



Università degli Studi di Bari  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Master di I° livello in  
METODI QUANTITATIVI E INFORMATICA  
A SUPPORTO DELLE DECISIONI ECONOMICHE

**Nicola Cufaro Petroni**

**ECONOFISICA**

**FINANZA E PROCESSI STOCASTICI**

anno accademico 2004/05

Copyright © 2005 Nicola Cufaro Petroni  
Università degli Studi di Bari  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
via E.Orabona 4, 70125 Bari

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Sviluppo storico . . . . .	3
1.2	Random walk . . . . .	3
1.2.1	Binomiale e Gaussiana . . . . .	4
1.2.2	Binomiale e Poisson . . . . .	8
1.2.3	Lognormale . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Richiami di probabilità e processi stocastici</b>	<b>9</b>
2.1	Probabilità . . . . .	9
2.2	Processi stocastici . . . . .	13
2.2.1	Martingale . . . . .	15
2.2.2	Processi di Markov . . . . .	16
2.3	Calcolo stocastico . . . . .	21
2.3.1	Integrale stocastico . . . . .	21
2.3.2	EDS e formula di Itô . . . . .	24
2.4	Movimento browniano libero . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Modelli finanziari</b>	<b>29</b>
3.1	Nozioni iniziali . . . . .	29
3.2	Teoria di Black–Scholes . . . . .	35
3.2.1	Soluzione dell’equazione di Black–Scholes . . . . .	38
3.3	Oltre il movimento Browniano geometrico . . . . .	40



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Sviluppo storico

Il calcolo delle probabilità<sup>1</sup> nasce nel XVII secolo per risolvere problemi di gioco d'azzardo: de Méré (1607–1684), Pascal (1632–1662), Fermat (1601–1665). Prime trattazioni sistematiche: *De ratiociniis in ludo aleae* di Huygens (1629–1695) e *Ars conjectandi* (1713 postumo) di Jakob Bernoulli (1662–1705). Primi usi per la descrizione della finanza: *Théorie de la spéculation* (1900) Tesi di Louis Bachelier (1870–1946). Conteneva le prime idee per la descrizione del Movimento Browniano (MB): fenomeno osservato (1827) da Robert Brown e compiutamente descritto a partire dal 1905 da Einstein (1879–1955) e Smoluchowski (1872–1917), sulla base dei risultati della meccanica statistica elaborata da Maxwell (1931–1879) e Boltzmann (1844–1906) a partire dai lavori di Daniel Bernoulli (1700–1792). Il problema del *random walk* è stato posto inizialmente da Lord Rayleigh (1842–1919) e successivamente nel 1905 da Karl Pearson (1857–1936).

### 1.2 Random walk

Supponiamo di avere a disposizione una successione v.a. di Bernoulli  $\mathfrak{B}(1, p)$  indipendenti

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilità } p, \\ 0, & \text{con probabilità } q = 1 - p, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

con attesa  $\mathbf{E}(Z_i) = p$  e varianza  $\mathbf{Var}(Z_i) = pq$ . Assegnato un arbitrario numero intero  $n$  le somme

$$R = \sum_{i=1}^n Z_i$$

---

<sup>1</sup>Le seguenti note sono tratte dal volume W. Paul and J. Baschnagel, STOCHASTIC PROCESSES: FROM PHYSICS TO FINANCE, Springer 1999, al quale si riferiranno anche le eventuali citazioni.

assumono i valori interi  $r = 0, 1, \dots, n$  con legge Binomiale  $\mathfrak{B}(n, p)$

$$\mathbf{P}\{R = r\} = p_n(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad (1.1)$$

per cui risulta anche

$$\mathbf{E}(R) = \mu_R = np, \quad \mathbf{Var}(R) = \sigma_R^2 = npq.$$

### 1.2.1 Binomiale e Gaussiana

Per enunciare il TLC introduciamo le somme standardizzate

$$W = \frac{R - \mathbf{E}(R)}{\sqrt{\mathbf{Var}(R)}} = \frac{R - np}{\sqrt{npq}}$$

con valori (non interi)

$$w = \frac{r - np}{\sqrt{npq}}$$

tutti equidistanti con

$$\Delta w = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Il TLC (le ipotesi sono verificate dato che le  $Z_i$  sono i.i.d. con attese e varianze finite) afferma allora che per  $n \rightarrow \infty$  la legge di  $W$  è normale standard  $\mathfrak{N}(0, 1)$ . Pertanto, detta

$$\varphi(w) = \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

la f.d. della legge  $\mathfrak{N}(0, 1)$ , per grandi valori di  $n$  avremo che

$$\mathbf{P}\{W = w\} \simeq \varphi(w)\Delta w = \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}}$$

e in termini dei valori di  $R$

$$p_n(r) = \mathbf{P}\{R = r\} = \mathbf{P}\{W = w\} \simeq \frac{e^{-(r-np)^2/2npq}}{\sqrt{2\pi npq}} \quad (1.2)$$

Per costruire un *random walk* conviene ora passare alla seguente successione di v.a. i.i.d.

$$Y_i = 2Z_i - 1 = \begin{cases} +1, & \text{con probabilità } p, \\ -1, & \text{con probabilità } q = 1 - p, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

con attesa e varianza

$$\mathbf{E}(Y_i) = 2p - 1 = 2\left(p - \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{Var}(Y_i) = 4pq$$

Le somme

$$M = \sum_{i=1}^n Y_i = 2 \sum_{i=1}^n Z_i - n = 2R - n$$

assumono i valori interi

$$m = 2r - n, \quad r = \frac{n + m}{2}$$

in modo che  $n$  ed  $m$  sono sempre della stessa parità e  $r$  sempre intero. Tenendo allora conto di (1.1) si ottiene la legge di  $M$

$$\begin{aligned} \bar{p}(m, n) &= \mathbf{P}\{M = m\} = p_n(r) = p_n\left(\frac{n + m}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{n-\frac{n+m}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} \end{aligned}$$

con attesa e varianza

$$\mathbf{E}(M) = \mu_M = 2n\left(p - \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{Var}(M) = \sigma_M^2 = 4npq$$

Il caso simmetrico (*diffusione libera*) è caratterizzato da  $p = \frac{1}{2}$  e quindi

$$\mu_M = 0, \quad \sigma_M^2 = n$$

Il TLC per le somme  $M$  si ottiene poi tenendo conto di (1.2): per  $n \rightarrow \infty$

$$\bar{p}(m, n) = p_n\left(\frac{n + m}{2}\right) \simeq \frac{e^{-(\frac{n+m}{2}-np)^2/2npq}}{\sqrt{2\pi npq}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi 4npq}} e^{-(\delta m)^2/2 \cdot 4npq}$$

dove abbiamo posto

$$\delta m = m - \mu_M = m + n - 2np$$

In termini di attese e varianze il TLC si esprime allora anche come

$$\bar{p}(m, n) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} e^{-(m-\mu_M)^2/2\sigma_M^2} \quad (1.3)$$

Il *random walk* in 1 dimensione si costruisce allora supponendo che ad intervalli di tempo regolari  $\Delta t$  la particella possa scegliere (con probabilità  $p$  e  $q$ ) di eseguire uno spostamento  $+\Delta x$  o  $-\Delta x$ . Dopo  $n$  passi, cioè dopo un tempo  $t = n\Delta t$  essa si troverà quindi in una posizione (aleatoria)  $X = M\Delta x$  che assume valori  $x = m\Delta x$  con attesa e varianza

$$\mu_X = \mu_M \Delta x = 2n\left(p - \frac{1}{2}\right) \Delta x, \quad \sigma_X^2 = \sigma_M^2 (\Delta x)^2 = 4npq (\Delta x)^2.$$

Introduciamo ora il *coefficiente di diffusione* e la *velocità di trascinamento*

$$D = 2pq \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \quad v = 2 \left( p - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

e osserviamo che sia la varianza che l'attesa di  $X$  risultano lineari in  $t$

$$\sigma_X^2 = 2 \cdot 2pq \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} n \Delta t = 2Dt, \quad \mu_X = 2 \left( p - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x}{\Delta t} n \Delta t = vt$$

Ne segue che il TLC (1.3) per la v.a.  $X$  diviene

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P(m\Delta x, n\Delta t) = \bar{p}(m, n) \simeq \frac{2\Delta x}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-(x-\mu_X)^2/2\sigma_X^2} \\ &= \frac{2\Delta x}{\sqrt{2\pi \cdot 2Dt}} e^{-(x-vt)^2/2 \cdot 2Dt} = p(x, t) 2\Delta x \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la d.d.p.  $p(x, t)$  della v.a.  $X$

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2Dt}} e^{(x-vt)^2/2 \cdot 2Dt}$$

La forma di questa d.d.p. non dipende più esplicitamente da  $\Delta x$  e  $\Delta t$ : questo ci consente di eseguire euristicamente un passaggio al limite continuo per  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$  mantenendo  $D$  e  $v$  finiti. Questa d.d.p. è soluzione dell'equazione

$$p_t(x, t) = -vp_x(x, t) + Dp_{xx}(x, t) \quad (1.4)$$

con condizione iniziale

$$p(x, 0^+) = \delta(x)$$

e condizioni ai limiti

$$p(\pm\infty, t) = 0$$

come si vede facilmente con un calcolo diretto. Questa equazione può anche essere ricavata come limite continuo della *master equation* del nostro *random walk*:

$$\bar{p}(m, n+1) = p\bar{p}(m-1, n) + q\bar{p}(m+1, n) \quad (1.5)$$

Essa si ricava facilmente dalla formula della probabilità totale tenendo presente che per essere in  $m$  al tempo  $n+1$  il processo doveva essere o in  $m+1$  o in  $m-1$  al tempo  $n$ :

$$\begin{aligned} \bar{p}(m, n+1) &= \bar{p}(m, n+1|m-1, n)\bar{p}(m-1, n) + \bar{p}(m, n+1|m+1, n)\bar{p}(m+1, n) \\ &= p\bar{p}(m-1, n) + q\bar{p}(m+1, n) \end{aligned}$$



Si osservi ora che

$$\begin{aligned} D &= 2pq \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = (2p-1)q \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + q \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = qv\Delta x + q \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \\ D &= 2pq \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = p \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} - (2p-1)p \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = -pv\Delta x + p \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \end{aligned}$$

per cui potremo scrivere

$$q = (D - qv\Delta x) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad p = (D + pv\Delta x) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Usiamo ora queste relazioni in (1.5) dopo aver sottratto  $\bar{p}(m, n)$  ad ambedue i membri:

$$\begin{aligned} \bar{p}(m, n+1) - \bar{p}(m, n) &= \bar{p}(m-1, n)(D + pv\Delta x) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \bar{p}(m+1, n)(D - qv\Delta x) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - \bar{p}(m, n) \end{aligned}$$

e dividiamo per  $\Delta t$  ottenendo la seguente relazione

$$\begin{aligned} \frac{\bar{p}(m, n+1) - \bar{p}(m, n)}{\Delta t} &= \bar{p}(m-1, n)(D + pv\Delta x) \frac{1}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \bar{p}(m+1, n)(D - qv\Delta x) \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{\bar{p}(m, n)}{\Delta t} \\ &= -vp \frac{\bar{p}(m, n) - \bar{p}(m-1, n)}{\Delta x} - vq \frac{\bar{p}(m+1, n) - \bar{p}(m, n)}{\Delta x} \\ &\quad + D \frac{\bar{p}(m+1, n) - 2\bar{p}(m, n) + \bar{p}(m-1, n)}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \left[ \frac{2D}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{\Delta t} + \frac{vp}{\Delta x} - \frac{vq}{\Delta x} \right] \bar{p}(m, n) \\ &= -vp \frac{\bar{p}(m, n) - \bar{p}(m-1, n)}{\Delta x} - vq \frac{\bar{p}(m+1, n) - \bar{p}(m, n)}{\Delta x} \\ &\quad + D \frac{\bar{p}(m+1, n) - 2\bar{p}(m, n) + \bar{p}(m-1, n)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

nella quale abbiamo anche tenuto conto del fatto che dalle definizioni di  $D$  e  $v$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{2D}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{\Delta t} + \frac{vp}{\Delta x} - \frac{vq}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ 2D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - 1 + vp \frac{\Delta t}{\Delta x} - vq \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{2 \cdot 2pq - 1 + p(2p-1) - q(2p-1)}{\Delta t} \\ &= \frac{-1 + p(2p-1) + q(2p+1)}{\Delta t} \\ &= \frac{-1 + 2p + q - p}{\Delta t} = \frac{-1 + 2p + 1 - 2p}{\Delta t} = 0 \end{aligned}$$

Ora, siccome con le notazioni introdotte in precedenza abbiamo

$$\bar{p}(m, n) = P(x, t), \quad \bar{p}(m, n + 1) = P(x, t + \Delta t), \quad \bar{p}(m \pm 1, n) = P(x \pm \Delta x, t)$$

la nostra equazione discreta diventa una equazione alle differenze finite:

$$\frac{P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} = -vp \frac{P(x, t) - P(x - \Delta x, t)}{\Delta x} - vq \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x} + D \frac{P(x + \Delta x, t) - 2P(x, t) + P(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

e passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$  si ottiene l'equazione (1.4).

