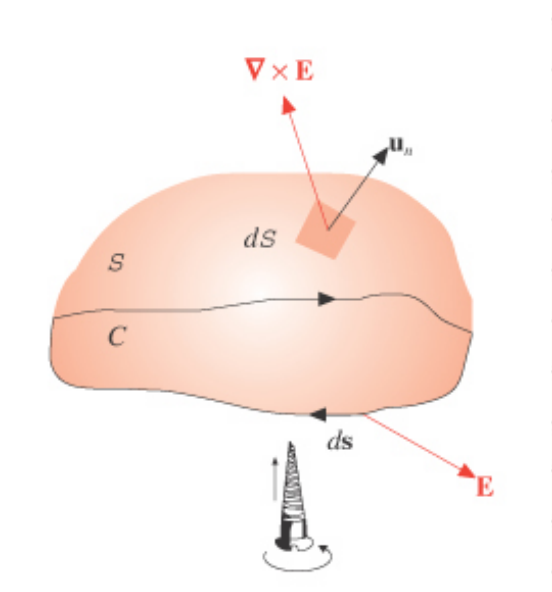
Se

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$$

Le linee di forza di *E* si originano da un punto, ossia dalla sorgente del campo.

La legge di Gauss in forma locale stabilisce quali sono i punti dello spazio dove *E* è o meno solenoidale e, quindi, l'assenza o meno di sorgenti del campo elettrico in quei punti.

Il rotore del campo elettrostatico



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\bullet d\vec{S}}$$

il campo elettrostatico è irrotazionale

Teorema di Stokes:

Componenti cartesiane:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}}$$

Il rotore è un operatore vettoriale che associa a un vettore un altro vettore le cui componenti sono date dalle differenze tra le derivate parziali delle componenti del vettore rispetto ai tre assi, combinate a due a due

Il rotore del campo elettrostatico

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

Questa proprietà del campo elettrostatico può essere dedotta considerando che il campo è conservativo pertanto esiste una funzione scalare V che soddisfa la relazione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \vec{u}_z = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Divergenza-rotore-gradiente

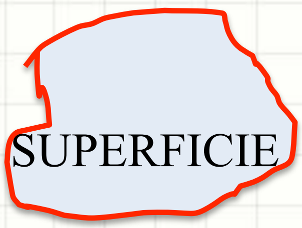
GAUSS

Superficie S che delimita il volume τ

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

Teorema della divergenza

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E_y}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E_z}{\partial z}\vec{u}_z$$

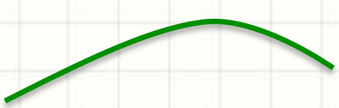


Linea C che delimita la superficie S

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Teorema di Stokes

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$



$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Punti che limitano una inea

IL campo elettrostatico

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Forza elettrostatica

"**Elettrostatico**": è un campo in cui le cariche che lo generano sono fisse e costanti e che un eventuale carica di prova è fissa o si muove senza perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti.

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO

$$\boxed{\oint \vec{E} \bullet \vec{n} dS = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$$

Teorema di Gauss

$$\boxed{\Delta V = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Potenziale ELETTROSTATICO