Corso di Laurea Magistrale in Fisica

insegnamento di **Metodi Probabilistici della Fisica**

prof. Nicola Cufaro Petroni

Domande di Probabilità

1. Relazione fra le leggi congiunte e le loro marginali. Funzioni copula: definizioni e proprietà. Teorema di Sklar [Sez 2.3.4]
2. Distribuzione Gaussiana univariata $\mathfrak{N}(b, a^2)$ [Es 2.17] e multivariata $\mathfrak{N}(\boldsymbol{b}, \mathbb{A})$ [Es 2.29]: Attesa [Es 3.25] e varianza, o matrice delle covarianze nel caso multivariato [Es 3.35-3.36] con caso bivariato esplicitamente descritto. Descrizione tramite funzioni caratteristiche [Sez 4.2.2]
3. Modello di Bernoulli: descrizione e sue proprietà [Sez 2.1.2]. Enunciare e dimostrare il Teorema di Bayes [Prop 1.17] con un esempio di applicazione nel quadro del modello di Bernoulli [Es 2.5]
4. Varianza, covarianza, coefficiente di correlzione; matrici di covarianza e correlazione. Loro proprietà. Rapporto fra i concetti di indipendenza e di non correlazione [Sez 3.3.4]
5. Funzioni caratteristiche di una variabile aleatoria (o di un vettore aleatorio) e sue principali proprietà [Sez 4.2.1]. Sviluppo in serie di una funzione caratteristica e momenti [Teor 4.11]
6. Teoremi di Poisson binomiale (con dimostrazione) [Teor 4.30] e multinomiale [Teor 4.31]. Teorema limite di Poisson (con dimostrazione) [Teor 4.32] e convergenza Gaussiana di leggi di Poisson (con dimostrazione) [Teor 4.33]
7. Definire uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ e descrivere il significato dei simboli Ω, $\mathcal{F}$ e $\boldsymbol{P}$ introducendo anche qualche esempio [Sez 1.1-1.3]
8. Distribuzioni di Poisson $\mathfrak{P}(\alpha)$: definizione [Es 2.2] e funzione di distribuzione $F(x)$ [Es 2.13]. Attesa [Es 3.24], varianza [Es 3.35] e funzione caratteristica [Es 4.10] (con dimostrazioni)
9. Probabilità su $\boldsymbol{R}^\infty$ e $\boldsymbol{R}^T$: teoremi di Kolmogorov ed esempi di probabilità su questi spazi [Sez 2.4]
10. Indipendenza di variabili aleatorie: definizione e criteri di indipendenza (tramite distribuzioni, eventualmente densità e funzioni caratteristiche) [Sez 3.2.3 con esempi, Teor 4.14]
11. Definizione di densità condizionate rispetto ad eventi di misura nulla, e sua giustificazione [Sez 3.4.1]. Valore d'attesa condizionato, anche rispetto a una variabile aleatoria [Sez 3.4.2]. Proprietà principali delle attese condizionate [Prop 3.42] con dimostrazione solo di $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[X|Y]] = \boldsymbol{E}[X]$
12. Teoremi di unicità [Teor 4.12] e di inversione [Teor 4.13] per funzioni caratteristiche. Teorema di Bochner [Teor 4.15] e Teorema di Paul Lévy [Teor 4.16] con argomentazioni sulle loro applicazioni
13. Definire il concetto di probabilità condizionata (elementare); enunciare e dimostrare la Formula della Probabilità Totale [Prop 1.14] e la Formula di Moltiplicazione [Prop 1.16]. Definire l'indipendenza di due o più eventi [Sez 1.5]
14. Funzioni di distribuzione $F(x)$ di una probabilità $\boldsymbol{P}$ su $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$: definizione e proprietà. Funzioni di distribuzione generalizzate $G(x)$ [Sez 2.2.1]
15. Definizione di variabile aleatoria ed esempi elementari. Definizione di legge (distribuzione) di una variabile aleatoria. Tipi di uguaglianze fra variabili aleatorie [Sez 3.1.1-3.1.2]
16. Definizione di Valore d'attesa e di momenti di una variabile aleatoria. Procedura per il calcolo del valore d'attesa con cambiamento di variabili. Principali proprietà dei valori d'attesa [Sez 3.3.1-3.3.3]

17. Densità di probabilità di funzioni di variabili aleatorie: procedura di calcolo, sua giustificazione e almeno un esempio [Sez 3.5.1]
18. Composizione e decomposizione di leggi tramite convoluzioni. Proprietà riproduttive delle Gaussiane, Poisson e Cauchy e loro dimostrazioni con le funzioni caratteristiche [Sez 4.2.3]
19. Distribuzioni binomiali $\mathfrak{B}(n, p)$: definizione [Es 2.1] e discussione del modello di Bernoulli [Sez 2.1.2].
20. Densità di probabilità $f(x)$ di una legge: condizioni di esistenza (Teorema di Radon-Nikodym) e almeno due esempi. Concetto di distribuzione singolare [Sez 2.2.3-2.2.4]. Miscele di leggi e Teorema di Lebesgue-Nikodym [Sez 2.2.5]
21. Funzioni di variabili aleatorie e relazione con la misurabilità. Limiti puntuali di successioni di variabili aleatorie e Teorema di Lebesgue [Sez 3.1.3]
22. Distribuzione di Cauchy: definizione [Es 2.20]; non esistenza del valore d'attesa [Es 3.25]. Funzione caratteristica [Es 4.10]. Non applicabilità dei teoremi limite [Es 4.34]
23. Somme di variabili aleatorie indipendenti, convoluzioni con almeno un esempio [Sez 3.5.2] e loro funzioni caratteristiche [Prop 4.9]
24. Legge dei Grandi numeri debole (con dimostrazione) [Teor 4.23] e forte [Teor 4.25] con applicazioni al calcolo di un integrale con metodo di Monte Carlo [Es 4.26]
25. Distribuzioni binomiali $\mathfrak{B}(n, p)$: Funzione di distribuzione [Es 2.13]. Decomposizione di una binomiale in variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti [Sez 3.2.4]. Attesa [Es 3.24] e varianza [Es 3.35] (con dimostrazione). Funzione caratteristica [Es 4.10]
26. Funzioni di distribuzione multivariate $F(\boldsymbol{x})$ e (se esistono) loro densità $f(\boldsymbol{x})$: definizione e proprietà. Distribuzioni congiunte e marginali: regole per la determinazione delle marginali dalle congiunte [Sez 2.3.1-2.3.3]
27. Vettori aleatori e loro distribuzioni congiunte e marginali [Sez 3.2.1-3.2.2] con qualche esempio [Es 3.12-3.13]
28. Disuguaglianza di Chebyshev: enunciati e dimostrazione [Prop 3.28]. Applicazione alla dimostrazione della legge debole dei grandi numeri per variabili aleatorie non identicamente distribuite [Teor 4.24]
29. Definizioni dei diversi tipi di convergenza di successioni di variabili aleatorie e di successioni di distribuzioni. Loro reciproche relazioni [Sez 4.1]. Criterio di convergenza degenere in media quadratica con dimostrazione [Teor 4.6]
30. Teorema Limite Centrale (con dimostrazione) [Teor 4.27] e condizioni di Lyapunov per sostituire l'ipotesi di identica distribuzione [Teor 4.28]