### 1.2.2 Binomiale e Poisson

Se il limite per  $n \rightarrow \infty$  è accompagnato anche dalla richiesta che  $p \rightarrow 0$  in modo che  $np \rightarrow \lambda$  finito, allora si dimostra che la Binomiale  $\mathfrak{B}(n, p)$  è meglio approssimata da una legge di Poisson  $\mathfrak{P}(\lambda)$  piuttosto che da una normale  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ . Ricordiamo che una v.a.  $X$  distribuita secondo  $\mathfrak{P}(\lambda)$  assume tutti i valori interi  $k = 0, 1, \dots$  con distribuzione

$$\mathbf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

e ha attesa e varianza determinate dall'unico parametro  $\lambda$

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{Var}(X) = \lambda$$

Si ricordi che invece una legge normale  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$  è caratterizzata da due parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  che giocano il ruolo di attesa e varianza. Per piccoli valori di  $\lambda$   $\mathfrak{P}(\lambda)$  non è simmetrica attorno al massimo (come invece  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ ). Inoltre le code delle due distribuzioni decadono con diverse velocità. Queste caratteristiche delle distribuzioni sono ben descritte dai valori del terzo e quarto momento, o meglio dai valori della *skewness* e della *curtosi* che si ricavano da questi momenti.

### 1.2.3 Lognormale

Altra legge importante per la descrizione dei mercati finanziari è la legge Lognormale  $\mathfrak{LN}(\mu, \sigma^2)$  con d.d.p.

$$p(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\ln^2(y/y_0)/2\sigma^2}$$

dove per brevità  $y_0 = e^\mu$ . Si tratta della legge di una v.a.  $Y = e^X$  quando  $X$  è normale  $\mathfrak{N}(\mu, \sigma^2)$ . Si prova che i valori della moda, della mediana e dell'attesa sono rispettivamente nell'ordine

$$y_0 e^{-\sigma^2} < y_0 < y_0 e^{\sigma^2/2}$$

# Capitolo 2

## Richiami di probabilità e processi stocastici

### 2.1 Probabilità

**Definizione 2.1.** *Uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  una terna composta da un insieme  $\Omega$  detto spazio dei campioni, una  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}$  di parti di  $\Omega$  (dette eventi) e una misura di probabilità  $\mathbf{P}$*

Ricordiamo che una  $\sigma$ -algebra è una famiglia di parti di  $\Omega$  tale che

- $\Omega \in \mathfrak{F}$  e  $\emptyset \in \mathfrak{F}$ ;
- se  $A \in \mathfrak{F}$  allora anche  $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ , dove  $\bar{A}$  è il complementare di  $A$ ;
- se  $A, B \in \mathfrak{F}$  allora anche  $A \cap B \in \mathfrak{F}$ ;

Queste proprietà garantiscono anche che unioni e altre operazioni insiemistiche eseguite sui elementi di  $\mathfrak{F}$  producono altri elementi di  $\mathfrak{F}$ . Inoltre queste proprietà restano vere anche quando le unioni o intersezioni sono infinite, ma numerabili.

Una probabilità  $\mathbf{P}$  è una **misura** che assegna ad ogni evento  $A \in \mathfrak{F}$  un numero  $\mathbf{P}(A) \in [0, 1]$ ; in particolare  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$  e  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ . Più in generale una misura  $\mu$  è una applicazione da  $\mathfrak{F}$  in  $[0, +\infty]$  che assegna un valore  $\mu(A)$  agli elementi  $A$  di qualche  $\sigma$ -algebra; per essere una vera misura essa deve essere  $\sigma$ -additiva:

$$\text{se } A \cap B = \emptyset, \quad \text{allora } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

e questo deve restare vero anche per famiglie numerabili di sottoinsiemi. Una misura può non essere una probabilità, in particolare quando non è una misura finita nel senso che  $\mu(\Omega) = +\infty$ .

Un tipico esempio di spazio dei campioni è  $\mathbb{R}$  e la  $\sigma$ -algebra usualmente associata è quella dei boreliani  $\mathfrak{B}$ . L'usuale misura di Lebesgue  $\lambda$  è allora una misura non

finita (quindi non è una probabilità) su  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  che associa ad ogni intervallo  $[a, b]$  una misura  $\lambda([a, b]) = b - a$ . Su  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  possono d'altra parte essere definite varie misure di probabilità.

**Definizione 2.2.** Una *variabile aleatoria* (v.a.)  $X$  è una funzione misurabile da  $(\Omega, \mathfrak{F})$  in  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ .

Misurabile vuol dire che le parti di  $\Omega$

$$\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\} = \{X \in [a, b]\} = X^{-1}([a, b])$$

sono tutte elementi di  $\mathfrak{F}$ , quale che sia l'intervallo  $[a, b]$  in  $\mathfrak{B}$ . Data una o più v.a. possono poi anche essere definite delle funzioni di queste:  $X^2, X + Y, e^Y, \dots$  che sotto condizioni molto generali sono ancora delle v.a. Si noti che una v.a.  $X$  proietta sullo spazio di arrivo  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  una immagine  $P_X$  della probabilità definita su  $(\Omega, \mathfrak{F})$ : tale immagine, detta **distribuzione** di  $X$ , è definita dalla relazione

$$P_X([a, b]) = \mathbf{P}\{a \leq X \leq b\}$$

con  $a$  e  $b$  arbitrari.

Il **valore d'attesa** della v.a. (quando esso esiste) è

$$\mathbf{E}(X) = \langle X \rangle = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$$

dove l'integrale è ben definito tramite una opportuna procedura di Lebesgue. Se il l'attesa è finita la v.a. si dice integrabile. Si introducono poi anche i **momenti** di ordine  $n$ :

$$\mathbf{E}(X^n) = \langle X^n \rangle = \int_{\Omega} X^n(\omega) \mathbf{P}(d\omega)$$

**Definizione 2.3.** Una misura  $\mu$  si dice assolutamente continua ( $\mu \ll \nu$ ) rispetto ad un'altra misura  $\nu$  se per ogni  $A \in \mathfrak{F}$  tale che  $\nu(A) = 0$  risulta anche  $\mu(A) = 0$ . Se poi  $\mu \ll \nu$  e  $\nu \ll \mu$  si dice che le due misure sono equivalenti

**Teorema 2.1.** (Radon–Nikodým) Se  $\mu \ll \nu$  allora esiste una funzione misurabile  $\xi : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  tale che

$$\mu(A) = \int_A \xi(\omega) \nu(d\omega)$$

La  $\xi$  si chiama anche **densità** o derivata di Radon–Nikodým e si indica con  $\xi = d\mu/d\nu$ .

La **funzione di distribuzione cumulativa** di una v.a.  $X$  è definita come

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\} = P_X((-\infty, x])$$

e gode delle seguenti proprietà caratteristiche

- $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(+\infty) = 1$ ;
- $F_X(x)$  è monotona non decrescente;
- $F_X(x)$  è continua da destra e ammette limite da sinistra.

Si può mostrare che la conoscenza di  $F$  è equivalente alla conoscenza di  $P_X$ , e in particolare

$$P_X([a, b]) = \mathbf{P}\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$

Per il Teorema di Radon–Nikodým, se  $P_X \ll \lambda$  esiste una densità  $p_X(x) = dF_X/dx$  tale che

$$P_X([a, b]) = \int_a^b p_X(x) dx$$

per cui la conoscenza di  $P_X$  diventa equivalente alla conoscenza della densità  $p_X(x)$ . In particolare si mostra anche che

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx, \quad \mathbf{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x) dx$$

Nel seguito spesso supporremo che le nostre v.a. siano dotate di densità. Si noti che  $p(x)$  non è una probabilità; piuttosto si ha

$$\mathbf{P}\{x \leq X \leq x + dx\} = P_X([x, x + dx]) = p(x) dx$$

Se la v.a.  $X$  prende valori in  $\mathbb{R}^n$  invece che in  $\mathbb{R}$  parleremo di **vettore aleatorio**  $X = (X_1, \dots, X_n)$  e delle sue componenti  $X_j$  che sono a loro volta delle v.a. Con qualche complicazione formale in più le notazioni e i concetti restano gli stessi: le funzioni di distribuzione e di densità diventano funzioni di  $n$  variabili e in particolare

$$\mathbf{P}\{x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n \leq X_n \leq x_n + dx_n\} = p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

La  $p(x_1, \dots, x_n)$  si chiama anche densità congiunta delle  $n$  componenti. D'altra parte ogni componente  $X_j$  è una v.a. e sarà dotata di una sua densità  $p_j(x_j)$ : le densità delle componenti si chiamano densità marginali. Dalla densità congiunta si possono sempre ricavare le marginali: ad esempio

$$p_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} p(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

Per un vettore aleatorio  $X$  si introduce il concetto di **funzione caratteristica**:

$$G_X(\mathbf{k}) = G_X(k_1, \dots, k_n) = \mathbf{E}(e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}$$

che coincide con la trasformata di Fourier della densità quando questa esiste. Qui e nel seguito  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$  indica il solito prodotto scalare euclideo  $p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ . Le funzioni caratteristiche sono uno strumento tecnico molto importante e si può dimostrare

che la conoscenza della f.c. di un vettore aleatorio equivale alla conoscenza della sua distribuzione.

La funzione caratteristica di  $X$  è suscettibile di uno sviluppo in serie di potenze i cui coefficienti sono legati ai momenti delle sue componenti:

$$G_X(\mathbf{k}) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1} \dots (ik_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} \langle X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \rangle$$

dove  $\langle X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \rangle = \mathbf{E}(X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n})$ , mentre  $|m| = m_1 + \dots + m_n$ . Anche il logaritmo della funzione caratteristica è sviluppabile in serie di potenze

$$\ln G_X(\mathbf{k}) = \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1} \dots (ik_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} \langle\langle X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \rangle\rangle$$

e i suoi coefficienti  $\langle\langle X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} \rangle\rangle$  si chiamano **cumulanti**. I cumulanti non sono attese di potenze delle componenti  $X_j$ , ma sono particolari combinazioni di momenti di diversi ordini. Particolarmente importanti sono i cumulanti del secondo ordine

$$\langle\langle X_i X_j \rangle\rangle = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle = \sigma_{ij}^2 = \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

che costituiscono gli elementi della **matrice delle covarianze**. Gli elementi diagonali di tale matrice

$$\langle\langle X_j^2 \rangle\rangle = \langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2 = \sigma_j^2 = \mathbf{Cov}(X_j, X_j)$$

si chiamano **varianze** delle componenti.

**Definizione 2.4.** Due v.a.  $X_1$  e  $X_2$  si dicono **non correlate** se  $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = 0$ .

**Definizione 2.5.** Due v.a.  $X_1$  e  $X_2$  si dicono **indipendenti** se si verifica una delle seguenti quattro condizioni equivalenti:

- $p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$
- $G(k_1, k_2) = G_1(k_1)G_2(k_2)$
- $\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \rangle = \langle X_1^{m_1} \rangle \langle X_2^{m_2} \rangle$ ,  $\forall m_1, m_2$
- $\langle\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \rangle\rangle = 0$ ,  $\forall m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$

Se due v.a. sono indipendenti esse sono anche automaticamente non correlate, ma il viceversa non è sempre vero; la non correlazione è quindi una specie di indipendenza debole. La **densità condizionata** della v.a.  $X_1$  rispetto all'evento  $\{X_2 = x_2\}$  è data da

$$p_{1|2}(x_1|x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_2(x_2)}$$

Per ogni valore di  $x_2$  questa è una densità di probabilità per cui potremo calcolare l'attesa condizionata

$$\mu_{X_1}(x_2) = \mathbf{E}(X_1|x_2) = \mathbf{E}(X_1|X_2 = x_2) = \int_{\mathbb{R}} x_1 p_{1|2}(x_1|x_2) dx_1$$

che risulta essere una funzione del valore condizionante  $x_2$ . Potremo allora definire una nuova v.a.

$$\mathbf{E}(X_1|X_2) = \mu_{X_1}(X_2)$$

per la quale si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{E}(X_1|X_2)] &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{X_1}(x_2) p_2(x_2) dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_1 p_{1|2}(x_1|x_2) p_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}} x_1 p(x_1) dx_1 = \mathbf{E}(X_1) \end{aligned}$$

**Teorema 2.2. (Teorema Limite Centrale)** Se  $X_k$  con  $k \in \mathbb{N}$  è una successione di v.a. i.i.d. con attesa  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  finite, posto  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  con  $\mathbf{E}(S_n) = n\mu$  e  $\mathbf{Var}(S_n) = n\sigma^2$ , si ha

$$\hat{S}_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathfrak{N}(0, 1)$$

Questo rende conto della onnipresenza della distribuzione normale: sotto ipotesi piuttosto generali, infatti, somme standardizzate di v.a. i.i.d. (quale che sia la loro distribuzione comune) tendono a distribuirsi in maniera normale standard. Si dice anche che la legge delle  $X_k$  è attratta dalla legge normale: il seguente teorema fornisce le condizioni necessarie e sufficienti perchè una legge  $p(x)$  sia attratta dalla legge normale

**Teorema 2.3.** Una legge con densità  $p(x)$  è attratta dalla legge normale se e solo se

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a^2 \int_{|x|>a} p(x) dx}{\int_{|x|\leq a} x^2 p(x) dx} = 0$$

## 2.2 Processi stocastici

**Definizione 2.6.** Un processo stocastico (p.s.) è una famiglia  $(X_t)_{t \in T}$  di v.a. che indicheremo anche con  $X(t)$ .

L'insieme  $T$  degli indici può essere un intervallo continuo, ad esempio  $[0, +\infty)$ , oppure un insieme discreto, ad esempio  $\mathbb{N}$ , nel qual caso parleremo di successione aleatoria. La posizione in un *random walk* è un esempio di p.s. a tempo discreto. I valori del processo sono presi in un insieme degli stati che può essere anche a più dimensioni come  $\mathbb{R}^m$ . Il processo  $X_t(\omega)$  può quindi essere visto come una funzione di due variabili  $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ : per ogni fissato  $t$  si ottiene una v.a.  $X_t$  che

rappresenta il valore del processo nell'istante  $t$ ; per ogni fissato  $\omega$  si ottiene una funzione  $X_t(\omega) = x(t)$  di  $t$  che rappresenta una delle infinite possibili *traiettorie* del processo.

Gli eventi ora corrisponderanno a particolari sottoinsiemi di traiettorie: tipicamente questi vengono definiti come cilindri, ossia come sottoinsiemi di traiettorie che soddisfano opportuni vincoli in istanti specificati. Ad esempio si potrebbe considerare l'insieme di tutte le traiettorie che al tempo  $t_1$  hanno valori compresi fra  $a_1$  e  $b_1$

$$\{a_1 \leq X(t_1) \leq b_1\}$$

e generalizzando possiamo definire sottoinsiemi che soddisfano analoghe condizioni in  $n$  istanti:

$$\{a_1 \leq X(t_1) \leq b_1, \dots, a_n \leq X(t_n) \leq b_n\}$$

A questi eventi (e altri più complicati) vorremmo attribuire dei valori di probabilità.

Un p.s. è caratterizzato dalla famiglia delle sue distribuzioni congiunte ad  $n$  istanti di tempo arbitrari: fissati  $t_1, \dots, t_n$  si considera cioè la distribuzione congiunta delle  $n$  v.a.  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \mathbf{P}\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

che sarà in molti casi data come densità congiunta  $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ . La famiglia (al variare di  $n$  e di  $t_1, \dots, t_n$ ) di queste leggi congiunte deve rispettare alcuni vincoli:

- *positività*:  $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \geq 0$
- *simmetria*:  $p_n(\dots; x_j, t_j; \dots; x_k, t_k; \dots) = p_n(\dots; x_k, t_k; \dots; x_j, t_j; \dots)$
- *consistenza*:  $\int_{\mathbb{R}} p_n(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}; x_n, t_n) dx_n = p_n(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$
- *normalizzazione*:  $\int_{\mathbb{R}} p_1(x_1, t_1) dx_1 = 1$

D'altra parte si dimostra (sotto condizioni generali) che ogni famiglia di distribuzioni che soddisfi queste proprietà definisce un unico (in senso opportuno) p.s.

Possiamo ora calcolare le attese e i momenti del processo ad istanti arbitrari. Così l'attesa del processo sarà

$$\mathbf{E}(X(t)) = \langle X(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x p_1(x, t) dx$$

mentre

$$\langle X(t_1) \cdot \dots \cdot X(t_n) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 \dots x_n p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

La matrice di covarianza per due componenti di un processo vettoriale sarà allora

$$\mathbf{Cov}(X_j(t_1), X_k(t_2)) = \sigma_{jk}^2(t_1, t_2) = \langle X_j(t_1)X_k(t_2) \rangle - \langle X_j(t_1) \rangle \langle X_k(t_2) \rangle$$



Gli elementi diagonali sono la funzione di autocorrelazione di una componente, mentre gli elementi non diagonali sono le correlazioni incrociate fra le varie componenti.

Un processo si dice stazionario quando tutte le sue leggi congiunte sono invarianti per una traslazione dell'origine dei tempi:

$$p_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t) = p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

In questo caso si verifica facilmente che le densità ad un punto sono indipendenti dal tempo  $p_1(x_1)$  mentre le densità a due punti dipendono solo dalla differenza fra i due tempi  $p_2(x_1, x_2; t_2 - t_1)$ .

Le densità ai tempi  $t_{k+1}, \dots, t_{k+l}$  condizionate dal processo ai tempi  $t_1, \dots, t_k$  sono ovviamente

$$p_{\ell|k}(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_{k+l}, t_{k+l} | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = \frac{p_{k+l}(x_1, t_1; \dots; x_{k+l}, t_{k+l})}{p_k(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)}$$

In particolare avremo

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1)$$

e inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2$$

### 2.2.1 Martingale

**Definizione 2.7.** Una successione di v.a.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  costituisce un gioco assolutamente equo quando

$$\mathbf{E}(X_1) = 0, \quad \mathbf{E}(X_{n+1} | X_n, \dots, X_1) = 0$$

Si noti che ovviamente, se il gioco è assolutamente equo, risulta anche  $\mathbf{E}(X_1) = \dots = \mathbf{E}(X_n) = \dots = 0$ ; il viceversa però non è vero. In pratica le  $X_n$  rappresentano le vincite in un gioco: si tratta di v.a. che in generale non sono indipendenti perchè i giocatori possono adottare delle strategie basate sull'osservazione dell'andamento delle precedenti mani di gioco. Un gioco è assolutamente equo quando l'osservazione della precedente storia di giuoco non permette di costruire strategie che – in media – rechino vantaggio ad uno dei giocatori.

**Definizione 2.8.** Una successione di v.a.  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  costituisce una martingala quando

$$\mathbf{E}(Y_{n+1} | Y_n, \dots, Y_1) = Y_n$$

si chiama invece submartingala o supermartingala rispettivamente quando

$$\mathbf{E}(Y_{n+1} | Y_n, \dots, Y_1) \geq Y_n, \quad \mathbf{E}(Y_{n+1} | Y_n, \dots, Y_1) \leq Y_n$$

Il concetto di martingala è strettamente legato a quello di gioco assolutamente equo. Infatti è facile verificare che la somma delle vincite di un gioco assolutamente equo è una martingala: detto  $C$  il capitale iniziale e  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un gioco assolutamente equo, la successione

$$Y_n = C + \sum_{j=1}^n X_j$$

costituisce una martingala. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n+1}|Y_n, \dots, Y_1) &= \mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, \dots, X_1) \\ &= \mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, \dots, X_1) + \mathbf{E}(Y_n|X_n, \dots, X_1) = Y_n \end{aligned}$$

Si potrebbe mostrare che anche il viceversa è vero: ogni martingala è somma di incrementi che costituiscono un gioco assolutamente equo. Il concetto di martingala può essere opportunamente generalizzato al caso di tempo continuo, ma qui per ragioni di spazio non presenteremo questa versione.

## 2.2.2 Processi di Markov

**Definizione 2.9.**  $X(t)$  è un processo di Markov quando comunque scelti  $n$  istanti  $t_1 < \dots < t_n$  risulta

$$p_{1|n-1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

Pertanto l'informazione disponibile per prevedere il futuro è tutta contenuta nel presente che riassume anche le informazioni del passato. Inoltre se il processo è markoviano

$$p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot \dots \cdot p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p_1(x_1, t_1)$$

cioè la gerarchia delle leggi congiunte può essere completamente ricostruita a partire dalla conoscenza di  $p_1(x_1, t_1)$  e  $p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ . Le  $p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  si chiamano anche *funzioni di transizione*.

Un processo  $X(t)$  si dice ad *incrementi indipendenti* quando tutti gli incrementi del tipo  $X(t_4) - X(t_3)$  e  $X(t_2) - X(t_1)$  sono indipendenti se presi su intervalli temporali non sovrapposti ( $t_4 > t_3 \geq t_2 > t_1$ ). Si può mostrare che ogni processo ad incrementi indipendenti è un processo di Markov.

Dati tre istanti di tempo si ha

$$p_3(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) = p_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1)$$

per cui marginalizzando la coordinata intermedia

$$p_2(x_3, t_3; x_1, t_1) = p_1(x_1, t_1) \int_{\mathbb{R}} p_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2$$

e quindi in definitiva

$$p_{1|1}(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int_{\mathbb{R}} p_{1|1}(x_3, t_3|x_2, t_2)p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1) dx_2 \quad (2.1)$$

detta anche *equazione di Chapman–Kolmogorov*: si tratta di una relazione che tutte le funzioni di transizione markoviane devono soddisfare. D'altra parte, con due istanti di tempo si ha invece

$$p_1(x_2, t_2) = \int_{\mathbb{R}} p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)p_1(x_1, t_1) dx_1 \quad (2.2)$$

una relazione che deve essere soddisfatta dalle distribuzioni di qualunque processo stocastico.

**Teorema 2.4.** *Due funzioni di densità  $p_1(x_1, t_1)$  e  $p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)$  che soddisfanno (2.2) e (2.1) definiscono in maniera unica un processo di Markov.*

Per un processo di Markov stazionario si ha

$$p(x) = p_1(x, t), \quad p_t(x_2|x_1) = p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1) \quad (t = t_2 - t_1)$$

per cui l'equazione di Chapman–Kolmogorov diventa

$$p_{s+t}(x_3|x_1) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x_3|x_2)p_s(x_2|x_1) dx_2$$

Per processi con stati  $x$  discreti questa è una regola di moltiplicazione fra *matrici di transizione*. Può succedere che il processo abbia una funzione di transizione  $p_t$  dipendente solo dalla differenza  $t = t_2 - t_1$ , ma una densità  $p_1(x, t)$  non costante nel tempo: in questo caso, non strettamente stazionario, si parla di *processo omogeneo nel tempo*. Per processi di Markov omogenei nel tempo (e in particolare per processi stazionari) la forma differenziale dell'equazione di Chapman–Kolmogorov è la *Master equation*

$$\partial_t p_t(x_3|x_1) = \int_{\mathbb{R}} [w(x_3|x_2)p_t(x_2|x_1) - w(x_2|x_3)p_t(x_3|x_1)] dx_2 \quad (2.3)$$

che è un'equazione integro–differenziale per le funzioni di transizione. Qui  $w(x_2|x_1)$  è la probabilità di transizione per unità di tempo definita da

$$p_t(x_2|x_1) = [1 - t w_{tot}(x_1)]\delta(x_2 - x_1) + t w(x_2|x_1) + o(t)$$

con

$$w_{tot}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} w(x'_2|x_1) dx'_2$$

Infatti sappiamo che (con notazione un po' semplificata)

$$p_t(x|y) \rightarrow \delta(x - y), \quad \text{per } t \rightarrow 0^+$$

cioè: per  $t \rightarrow 0^+$  la probabilità di restare in  $y$  deve convergere verso la certezza. Se però  $t$  è piccolo ma non nullo ( $t > 0$ ) la probabilità di restare in  $y$  diminuisce e  $\delta(x-y)$  deve essere moltiplicata per un fattore del tipo  $1-at+o(t)$  con  $a > 0$ , che ovviamente converge a 1 per  $t \rightarrow 0^+$ . Siccome però  $p_t(x|y)$  deve comunque restare normalizzata, bisogna anche aggiungere un termine che assorba la probabilità sottratta al caso  $x = y$ : questo termine deve rappresentare la probabilità che in un tempo  $t$  si passi da  $y$  a  $x$ . Siccome anche questo termine deve essere infinitesimo con  $t$  potremo scriverlo come  $w(x|y)t + o(t)$ . Complessivamente quindi avremo

$$p_t(x|y) = (1 - at)\delta(x - y) + tw(x|y) + o(t)$$

Infine dalla normalizzazione di  $p_t(x|y)$  otterremo anche la relazione

$$a(y) = \int_{\mathbb{R}} w(x|y) dy = w_{tot}(y) < 1$$

Da (2.3) e dall'equazione (2.2) si ricava anche (con opportuna notazione) l'equazione per l'evoluzione della densità del processo:

$$\partial_t p(x, t) = \int_{\mathbb{R}} [w(x|y)p(y, t) - w(y|x)p(x, t)] dy$$

Con alcune ulteriori ipotesi su  $w(x_2|x_1)$  è possibile costruire lo *sviluppo di Kramers–Moyal* di questa equazione: se il processo è continuo (in un senso che qui andrebbe specificato) tale sviluppo si arresta al secondo ordine e fornisce l'*equazione di Fokker–Planck*

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x [a_1(x)p(x, t)] + \frac{1}{2}\partial_{xx} [a_2(x)p(x, t)] \quad (2.4)$$

dove

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} rw(x+r|x-r) dr && \text{coefficiente di trascinamento} \\ a_2(x) &= \int_{\mathbb{R}} r^2 w(x+r|x-r) dr && \text{coefficiente di diffusione} \end{aligned}$$

Se come condizione all'istante iniziale  $s$  si richiede  $p(x, s^+) = \delta(x - y)$  l'equazione (2.4) diviene un'equazione per la funzione di transizione  $p(x, t|y, s)$

$$\partial_t p(x, t|y, s) = -\partial_x [a_1(x)p(x, t|y, s)] + \frac{1}{2}\partial_{xx} [a_2(x)p(x, t|y, s)] \quad (2.5)$$

Questa si chiama anche *equazione di Fokker–Planck in avanti* per mettere in evidenza il fatto che in essa compaiono le derivate rispetto alle coordinate finali  $x, t$  con condizioni iniziali in  $y, s$ . Esiste però anche una versione equivalente detta *equazione di Fokker–Planck all'indietro* nella quale compaiono le derivate rispetto alle coordinate iniziali  $y, s$  con relative condizioni finali in  $x, t$ :

$$\partial_s p(x, t|y, s) = -a_1(x) \partial_y p(x, t|y, s) + \frac{1}{2}a_2(x) \partial_{yy} p(x, t|y, s) \quad (2.6)$$

Si può mostrare che i due operatori differenziali

$$\mathfrak{L} = -\partial_x[a_1(x) \cdot] + \frac{1}{2}\partial_{xx}[a_2(x) \cdot], \quad \mathfrak{L}^\dagger = -a_1(x) \partial_x + \frac{1}{2}a_2(x) \partial_{xx}$$

che compaiono nelle equazioni (2.5) e (2.6) sono operatori aggiunti sullo spazio delle funzioni di quadrato integrabile, e differenziabili due volte.

Invece di descrivere l'evoluzione mediante le equazioni di Fokker–Planck (evoluzione delle densità di probabilità), possiamo descrivere direttamente l'evoluzione delle traiettorie del processo con un'equazione di Langevin

$$\dot{X}(t) = v[X(t)] + b[X(t)] \eta(t) \tag{2.7}$$

dove  $v$  e  $b$  non dipendono esplicitamente dal tempo perché stiamo limitando le nostre osservazioni al caso stazionario. Qui  $v(x)$  rappresenta una velocità deterministica della particella: se non ci fosse il secondo termine l'equazione si ridurrebbe ad una tipica equazione differenziale ordinaria per un sistema dinamico. Il secondo termine rappresenta invece l'effetto del disturbo esterno:  $b(x)$  è una funzione che rappresenta l'intensità del disturbo, mentre  $\eta(t)$  è un processo stocastico detto *rumore bianco gaussiano* caratterizzato dalle seguenti proprietà

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad \langle \eta^n(t) \rangle = 0, \quad n \geq 3, \quad \forall t, t'$$

$$\langle \eta(t)v[X(t')] \rangle = \langle \eta(t) \rangle \langle v[X(t')] \rangle, \quad \langle \eta(t)b[X(t')] \rangle = \langle \eta(t) \rangle \langle b[X(t')] \rangle, \quad \forall t' \leq t$$

Pertanto  $\eta(t)$  è un processo a media nulla, non correlato nè con i suoi valori a tempi diversi, nè con  $X(t)$  a tempi precedenti. Sulla base di queste ipotesi si può ora mostrare (per esempio confrontando i momenti dei processi) che le due formulazioni, definiscono lo stesso processo se si identificano i coefficienti dell'equazione di Fokker–Planck (2.5) con quelli dell'equazione di Langevin (2.7) secondo il seguente schema:

$$a_1(x) = v(x), \quad a_2(x) = b^2(x)$$

Bisogna però osservare che l'equazione di Langevin (2.7) è matematicamente errata: supponiamo ad esempio di considerare il caso particolare  $v(x) = 0$  e  $b(x) = 1$  per cui

$$\dot{X}(t) = \eta(t), \quad X(t) = \int_0^t \eta(s) ds$$

con condizione iniziale  $X(0) = 0$ . La corrispondente equazione di Fokker–Planck è

$$\partial_t p(x, t) = \frac{1}{2} \partial_{xx} p(x, t) \tag{2.8}$$

e la soluzione con condizione iniziale  $p(x, 0) = \delta(x)$  (cioè  $X(0) = 0$ ) è

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \tag{2.9}$$

Le funzioni di transizione del processo si ottengono poi dalla medesima equazione con condizione  $p(x, s^+) = \delta(x - y)$  (cioè  $X(s) = y$ ) per cui

$$p(x, t|y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-x^2/2(t-s)} \quad (2.10)$$

Il corrispondente processo  $W(t)$  si chiama *processo di Wiener standard*. Si vede allora da (2.9) e (2.10) che per  $0 < s < t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W(t)) &= 0, & \mathbf{Var}(W(t)) &= t \\ \mathbf{E}(W(t)|W(s)) &= y, & \mathbf{Var}(W(t)|W(s) = y) &= t - s \end{aligned}$$

mentre per  $s, t$  generici si ha

$$\mathbf{E}(W(t)W(s)) = \min(s, t) \quad (2.11)$$

Infatti supponendo per semplicità  $0 < s < t$  si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(W(t)W(s)) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy p_2(x, t; y, s) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} xy p(x, t|y, s)p(y, s) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} y \mathbf{E}(W(t)|W(s) = y)p(y, s) dy = \int_{\mathbb{R}} y^2 p(y, s) dy \\ &= \mathbf{Var}(W(s)) = s \end{aligned}$$

Inoltre sulla base delle relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|X(t + \Delta t) - X(t)| > \epsilon\} &= 2 \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-x^2/2\Delta t} dx \\ \mathbf{P}\left\{\left|\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right| > \epsilon\right\} &= 2 \int_{\epsilon\Delta t}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-x^2/2\Delta t} dx \end{aligned}$$

è possibile mostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{P}\{|X(t + \Delta t) - X(t)| > \epsilon\} &= 0, & \forall \epsilon > 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right| > \epsilon\right\} &= 1, & \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

per cui in ogni istante  $t$  le traiettorie del processo di Wiener sono continue ma non derivabili. Ciononostante il processo di Wiener  $W(t)$  esiste ed è ben definito (con le proprietà suddette) a partire dalla soluzione dell'equazione (2.8). Non è però possibile scrivere l'equazione delle sue traiettorie nella forma di Langevin  $\dot{X}(t) = \eta(t)$  nel senso che il processo rumore bianco  $\eta(t)$  è definito in maniera non matematicamente corretta. In realtà bisogna scrivere questa equazione nella forma

$$dX(t) = dW(t) \neq \eta(t) dt$$

nel senso che il differenziale

$$dW(t) = W(t + dt) - W(t)$$

è ben definito, ma non si esprime come prodotto di una derivata  $\eta(t)$  (che non esiste) per  $dt$ . Bisogna allora rivedere le regole del calcolo differenziale e integrale.

## 2.3 Calcolo stocastico

### 2.3.1 Integrale stocastico

Il primo problema è dare significato preciso agli integrali del tipo

$$\int_a^b G(s) dW(s)$$

dove  $W(t)$  è il processo di Wiener e  $G(t)$  un altro generico processo. La difficoltà nasce dal fatto che – in base alle proprietà del processo di Wiener – la misura  $dW(t)$  risulta non essere a variazione limitata per cui la definizione del nostro integrale non può essere data traiettoria per traiettoria visto che la convergenza non sarebbe garantita. Esiste però una procedura (Itô, 1944) che consente di dare la definizione con una convergenza in media quadratica. Tale procedura può anche essere data riproducendo la classica procedura di Riemann con una importante differenza: si divide  $[a, b]$  in sottointervalli mediante i punti  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , si scelgono  $n$  punti  $\tau_i$  interni a ciascun sottointervallo e si definisce

$$\int_a^b G(s) dW(s) = \text{l.i.m.}_n \sum_{i=1}^n G(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

dove il limite in media quadratica è definito da

$$\text{l.i.m.}_n X_n = X \iff \lim_n \mathbf{E}(X_n - X)^2 = 0$$

Si può però dimostrare che (diversamente dal caso classico della definizione di integrale di Riemann) il valore di questo limite dipende dalla scelta della collocazione dei punti  $\tau_i$ . Consideriamo ad esempio il caso in cui  $G(s) = W(s)$ , cioè

$$\int_a^b W(s) dW(s)$$

e poniamo

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n W(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \\ \tau_i &= \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n) &= \sum_{i=1}^n [W(\alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1})W(t_i) - W(\alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1})W(t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1} - t_{i-1}) = \alpha(b - a) \end{aligned}$$

Pertanto i valori dell'integrale chiaramente dipenderanno dal valore di  $\alpha$  cioè dalla scelta dei  $\tau_i$ . Si prova che la scelta che definisce gli integrali di Itô è  $\alpha = 0$ , cioè  $\tau_i = t_{i-1}$  coincide con l'estremo sinistro di ogni intervallo. Altre scelte sono possibili: in particolare  $\alpha = 1/2$  ( $\tau_i$  al centro degli intervalli) definisce l'integrale di Stratonovich. L'integrale di Itô comunque presenta molti vantaggi: la sua definizione consente dimostrazioni rigorose e inoltre l'integrale

$$X(t) = \int_0^t G(s) dW(s)$$

è una martingala. Una definizione rigorosa dell'integrale di Itô inoltre richiede che  $G(t)$  sia un *processo non anticipativo* secondo la seguente definizione

**Definizione 2.10.** *Un processo  $G(t)$  si dice non anticipativo quando  $G(t)$  è indipendente da  $W(s) - W(t)$  per ogni  $t < s$ .*

Cioè  $G(T)$  non deve poter anticipare il futuro comportamento del processo  $W(t)$ .  $W(t)$  è ovviamente non anticipativo, e inoltre se  $G(t)$  è non anticipativo anche tutti i seguenti processi sono non anticipativi:

$$\int_0^t f(W(s)) ds, \quad \int_0^t f(W(s)) dW(s), \quad \int_0^t G(s) ds, \quad \int_0^t G(s) dW(s)$$

Si può ora provare che

$$\int_a^b G(s)[dW(s)]^2 = \int_a^b G(s) ds, \quad \int_a^b G(s)[dW(s)]^n = 0, \quad n \geq 3$$

e inoltre

$$\int_a^b G(s) dW(s) ds = 0$$

Queste relazioni si scrivono anche simbolicamente come

$$[dW(s)]^2 = ds, \quad dW(s) ds = 0, \quad [dW(s)]^n = 0, \quad n \geq 3$$

e il loro significato intuitivo è che

$$dW(t) = O(\sqrt{dt})$$

e che si trascurano infinitesimi di ordine superiore al primo. Si noti come questo giustifichi la non derivabilità del processo di Wiener. Una conseguenza è la formula per il calcolo del differenziale totale di una funzione del processo di Wiener: data  $f(w, t)$  e arrendandosi al primo ordine in  $dt$  si ha

$$\begin{aligned} df(W(t), t) &= f_t dt + f_w dW + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2 + \frac{1}{2} f_{ww} (dW)^2 + \frac{1}{2} f_{tw} dt dW + \dots \\ &= \left[ f_t(W(t), t) + \frac{1}{2} f_{ww}(W(t), t) \right] dt + f_w(W(t), t) dW(t) \end{aligned}$$



una regola diversa da quella solita a causa della presenza della derivata seconda  $f_{ww}$  giustificata dal fatto che anche  $(dW)^2$  è dell'ordine di  $dt$ . Anche le usuali regole di integrazione devono essere parzialmente modificate come conseguenza di queste osservazioni; ad esempio:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t W(s) dW(s) &= \frac{W^2(t) - W^2(t_0) - (t - t_0)}{2} \\ \int_{t_0}^t W^n(s) dW(s) &= \frac{W^{n+1}(t) - W^{n+1}(t_0)}{n+1} - \frac{n}{2} \int_{t_0}^t W^{n-1}(s) ds\end{aligned}$$

Inoltre usando le regole sugli ordini dei differenziali stocastici si possono anche dimostrare le seguenti relazioni

$$\mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \int_{t_0}^t H(s') dW(s') \right) = \int_{t_0}^t \mathbf{E}(G(s)H(s)) ds \quad (2.13)$$

Si noti come queste formule si possano ricavare in maniera euristica introducendo il rumore bianco  $\eta(t)$  con le sue proprietà, in particolare

$$dW(t) = \eta(t) dt, \quad \mathbf{E}(\eta(t)) = 0, \quad \mathbf{E}(\eta(t)\eta(s)) = \delta(t - s)$$

Infatti si avrebbe (scambiando attese e integrali e tenendo conto di indipendenze e non anticipatività)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \right) &= \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s)\eta(s) ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)\eta(s)] ds \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)] \mathbf{E}[\eta(s)] ds = 0 \\ \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s) dW(s) \int_{t_0}^t H(s') dW(s') \right) &= \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t G(s)\eta(s) ds \int_{t_0}^t H(s')\eta(s') ds' \right) \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)\eta(s)H(s')\eta(s')] ds ds' \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)H(s')] \mathbf{E}[\eta(s)\eta(s')] ds ds' \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)H(s')] \delta(s - s') ds ds' \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{E}[G(s)H(s)] ds\end{aligned}$$

### 2.3.2 EDS e formula di Itô

Possiamo ora dare una versione rigorosa dell'equazione di Langevin (2.7) nella forma di equazione differenziale stocastica (EDS) di Itô

**Definizione 2.11.** Diremo che un processo stocastico  $X(t)$  soddisfa l'EDS di Itô

$$dX(t) = a[X(t), t]dt + b[X(t), t]dW(t) \quad (2.14)$$

con condizione iniziale  $X(t_0) = X_0$ , quando si ha

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a[X(s), s]ds + \int_{t_0}^t b[X(s), s]dW(s)$$

dove il secondo integrale è inteso nel senso dell'integrale stocastico di Itô

**Teorema 2.5.** L'EDS (2.14) ammette un'unica soluzione non anticipativa  $X(t)$  in  $[t_0, T]$  se e solo se

- condizione di Lipschitz: comunque scelti  $x, y$  e  $t$  esiste  $k > 0$  tale che

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq k|x - y|$$

- comunque scelti  $x$  e  $t$  esiste  $k > 0$  tale che

$$|a(x, t)|^2 + |b(x, t)|^2 \leq k(1 + |x|^2)$$

La soluzione è un processo di Markov

Si dimostra anche che se un processo è soluzione dell'EDS (2.14) allora esso è un processo di Markov le cui distribuzioni evolvono secondo una equazione di Fokker-Planck (2.5) con

$$a_1(x, t) = a(x, t), \quad a_2(x, t) = b^2(x, t)$$

Se  $X(t)$  è soluzione dell'EDS (2.14), la formula di Itô consente di scrivere il differenziale stocastico di una funzione  $f(x, t)$  calcolata nei valori del processo:

$$df[X(t), t] = \left( f_t[X(t), t] + a[X(t), t]f_x[X(t), t] + \frac{1}{2} b^2[X(t), t]f_{xx}[X(t), t] \right) dt + b[X(t), t]f_x[X(t), t]dW(t) \quad (2.15)$$

## 2.4 Movimento browniano libero

Modello matematico per il MB di una particella mesoscopica immersa in un fluido. Supponiamo che la posizione sia descritta da un processo  $\mathbf{X}(t)$  dotato di derivata nel senso che esiste un altro processo  $\mathbf{V}(t)$  tale che

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}(t) dt \quad (2.16)$$

Inoltre le azioni del fluido sulla particella sono due:

- attrito viscoso proporzionale alla quantità di moto  $-\gamma M\mathbf{V}(t)$  dove  $M$  è la massa e  $\gamma$  il coefficiente di viscosità del fluido
- disturbo esercitato dalle particelle microscopiche del fluido (movimento veloce) sulla particella mesoscopica (movimento più lento) che esegue il MB: gli urti sono istantanei e producono piccoli incrementi indipendenti della velocità; il modello per gli incrementi della velocità sarà quindi quello di un processo di Wiener  $\mathbf{W}(t)$  di intensità  $\Gamma$ .

Supporremo inoltre che ci sia una forza esterna  $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$ , per cui complessivamente l'equazione per la velocità è

$$M d\mathbf{V}(t) = [\mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) - \gamma M\mathbf{V}(t)] dt + \Gamma d\mathbf{W}(t) \quad (2.17)$$

Le due equazioni (2.16) e (2.17) costituiscono un sistema accoppiato (tramite la forza  $\mathbf{F}$  che dipende dalla posizione  $\mathbf{X}$ ) di EDS per il processo stocastico vettoriale con componenti  $\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t)$ . Si tratta quindi di un processo nello spazio delle fasi con disturbo aleatorio sulla velocità. Si dimostra che tale sistema di EDS è equivalente alla seguente equazione di Fokker–Planck per la ddp  $p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  nello spazio delle fasi

$$\begin{aligned} \partial_t p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = & -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{v}p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[ \left( \gamma \mathbf{v} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{M} \right) p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{M} \right)^2 \nabla_{\mathbf{v}}^2 p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \end{aligned}$$

detta anche equazione di Kramers (1940).

Ci interessiamo del caso in cui non c'è una forza esterna (equazioni disaccoppiate) e in cui il movimento è unidimensionale. In tal caso il sistema è

$$dX(t) = V(t) dt \quad (2.18)$$

$$dV(t) = -\gamma V(t) dt + \frac{\Gamma}{M} dW(t) \quad (2.19)$$

e visto che sono disaccoppiate potremo cominciare con il considerare separatamente l'equazione (2.19) con condizione iniziale  $V(0) = V_0$ . Questa equazione è ovviamente equivalente all'equazione di Fokker–Planck

$$\partial_t p(v, t) = \partial_v [\gamma v p(v, t)] + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{M} \right)^2 \partial_v^2 p(v, t)$$

per cui il processo della velocità (che prende il nome di processo di Ornstein–Uhlenbeck) potrebbe essere studiato risolvendo questa equazione. Noi invece proveremo a studiarlo come EDS.

Introduciamo allora un processo ausiliario mediante la funzione  $f(v, t) = v e^{\gamma t}$ :

$$Y(t) = f(V(t), t) = V(t) e^{\gamma t}, \quad Y(0) = V_0$$

e ricaviamo l'EDS soddisfatta da  $Y(t)$  utilizzando la formula di Itô (2.15) con  $a(v, t) = -\gamma v$  e  $b(v, t) = \Gamma/M$ : siccome

$$\begin{aligned} f(v, t) &= ve^{\gamma t} & f_t(v, t) &= \gamma ve^{\gamma t} \\ f_v(v, t) &= e^{\gamma t} & f_{vv}(v, t) &= 0 \end{aligned}$$

la formula di Itô fornisce l'equazione

$$dY(t) = \frac{\Gamma}{M} e^{\gamma t} dW(t)$$

la cui soluzione è

$$Y(t) = V_0 + \frac{\Gamma}{M} \int_0^t e^{\gamma s} dW(s)$$

per cui anche

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma}{M} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s} dW(s) \quad (2.20)$$

Se  $V_0$  è gaussiana (in particolare se  $V_0 = v_0$ ) si tratta di un processo gaussiano (sovrapposizione di v.a. gaussiane) le cui distribuzioni sono quindi determinate dalle attese e dalle covarianze; si ha allora innanzitutto

$$\mathbf{E}(V(t)) = \mathbf{E}(V_0) e^{-\gamma t} + \frac{\Gamma}{M} e^{-\gamma t} \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{\gamma s} dW(s) \right) = \mathbf{E}(V_0) e^{-\gamma t}$$

per cui  $\mathbf{E}(V(t)) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Allo stesso modo, data anche l'indipendenza fra  $V_0$  e  $W(t)$ , si vede che

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(V^2(t)) &= \mathbf{E}(V_0^2) e^{-2\gamma t} + \left( \frac{\Gamma}{M} \right)^2 e^{-2\gamma t} \mathbf{E} \left( \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(s+s')} dW(s) dW(s') \right) \\ &= \mathbf{E}(V_0^2) e^{-2\gamma t} + \left( \frac{\Gamma}{M} \right)^2 e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(s+s')} \delta(s-s') ds ds' \\ &= \mathbf{E}(V_0^2) e^{-2\gamma t} + \left( \frac{\Gamma}{M} \right)^2 e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{2\gamma s} ds \\ &= \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2} + \left[ \mathbf{E}(V_0^2) - \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2} \right] e^{-2\gamma t} \end{aligned}$$

e asintoticamente

$$\mathbf{E}(V^2(+\infty)) = \frac{\Gamma^2}{2\gamma M^2}$$

Siccome all'equilibrio alla temperatura  $T$  sussiste il teorema di equipartizione dell'energia, detta  $k_B$  la costante di Boltzmann si ha

$$\frac{M}{2} \mathbf{E}(V^2(+\infty)) = \frac{1}{2} k_B T$$

e quindi in definitiva

$$\Gamma^2 = 2\gamma M k_B T$$

un esempio di *relazioni fluttuazione–dissipazione* che connettono le costanti relative all'attrito (dissipazione) a quelle relative alla fluttuazione:  $\gamma$  e  $\Gamma$  non possono essere scelte in maniera indipendente. Con gli stessi metodi si dimostra anche che

$$\mathbf{E}(V(t)V(s)) = \left[ \mathbf{E}(V_0^2) - \frac{k_B T}{M} \right] e^{-\gamma(t+s)} + \frac{k_B T}{M} e^{-\gamma|t-s|}$$

per cui per  $t, s \rightarrow +\infty$  (ma  $|t-s|$  finito) si ha un comportamento stazionario

$$\mathbf{E}(V(t)V(s)) \sim \frac{k_B T}{M} e^{-\gamma|t-s|}$$

Dagli elementi così raccolti possiamo ora determinare anche la funzione di transizione del processo della velocità di Ornstein–Uhlenbeck: posto per comodità

$$\mu(t) = v_0 e^{-\gamma t}, \quad \sigma^2(t) = \frac{k_B T}{M} (1 - e^{-2\gamma t})$$

avremo

$$p(v, t|v_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-(v-\mu(t))^2/2\sigma^2(t)}$$

A partire dal processo  $V(t)$  possiamo poi ricostruire anche il processo  $X(t)$  integrando l'equazione (2.18): ponendo  $X(0) = 0$  e  $V(0) = V_0 = v_0$  da (2.20) si ottiene

$$X(t) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \sqrt{\frac{2\gamma k_B T}{M}} \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} \int_0^{t'} e^{\gamma s} dW(s)$$

da cui si possono ottenere tutte le proprietà del processo. In particolare per  $t \rightarrow +\infty$  si ha

$$\mathbf{E}(X(t)) = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \rightarrow \frac{v_0}{\gamma} \quad (2.21)$$

mentre per il secondo momento per  $t \rightarrow +\infty$  si ha

$$\mathbf{E}(X^2(t)) \sim \frac{2k_B T}{M\gamma} t$$

coerentemente con il carattere diffusivo del MB. A tempi brevi invece c'è un periodo di rilassamento verso l'equilibrio del processo delle velocità. Anche la funzione di autocorrelazione può essere facilmente calcolata e si ha

$$\mathbf{E}(X(t)X(s)) = \frac{k_B T}{M} \left[ \frac{2}{\gamma} \min(s, t) - \frac{1}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma s} - e^{-\gamma t} + e^{-\gamma|t-s|}) \right] \quad (2.22)$$

Il processo  $X(t)$  è gaussiano (combinazione di v.a. gaussiane) e quindi è completamente specificato quando sono assegnati i primi due momenti, nel senso che è

possibile ricostruire tutte le sue distribuzioni finito-dimensionali. Il processo  $X(t)$  però non è markoviano<sup>1</sup> perché descritto ancora alla scala di tempi brevi del processo di Ornstein–Uhlenbeck. Solo ad una scala di tempi più lunghi (o nel caso equivalente di grandi coefficienti d'attrito)  $X(t)$  diviene indistinguibile da un processo di Wiener e quindi riacquista la markovianità.

---

<sup>1</sup>Vedi N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North–Holland, 1992; p. 206

# Capitolo 3

## Modelli finanziari

Louis Bachelier (1900): uso del MB come modello per la fluttuazione dei prezzi sul mercato finanziario. Lavoro quasi dimenticato fino al 1944 quando Itô lo ha ripreso per introdurre il suo calcolo stocastico e il concetto di MBG. Il MBG è stato utilizzato da Paul Samuelson (Nobel dell'Economia 1970) a partire dal 1965. Nel 1973 Fisher Black e Myron Scholes (indipendentemente anche Robert Merton) hanno usato il MBG per determinare i prezzi delle *stock options* (Nobel dell'Economia 1997). Il modello comunque non è perfetto e richiede delle modifiche: l'uso di metodi impiegati in diversi settori della fisica per risolvere questi problemi ha dato origine al nome *econofisica*.

### 3.1 Nozioni iniziali

*market*: mercato, luogo sul quale venditori e compratori scambiano prodotti.

*spot price*  $S(t)$ : è il prezzo di un determinato prodotto su un particolare mercato. Esso è determinato dal gioco della domanda e dell'offerta.

*financial market*: i prodotti scambiati sono di tipo finanziario (denaro). Il denaro viene poi investito in *commodities* (grano, petrolio, metalli ...) o *securities* (*bonds* = obbligazioni, *stocks* or *shares* = azioni).

Gli scambi possono avvenire nello *stock exchange* (SE), oppure *over the counter* (OTC). Lo SE (come il NYSE) è un luogo nel quale si scambiano ufficialmente *securities*, *commodities* e *foreign currencies* (valuta straniera); il prezzo degli *assets* (valori) viene determinato dal gioco della domanda e dell'offerta. Lo SE accetta delle regole precise che rendono sicure le transazioni ma limitano la libertà dei partecipanti. Per evitare queste limitazioni si ricorre a scambi OTC che possono prevedere *assets* e regole non previste dallo SE.

Alternativamente i partecipanti al mercato (*traders*) possono depositare il denaro in banca a un tasso di interesse basso ma garantito: *risk-free*.

*risk management*: determinare la causa di possibili perdite di denaro, e immaginare strategie per limitare questi rischi.

- *credit risk*: rischi derivanti dalla possibilità che uno dei contraenti non sia poi in grado di onorare gli impegni presi (pagamenti, consegne di merce ...); un rischio particolarmente presente negli scambi OTC;
- *operational risk*: le procedure di una ditta possono non essere completamente adeguate alle condizioni del mercato; possibili fonti di rischio: errori nascosti nei programmi di computer, transazioni inappropriate o non autorizzate, errori umani;
- *market risk*: dovuti alle inevitabili fluttuazioni dei prezzi degli *assets*.

*stock index*: media di *spot prices*  $S(t)$  degli *stocks* scambiati su un mercato. Esempi: *S&P500* e *Dow Jones*. Caratteristiche (Fig. 5.1):

- l'andamento temporale presenta tipiche fluttuazioni irregolari
- tendenza a crescere verso valori più grandi con il procedere del tempo.

Quindi  $S(t)$  è un processo stocastico: ma che tipo di processo? Ipotesi di *efficient market*:

- l'informazione può circolare velocemente e liberamente
- *liquid market*: si può facilmente comperare e vendere in ogni momento
- bassa *market friction*, cioè bassi costi delle transazioni

Questo vuol dire che tutta l'informazione rilevante sullo sviluppo del mercato è sempre completamente contenuta nei prezzi all'istante presente: ipotesi di Markovianità del processo. Bachelier arrivò alla medesima conclusione e nel suo modello  $S(t)$  è un MB, cioè un processo di Wiener più un termine di trascinamento che rende conto del graduale aumento dei prezzi. Questo modello però ha la strana caratteristica (tipica del MB) di permettere anche prezzi negativi. È quindi necessario passare al MBG (Paul Samuelson, 1963).

L'analisi della evoluzione di  $S(t)$  parte supponendo che si tratti di un deposito in banca ad un tasso *risk-free*  $r$ : se  $S(0)$  è il capitale iniziale e l'interesse è pagato  $n$  volte in un tempo  $t$  (cioè è pagato ad intervalli regolari  $t/n$ ), dopo un tempo  $t$  si ha

$$S(t) = S(0) \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n$$

e quindi se  $n \rightarrow \infty$

$$S(t) = S(0) e^{rt}, \quad dS = rS(t) dt$$



Si può ora immaginare che l'evoluzione dello *spot price*  $S(t)$  sia come quella di un deposito in banca, ma disturbata da fluttuazioni aleatorie:

$$dS = \mu S(t) dt$$

dove si presume che il trascinarsi  $\mu$  sia maggiore di  $r$  per rendere appetibili i rischi del mercato. Per tenere conto della natura aleatoria dell'andamento dei prezzi si aggiunge un termine aleatorio in accordo con le ipotesi di Markovianità esposte prima. Una possibile scelta, operata per ragioni di analogia e semplicità, è allora

$$dS = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (3.1)$$

dove  $\sigma$  è un secondo parametro fenomenologico detto *volatility* e  $W(t)$  è un processo di Wiener. Questa formulazione suggerisce che la variabile rilevante nell'intervallo di larghezza  $dt$  non è l'incremento  $dS$ , ma l'incremento relativo  $dS/S$  detto *return* (rendita). A sua volta questa osservazione suggerisce di riscrivere l'equazione 3.1 come equazione per  $\ln S(t)$  invece che per  $S(t)$ . Un uso ingenuo del calcolo differenziale condurrebbe allora l'equazione

$$d \ln S = \mu dt + \sigma dW(t)$$

ma i risultati non sarebbero corretti. In questo caso bisogna infatti usare il calcolo differenziale di Itô: se  $S(t)$  è un processo che soddisfa l'equazione di Itô

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) dW(t)$$

allora, data una funzione  $f(s, t)$ ,  $f(S(t), t)$  è un processo che soddisfa l'equazione

$$df(S, t) = \left[ f_t(S, t) + a(S, t) f_s(S, t) + \frac{b^2(S, t)}{2} f_{ss}(S, t) \right] dt + b(S, t) f_s(S, t) dW(t)$$

per cui ponendo  $f(s, t) = \ln s$ ,  $a(s, t) = \mu s$ ,  $b(s, t) = \sigma s$  si ottiene

$$d \ln S = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

In conclusione è  $\ln S(t)$  che esegue un MB con trascinarsi, e non  $S(t)$  come supposto da Bachelier; piuttosto  $S(t)$  esegue un MBG. Si verifica in tal caso che

$$\mathbf{E}[d \ln S] = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \quad \mathbf{Var}[d \ln S] = \sigma^2 dt$$

e che la funzione di transizione è

$$p(s', t' | s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t' - t)\sigma^2 s'^2}} e^{-[\ln(s'/s) - (\mu - \sigma^2/2)(t' - t)]^2 / 2(t' - t)\sigma^2}$$

Nelle trattazioni più usuali il termine aleatorio  $W(t)$  è un processo di Wiener, cioè un MB, un processo continuo, e lo *spot price*  $S(t)$  è un MBG anch'esso continuo. Più recentemente si è supposto che  $W(t)$  possa essere un generico processo di Lévy. In questo caso lo *spot price*  $S(t)$  può presentare delle discontinuità, una eventualità che sembra piuttosto realistica. Inoltre degli studi empirici suggeriscono per  $S(t)$  delle distribuzioni con code lunghe incompatibili con modelli gaussiani. L'uso di processi di Lévy in finanza è ancora ad uno stadio iniziale e non è ancora chiaro se non sia meglio usare un esponenziale stocastico (moto di Lévy geometrico) per descrivere l'andamento di  $S(t)$ .

Due parametri:  $\mu$  descrive il guadagno atteso (trascinamento);  $\sigma$  descrive le fluttuazioni casuali attorno alla media, per questo prende il nome di *volatilità*. Se le fluttuazioni sono grandi gli investimenti sono rischiosi. Per diminuire i rischi si costruisce un *portfolio* con un gran numero di valori da diversi settori del mercato (*diversification*). Il rischio viene ridotto se i valori sono non correlati fra loro. In questo modo si può eliminare lo *specific risk* (*non systematic*) legato alle caratteristiche di un singolo valore, ma non il *market risk* (*non specific, systematic*). Il *market risk* è messo in evidenza dalle fluttuazioni degli *stock indexes* che in fondo sono dei grandi *portfolios*. *Hedging*: per controllare il *market risk* si possono aggiungere al portfolio dei valori fortemente anticorrelati in modo che se uno diminuisce l'altro in generale cresce; nei casi ideali questo permette di ottenere *risk-free portfolios*. Questi metodi si chiamano *hedging*, e ci sono dei particolari prodotti finanziari – che ora esamineremo – usati per lo *hedging*.

*Derivative* (o *contingent claim*): un prodotto finanziario il cui valore deriva dal prezzo  $S(t)$  di un valore sottostante detto *underlying*. Il valore di un *derivative* quindi è una funzione di  $S(t)$ . Ci sono vari tipi di *derivatives*:

- *forward*: contratto fra due parti nel quale
  - un contraente si impegna ad acquistare un valore *underlying*
  - ad un certo momento  $T$  (*delivery date*) nel futuro
  - per un prezzo fissato  $K$  (*delivery price*)
  - e l'altro contraente si impegna a vendere l'*underlying* al tempo  $T$  per il prezzo  $K$

nel gergo: chi acquista assume una *long position*, mentre chi vende assume una *short position*.

- *future*: la differenza rispetto a un *forward* è che i dettagli del contratto non possono essere negoziati individualmente; si tratta di valori standardizzati e scambiati sullo SE e non OTC come per i *forward*. Lo SE richiede da ambedue i contraenti dei depositi di garanzia (*margin*) che eliminano il *credit risk*.

- *option*: diversamente dai due contratti precedenti che impegnano due parti, nelle *options* solo una parte assume degli obblighi, mentre l'altra ha un diritto. Il caso più semplice è noto come *European option*:
  - il venditore (*writer*) della *option*
  - garantisce all'acquirente (*holder*) della *option*
  - il diritto di acquistare da lui (*call option*) o di vendere a lui (*put option*) un valore *underlying* con *spot price*  $S(t)$
  - ad un prezzo prefissato  $K$  detto *exercise* o *strike price*
  - al momento  $T$  (*expiry date*) nel futuro

il punto chiave è che il *writer* contrae un obbligo: acquistare o vendere un *underlying* allo *strike price* alla *expiry date*. Viceversa lo *holder* ha la possibilità di esercitare la sua *option* (scelta) solo se gli conviene, cioè se  $S(t) > K$  per una *call option*, e se  $S(t) < K$  per una *put option*. In questo caso il *writer* ci perde, e quindi richiederà una compensazione per questo rischio fissando un prezzo iniziale per la *option*. Il problema centrale quindi è quello di fissare un prezzo adeguato per le *options*: a questo risponde la teoria di Black–Scholes.

*Forwards*, *futures* e *options* sono contratti intesi ad eliminare il *market risk* dovuto alle imprevedibili evoluzioni dei prezzi: se un coltivatore di grano sa già al momento della semina che potrà vendere una parte del suo raccolto ad un prezzo prestabilito, potrà pianificare il suo lavoro in maniera più efficiente. Per questo *forwards* e *futures* hanno una storia piuttosto lunga: *futures* sulle *commodities* sono scambiati dalla metà del XIX° secolo; *futures* su prodotti finanziari, invece, sono più recenti (dagli anni '70). La storia delle *options* è anche più antica ma più tormentata: i primi contratti di questo tipo si ebbero in Olanda nel XVII° secolo ed erano legati al mercato, allora fiorente, dei tulipani. Questo mercato ebbe però un crollo nel 1637 provocando una seria crisi economica. Da allora, e per molto tempo, le *options* furono screditate, ma non del tutto eliminate. Regole stringenti per questo mercato furono stabilite solo negli anni '30 del XX° secolo e solo negli anni '70 le *options* hanno riacquisito importanza. Nel 1973 è stato aperto il primo *options exchange* a Chicago: prima di questa data erano possibili solo contrattazioni OTC.

Le (*call* e *put*) *European options* (dette anche *plain vanilla*) sono le più comuni, ma ve ne sono di molti tipi. Ad esempio le *American options* nelle quali lo *holder* può esercitare il suo diritto in un qualsiasi momento prima dell'*expiry date*. Le cosiddette *Exotic (Asiatic) options* invece sono più complicate: dipendono da più di un solo *underlying*, e il loro valore può dipendere dall'intera evoluzione temporale dell'*underlying* e non solo dal suo valore finale. In tutti questi casi la determinazione di un prezzo equo è piuttosto complicata: nel seguito ci interesseremo solo di *European options*.

**Esempio:** Supponiamo che in aprile venga offerta l'opportunità di acquistare azione della *Frozen Delight Ice Cream Company* (FDICC) al prezzo di 1.00 \$. Se l'estate

sarà buona il valore delle azioni salirà, ma se l'estate sarà cattiva si può prevedere un crollo dei prezzi (*market risk*). Ci viene però offerta anche la possibilità di acquistare delle *options*: al prezzo di 0.20 \$ possiamo acquistare un biglietto che ci dà il diritto di acquistare un'azione della FDIC il giorno 1 agosto al prezzo fisso di 1.20 \$ indipendentemente dal valore effettivo delle azioni sul mercato.

Supponiamo di acquistare 1000 di questi biglietti e di arrivare al giorno 1 agosto: l'estate è stata buona e le azioni valgono 1.80 \$. Eserciteremo allora il diritto di acquisto delle nostre *options* e compreremo 1000 azioni al prezzo di 1.20 \$ ciascuna, rivendendole immediatamente al prezzo di mercato con un ricavo di 600 \$ e un guadagno netto di 400 \$ se si tiene conto della spesa iniziale di 200 \$. Se invece l'estate è stata cattiva e il giorno 1 agosto le azioni valgono 0.70 \$ (o qualunque prezzo al di sotto di 1.20 \$) non eserciterò il mio diritto e butterò via i miei biglietti con una perdita dei 200 \$ inizialmente pagati. Se avessi semplicemente acquistato le azioni a 1.00 \$ in aprile, al giorno 1 agosto la mia perdita sarebbe invece stata di 300 \$. Le *options* funzionano quindi come una specie di assicurazione che consente all'investitore di dividere il rischio su un ventaglio di scelte, invece di essere vincolato ad una sola scelta iniziale e soggetto semplicemente alle fluttuazioni del mercato.

**Esempio:** una ditta USA deve pagare 1 000 000 Euro ad un fornitore tedesco nei prossimi tre mesi. C'è un rischio dovuto all'andamento dei cambi: se oggi il cambio è 1.00 Euro = 1.05 \$ e fra tre mesi diventasse 1.00 Euro = 1.10 \$, attendere l'ultimo momento potrebbe voler dire spendere 1 100 000 \$ invece di 1 050 000 \$ con una perdita di 50 000 \$. Ci sono due modi di controllare (hedge) questo rischio usando dei *derivatives*.

- La ditta USA può stipulare un *forward* con una banca fissando il tasso di cambio a quello attuale di 1.00 Euro = 1.05 \$. L'accordo è vincolante per ambedue i contraenti: se il tasso di cambio sale a 1.00 Euro = 1.10 \$ la ditta USA ci guadagna 50 000 \$; se invece il tasso di cambio scende a 1.00 Euro = 1.00 \$ essa ci perde una somma uguale. Questo mostra che un *future* non necessariamente migliora le prospettive della ditta: solamente le rende prevedibili.
- La ditta USA può usare una *call option*: deve cioè trovare una banca disponibile a garantirle fra tre mesi l'acquisto di 1 000 000 Euro al tasso di cambio odierno di 1.00 Euro = 1.05 \$. Se il tasso di cambio sale oltre il valore odierno la ditta eserciterà il suo diritto; se viceversa il tasso scende essa acquisterà piuttosto degli Euro sul mercato. Il rischio è pertanto trasferito alla banca che chiederà un premio (*call price*) per concedere questo diritto: il problema è quello di determinare un giusto prezzo per questo tipo di *options*.

In generale un investitore avrà un capitale  $\mathcal{W}(t)$  investito in un *portfolio* composto di *stocks* rischiosi e di denaro depositato in banca *risk-free*. Nel seguito supporremo che il *writer* di una *option* abbia un *portfolio* composto di una frazione  $\Delta(t)$  (detto *delta hedge*) dell'*underlying*, e di una certa quantità  $\Pi(t)$  di denaro liquido investito

in un conto bancario *risk-free* che gli consente di attingere denaro per aggiustare il valore di  $\Delta(t)$ . Complessivamente il valore del *portfolio* sarà allora

$$\mathcal{W}(t) = \Delta(t)S(t) + \Pi(t)$$

$\Delta(t)$  e  $\Pi(t)$  sono opportuni processi stocastici che descrivono l'andamento del *portfolio*. Un *portfolio* di questo genere si dice *self-financing* nel senso che le variazioni della sua composizione non richiedono iniezioni di capitale dall'esterno. Ovviamente questo *portfolio* è tenuto dal *writer* per fronteggiare l'eventualità che lo *holder* dell'*option* eserciti il suo diritto: per questo motivo è ragionevole supporre che il *writer* chiederà allo *holder* di pagare un prezzo della *option* proprio pari al valore del *portfolio* qui indicato: vedremo che questa è proprio la richiesta che permette di determinare il prezzo della *option*. Un *portfolio* di questo genere, bilanciato in modo da coprire il rischio di una *option*, si chiama *replicating*. Un mercato si chiama *completo* quando il valore di ogni *contingent claim* (*option*) può essere *replicated* da un *self-financing portfolio*.

## 3.2 Teoria di Black–Scholes

Sia  $\mathcal{O}(t)$  il prezzo di una *option*: nel caso di una *call option* la chiameremo  $\mathcal{C}(t)$ , e nel caso di una *put option*  $\mathcal{P}(t)$ . Ovviamente il prezzo della *option* deve essere una funzione dell'*underlying* per cui avremo in generale  $\mathcal{O}(t) = \mathfrak{o}(S(t), t)$  dove  $\mathfrak{o}(s, t)$  (rispettivamente  $\mathfrak{c}$  o  $\mathfrak{p}$ ) è una funzione incognita che costituisce proprio l'oggetto della nostra indagine: conoscere  $\mathfrak{o}$  vuol dire essere capaci di calcolare il prezzo della *option* a partire dal valore delle *underlying*. Gli altri due parametri da tenere presente sono lo *strike price*  $K$  e l'*expiry time*  $T$ . Il valore (*payoff*) delle *options* all'*expiry time* si calcola facilmente; nei due casi si ha infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(T) &= \mathfrak{c}(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0) = \begin{cases} S(T) - K, & \text{se } S(T) > K, \\ 0, & \text{se } S(T) < K; \end{cases} \\ \mathcal{P}(T) &= \mathfrak{p}(S(T), T) = \max(K - S(T), 0) = \begin{cases} K - S(T), & \text{se } S(T) < K, \\ 0, & \text{se } S(T) > K; \end{cases} \end{aligned}$$

In particolare si vede facilmente quindi che

$$\mathfrak{p}(S(T), T) = \mathfrak{c}(S(T), T) - S(T) + K \quad (3.2)$$

Ipotesi del modello di Black–Scholes (BS)

1. **Non c'è *credit risk*; solo *market risk*:** le parti sono sempre affidabili e i rischi dipendono solo dall'incertezza del mercato. Ipotesi valida per contrattazioni in un *exchange*.
2. **Il mercato è un *efficient market*:** cioè è infinitamente liquido e non ci sono attriti; tutta l'informazione è sempre istantaneamente disponibile.

3. **Gli scambi si svolgono in tempo continuo:** il  $\Delta t$  degli scambi tende a zero.

4.  $S(t)$  è un processo stocastico del tipo GBM:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (3.3)$$

5. **Il tasso di interesse risk-free  $r$  e la volatilità  $\sigma$  sono costanti:** in realtà  $r$  e  $\sigma$  possono anche essere funzioni note del tempo, ma noi non tratteremo questo caso. Il problema diventa comunque molto più complesso se  $r$  e  $\sigma$  sono aleatori.

6. **L'underlying non paga dividends:** è solo un'ipotesi di semplificazione che può anche essere trascurata.

7. **Il valore dell'underlying è continuo:** non c'è una unità di valore minima.

8. **Il Mercato è arbitrage-free:** quella dell'arbitrage (*free lunch*) è l'opportunità di guadagnare una quantità infinita di denaro senza rischi. Supponiamo che una banca ci presti una quantità  $b_0$  di denaro ad un tasso  $r$ : al tempo  $t$  dovremo restituire  $b(t) = b_0 e^{rt}$ . Arbitrage è la possibilità di trovare sul mercato un investimento *risk-less* ad un tasso  $r_0 > r$ : in tal caso potremmo investire contemporaneamente anche  $b_0$  in questo secondo modo e al tempo  $t$  guadagneremmo  $b_0 e^{(r_0-r)t}$ . Tipicamente queste situazioni non si verificano perché la competizione fra investitori condurrebbe rapidamente ad un riequilibrio. Si tratta di un principio analogo alla conservazione dell'energia che risulta anche utile per ottenere risultati come la *put-call parity*

$$p(S(t), t) = c(S(t), t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)} \quad (3.4)$$

relazione che generalizza a tutti i  $t$  la relazione (3.2)

Sulla base di queste ipotesi vogliamo ora determinare la forma di un *self-financing, replicating portfolio* che fissi un equo valore delle *options*.

Dall'uso della formula di Itô, e dal fatto che  $S(t)$  è un MBG con equazione (3.3), si ha che il differenziale stocastico di  $\mathcal{O}(t) = \mathfrak{o}(S(t), t)$  è

$$\begin{aligned} d\mathcal{O}(t) &= \left[ \mathfrak{o}_t(S(t), t) + \mu S(t)\mathfrak{o}_s(S(t), t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2(t)\mathfrak{o}_{ss}(S(t), t) \right] dt \\ &\quad + \sigma S(t)\mathfrak{o}_s(S(t), t) dW(t) \\ &= \left[ \mathfrak{o}_t(S(t), t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2(t)\mathfrak{o}_{ss}(S(t), t) \right] dt + \mathfrak{o}_s(S(t), t) dS(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'idea del modello BS è che il valore dell'*option* sia uguale a quello di un *self-financing, replicating portfolio* il cui valore è in generale del tipo

$$\mathcal{W}(t) = \Delta(t)S(t) + \Pi(t) \quad (3.6)$$

Si suppone ora che gli incrementi del *portfolio* siano del tipo

$$d\mathcal{W}(t) = \Delta(t)dS(t) + d\Pi(t) = \Delta(t)dS(t) + r\Pi(t)dt \quad (3.7)$$

Questo praticamente vuol dire che si ritiene che  $\Delta(t)$  non si modifichi nell'intervallo  $dt$ . Un argomento intuitivo per giustificare questa ipotesi è che una variazione di  $\Delta(t)$  è una reazione ad una fluttuazione dei prezzi  $S(t)$ : pertanto la frazione di *underlying* viene modificata solo *dopo* la variazione dei prezzi. La forma dell'incremento del denaro liquido riflette invece l'ipotesi che il mercato sia *arbitrage-free* con un tasso di interesse  $r$ . Se il *portfolio* deve servire a far fronte alle esigenze della vendita di una *option* dovrò richiedere che  $\Delta(t)$  e  $\Pi(t)$  dipendano dal valore dell'*underlying*  $S(t)$ , per cui ci saranno due funzioni  $\delta(s, t)$  e  $\pi(s, t)$  tali che

$$\Delta(t) = \delta(S(t), t), \quad \Pi(t) = \pi(S(t), t)$$

in modo che

$$\mathcal{W}(t) = S(t)\delta(S(t), t) + \pi(S(t), t), \quad d\mathcal{W}(t) = \delta(S(t), t)dS(t) + r\pi(S(t), t)dt$$

Il modello impone ora innanzitutto che il valore del *portfolio* sia ripagato dal prezzo dell'*option*, per cui

$$\mathfrak{o}(s, t) = s\delta(s, t) + \pi(s, t) \quad (3.8)$$

Inoltre bisognerà richiedere che anche le variazioni di valore del *portfolio* siano compensate da identiche variazioni di valore dell'*option*, cioè che  $d\mathcal{W}(t) = d\mathcal{O}(t)$ . Paragonando allora (3.5) e (3.7) si ricava allora che

$$\delta(s, t) = \mathfrak{o}_s(s, t), \quad r\pi(s, t) = \mathfrak{o}_t(s, t) + \frac{\sigma^2}{2}s^2\mathfrak{o}_{ss}(s, t) \quad (3.9)$$

Eliminando ora  $\delta$  e  $\pi$  fra le tre equazioni (3.8) e (3.9) si ottiene l'**equazione differenziale di BS per le *European options***

$$\mathfrak{o}_t(s, t) + \frac{\sigma^2}{2}s^2\mathfrak{o}_{ss}(s, t) + r s\mathfrak{o}_s(s, t) - r\mathfrak{o}(s, t) = 0 \quad (3.10)$$

Le condizioni da imporre distinguono i casi delle *put* e *call options*: ricordando che  $t \in [0, T]$  e  $x > 0$ , per le *call options* si ha

$$\mathfrak{c}(s, T) = \max(s - K, 0), \quad \mathfrak{c}(0, t) = 0, \quad \mathfrak{c}(s, t) \sim s \quad (s \rightarrow +\infty) \quad (3.11)$$

mentre per le *put options*

$$\mathfrak{p}(s, T) = \max(K - s, 0), \quad \mathfrak{p}(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \mathfrak{p}(+\infty, t) = 0 \quad (3.12)$$

Queste condizioni possono essere giustificate in questo modo: le condizioni per  $t = T$  derivano dai valori dei *payoff* finali discussi all'inizio. Se poi  $s = 0$  il prezzo dell'*underlying* non cambia a causa della forma dell'EDS di  $S(t)$ , pertanto una *call* avrà sempre valore nullo, mentre il diritto di una *put* sarà sempre esercitato e quindi vale lo *strike price*  $K$  scontato del tasso di interesse *risk-less*. Infine se  $s \rightarrow +\infty$  una *put* non avrà valore, mentre una *call* avrà approssimativamente valore  $s$ .

### 3.2.1 Soluzione dell'equazione di Black–Scholes

Consideriamo il prezzo  $\mathbf{c}(s, t)$  di una *call option* con  $0 \leq t \leq T$  e  $s \geq 0$ : sappiamo che esso soddisfa l'equazione BS

$$\partial_t \mathbf{c} + \frac{\sigma^2}{2} s^2 \partial_s^2 \mathbf{c} + r s \partial_s \mathbf{c} - r \mathbf{c} = 0$$

con condizioni (finali)

$$\mathbf{c}(s, T) = \max(s - K, 0), \quad \mathbf{c}(0, t) = 0, \quad \mathbf{c}(s, t) \sim s \quad (s \rightarrow +\infty)$$

Eseguiamo un primo cambiamento di variabili che consiste nel prendere logaritmi di prezzi in scala  $K$ , e tempi in scala  $1/\sigma^2$  e in verso invertito (in modo che le condizioni finali diventino condizioni iniziali):

$$x = \ln \frac{s}{K}, \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2} (T - t)$$

in modo che ora  $-\infty < x < +\infty$  e  $0 \leq \tau \leq T$ . Ponendo allora

$$\mathbf{c}(s, t) = K f(x, \tau) = K f\left(\ln \frac{s}{K}, \frac{\sigma^2}{2} (T - t)\right), \quad \kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$$

otteniamo per la  $f$  un'equazione in cui l'unico parametro è  $\kappa$ , gli altri parametri essendo stati riassorbiti nei riscalamanti effettuati:

$$\partial_\tau f = \partial_x^2 f + (\kappa - 1) \partial_x f - \kappa f$$

con condizioni (iniziali)

$$f(x, 0) = \max(e^x - 1, 0), \quad f(-\infty, \tau) = 0, \quad f(x, \tau) \sim e^x \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Infine, ponendo

$$f(x, \tau) = e^{-(\kappa-1)x/2 - (\kappa+1)^2\tau/4} g(x, \tau)$$

l'equazione si riduce a

$$\partial_\tau g = \partial_x^2 g \tag{3.13}$$

con condizioni

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= \max(e^{(\kappa+1)x/2} - e^{(\kappa-1)x/2}, 0) \\ g(x, \tau) &\sim e^{(\kappa+1)x/2 - (\kappa+1)^2\tau/4} \quad |x| \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

L'equazione (3.13) coincide formalmente con un'equazione di diffusione, ma è sostanzialmente diversa perchè  $g$  non è una densità di probabilità: questo si vede chiaramente anche dalle condizioni imposte su  $g$ . Ciononostante è possibile applicare per la soluzione le medesime tecniche usate nel caso diffusivo. In particolare si ha che

$$g(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau|y, 0) g(y, 0) dy$$



dove  $p$  è il propagatore

$$p(x, \tau | y, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-y)^2/4\tau}$$

L'uso di questo propagatore gaussiano con le condizioni iniziali assegnate produce il seguente risultato

$$\begin{aligned} g(x, \tau) &= g_1(x, \tau)\Phi(d_1(x, \tau)) - g_2(x, \tau)\Phi(d_2(x, \tau)) \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz \\ g_1(x, \tau) &= e^{(\kappa+1)x/2+(\kappa+1)^2\tau/4}, & g_2(x, \tau) &= e^{(\kappa-1)x/2+(\kappa-1)^2\tau/4} \\ d_1(x, \tau) &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\kappa+1}{2}\sqrt{2\tau}, & d_2(x, \tau) &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\kappa-1}{2}\sqrt{2\tau} \end{aligned}$$

e ritornando alle variabili iniziali

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s, t) &= s\Phi(c_1(s, t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(c_2(s, t)) & (3.14) \\ c_1(s, t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \ln \frac{s}{K} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right] \\ c_2(s, t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \ln \frac{s}{K} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right] \end{aligned}$$

Il prezzo delle *put options* si ricava poi dalla *put–call parity* ed è, con le stesse notazioni,

$$\mathbf{p}(s, t) = -s[1 - \Phi(c_1(s, t))] + Ke^{-r(T-t)}[1 - \Phi(c_2(s, t))] \quad (3.15)$$

Le formule (3.14) e (3.15) forniscono il prezzo delle *call* e *put options* al tempo  $t$  in base alle caratteristiche del contratto  $K$  e  $T$ , e tenendo conto dei parametri del mercato  $r$  e  $\sigma$ . Tenendo poi conto della composizione (3.6) di un *risk–less* portfolio, il *writer* eliminerà il rischio aggiustando continuamente la quantità posseduta di *underlying* in base alle relazioni (3.9)  $\delta = \partial_s \mathbf{o}$  dalle quali si ricava subito nei due casi che

$$\delta(s, t) = \begin{cases} \partial_s \mathbf{c}(s, t) = \Phi(c_1(s, t)) \in [0, 1], & \text{call option;} \\ \partial_s \mathbf{p}(s, t) = -[1 - \Phi(c_1(s, t))] \in [-1, 0], & \text{put option.} \end{cases}$$

Pertanto i primi termini nelle equazioni (3.14) e (3.15) rappresentano la frazione di *underlying* che il *writer* deve comperare (*call*) o vendere (*put*) per mantenere una posizione *risk–less*. Allo stesso modo i secondi termini di (3.14) e (3.15) rappresentano la quantità di denaro liquido del *portfolio* e nei due casi si ha

$$\pi(s, t) = \begin{cases} -Ke^{-r(T-t)}\Phi(c_2(s, t)), & \text{call option;} \\ Ke^{-r(T-t)}[1 - \Phi(c_2(s, t))], & \text{put option.} \end{cases}$$

La quantità  $Ke^{-r(T-t)}$  è il *present value* dello *strike price*, cioè lo *strike price* scontato al tempo  $t$  con il tasso di interesse  $r$ . Pertanto per una *call option*  $\pi$  coincide con il *present value* dello *strike price* moltiplicato per la probabilità che l'*option* sia esercitata.

Possiamo esaminare ad esempio l'andamento di  $\mathbf{c}/K$  (prezzo di una *call option*) e del *delta hedge*  $\delta$  in funzione della *moneyness*  $s/K$  (vedi Fig 5.3 p. 152): le zone rilevanti del grafico sono  $s > K$  (*option in-the-money*),  $s = K$  (*option at-the-money*) e  $s < K$  (*option out-of-money*).

- Alla *expiry date*  $t = T$  una *call option* ha valore solo se è *in-the-money*, e corrispondentemente il *writer* deve essere preparato a consegnare l'*underlying* non appena l'*option* è *at-the-money* per cui il *delta hedge* presenta una caratteristica forma a scalino.
- A tempi  $t < T$  il valore della *call option* è maggiore, e inoltre è diverso da zero se è ancora *out-of-money*; inoltre il *delta hedge* è non nullo ma minore di 1 in tutte le zone del grafico: per evitare rischi deve essere non nullo anche nella zona *out-of-money*, ma non è necessario possedere esattamente un *underlying* nella zona *in-the-money*.

### 3.3 Oltre il movimento Browniano geometrico

Un aspetto importante della teoria è un'accurata descrizione dell'andamento temporale del valore degli *underlyings*. Fin qui abbiamo fatto l'ipotesi che si tratti di un MBG: si tratta però di un'ipotesi da verificare. Solo recentemente sono state rese disponibili grandi masse di dati e moderne opportunità di calcolo.

Le ipotesi fin qui adottate erano le seguenti:

- gli scambi avvengono a tempo continuo;
- l'evoluzione temporale dei prezzi è un processo le cui variabili fondamentali sono gli incrementi infinitesimi del  $\ln S(t)$ :

$$\Delta \ln S(t) = \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t)$$

tali incrementi sono indipendenti, identicamente distribuiti e hanno attese e varianze finite.

Se allora  $\Delta t$  tende a zero, e se il numero degli incrementi in un tempo finito  $T$  tende ad infinito, gli incrementi sono distribuiti in maniera normale a causa del TLC. Ora si tratta di verificare empiricamente queste ipotesi.

Innanzitutto le contrattazioni non avvengono in realta' a tempi continui. Avremo quindi a che fare piuttosto con

$$S_n = S(t_n), \quad t_n = n\Delta t$$

In generale negli studi di fisica si sceglie di studiare l'incremento

$$\Delta S_n = \Delta S(t_n) = S(t_n + \Delta t) - S(t_n)$$

invece dell'incremento dei logaritmi. Siccome si può dimostrare che

$$\frac{\Delta S_n/S_n}{1 + \Delta S_n/S_n} < \ln \frac{S(t_n + \Delta t)}{S(t_n)} < \frac{\Delta S_n}{S_n}$$

questa scelta è giustificata se  $\Delta S_n \ll S_n$  e  $S_n$  varia lentamente rispetto alla scala dei tempi degli incrementi:

$$\ln \frac{S(t_n + \Delta t)}{S(t_n)} \approx \frac{\Delta S_n}{S_n} \approx \frac{\Delta S_n}{S_0}$$

Queste condizioni valgono per periodi brevi e normali (nel senso che non ci devono essere crolli dei prezzi). Sotto queste condizioni le simulazioni mostrano che gli andamenti del MB e del MBG non sono molto differenti (Fig. 5.5). Pertanto è ragionevole usare il modello additivo

$$S(T) = S(0) + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta S_n$$

invece di quello moltiplicativo

$$\ln S(T) = \ln S(0) + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta \ln S_n$$

Nel 1963 B. Mandelbrot avanzò l'ipotesi che i prezzi seguissero una distribuzione stabile con  $\alpha < 2$ . Ma queste distribuzioni hanno varianze infinite, mentre i dati empirici hanno varianze ben definite. Il problema può essere risolto troncando le distribuzioni di Lévy. In questo modo le distribuzioni del processo conservano proprietà di scala su un esteso intervallo di valori prima che il troncamento sia efficace. Mandelbrot aveva pochi dati per poter vedere adeguatamente l'inizio del troncamento, ma la sua proposta è stata ripresa da Mantegna e Stanley (1995) con 5 anni di dati e intervalli fra le contrattazioni che arrivano fino a  $\Delta t$  di 1 minuto. I risultati sono in Fig. 5.6. I valori centrali della distribuzione sono ben rappresentati da una distribuzione stabile con  $\alpha \simeq 1.4$ . Per variazioni più grandi, però, la distribuzione decade in maniera quasi esponenziale. Il troncamento risulta visibile per dati presi a  $\Delta t < 10$  min, mentre per intervalli di tempo più lunghi i dati non mettono in evidenza comportamenti che deviano dal comportamento alla Lévy.

Altre proprietà sono messe in evidenza dallo studio delle correlazioni temporali dei prezzi. Le ipotesi del MBG assumono che i  $\Delta S$  non siano correlati anche per  $\Delta t$  tendente a zero. Bisogna quindi studiare la funzione di autocorrelazione del processo:

$$\Phi_{\Delta S}(t) = \frac{\mathbf{E}[\Delta S(t_n + t)\Delta S(t_n)] - \mathbf{E}[\Delta S(t_n + t)]\mathbf{E}[\Delta S(t_n)]}{\mathbf{E}[\Delta S(t_n)^2] - \mathbf{E}[\Delta S(t_n)]^2}$$

che vale 1 per  $t = 0$  e decade a zero per  $t \rightarrow +\infty$ . In realtà l'ipotesi del MBG prevede che questa funzione sia nulla per ogni  $t > 0$ , ma in pratica si trova una correlazione non nulla per piccoli valori di  $t$ :

$$\Phi_{\Delta S}(t) \approx e^{-t/\tau}$$

con  $\tau$  dell'ordine di qualche minuto. Insomma  $\Phi_{\Delta S}(t)$  è nulla solo per  $t \geq 15$  min, e quindi per avere incrementi indipendenti bisogna scegliere  $\Delta t \geq \Delta t^* = 15$  min.

Sono stati paragonati (Bouchaud e Potters, 2000) i dati empirici con i risultati di un modello con incrementi  $\Delta S$  indipendenti (per intervalli di tempo maggiori di  $\Delta t^*$ ) e tutti distribuiti con una distribuzione di Lévy troncata. In questo caso la distribuzione della somma degli incrementi è ottenuta con una semplice convoluzione delle distribuzioni troncate. I risultati sono riportati in Fig. 5.7. In questa simulazione è stato scelto  $\alpha = 3/2$  mentre gli altri parametri della distribuzione stabile troncata sono stati ottimizzati. Inoltre la convoluzione delle distribuzioni troncate è una buona approssimazione quando  $T \gg \Delta t^*$ ; quando  $T$  cresce, però, la forma della distribuzione della somma tende ad una gaussiana. La transizione avviene per  $T$  dell'ordine di una mezza giornata di contrattazioni (circa 200 minuti). Comunque l'ipotesi che la distribuzione della somma sia una semplice convoluzione presenta diversi problemi:

- ci sono sistematiche deviazioni fra le distribuzioni teoriche e quelle empiriche;
- i tempi empirici di convergenza al comportamento gaussiano sono molto più grandi (giorni o settimane) di quelli stimati (mezza giornata).