Università degli Studi di Bari
Dipartimento di Matematica

Nicola Cufaro Petroni

Il Problema Limite Centrale e i Processi Decomponibili

Dottorato di ricerca in Matematica
a.a. 2004/05

Università degli Studi di Bari
Dipartimento di Matematica
via E.Orabona 4, 70125 Bari
e–mail cufaro@ba.infn.it

Indice

Capitolo 1

Il Problema Limite Centrale

1.1 Leggi e Tipi di leggi

Per *funzione di distribuzione*[1] (f.d.) intenderemo una funzione F su $\mathbb{R}$ non decrescente, continua da sinistra (o da destra) e limitata fra 0 e 1 (p. 177). Da questa definizione non discende in generale che $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$, come invece avviene per le f.d. di v.a. cioè di funzioni misurabili e q.o. finite (p. 152 e 172). Se infatti X è una funzione misurabile che può assumere anche valori infiniti con probabilità non nulle è evidente che avremo $F(-\infty) \geq 0$ e $F(+\infty) \leq 1$.

Diremo che una successione di f.d. F_n *converge debolmente* (p. 180) ad una f.d. F, e scriveremo $F_n \xrightarrow{w} F$, se $F_n \to F$ sull'insieme $\mathfrak{C}(F)$ dei punti di continuità di F. Diremo invece che *converge completamente* ad una f.d. F, e scriveremo $F_n \xrightarrow{c} F$, se $F_n \xrightarrow{w} F$ e se $F_n(\mp\infty) \to F(\mp\infty)$. Si vede facilmente che la convergenza debole non implica la convergenza completa.

Poiché c'è corrispondenza biunivoca fra distribuzioni di probabilità, f.d. e *funzioni caratteristiche* (f.c. vedi p. 198)

$$f(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux}\, \mathrm{d}F(x)$$

intenderemo tutti questi concetti come rappresentazioni diverse, ma equivalenti dello stesso concetto che chiameremo *legge* $\mathcal{L}$. In pratica per individuare la legge useremo quasi sempre la f.c. Trasformando una v.a. X in $a + bX$ con $b \neq 0$ si modificano l'origine e la scala dei suoi valori (ed eventualmente l'orientazione se $b < 0$): la famiglia di tutte le leggi che si ottengono da una v.a. mediante queste trasformazioni lineari si chiama *tipo* di leggi (p. 214). In particolare $\mathcal{L}(a)$ denota il tipo degenere di leggi. Si verifica immediatamente che se $f(u)$ è una f.c. tute e sole le f.c. dello stesso tipo hanno la forma $e^{iau} f(bu)$.

[1]Queste note seguono l'impostazione del libro di M. Loève: PROBABILITY THEORY - I/II, Springer 1987/78; pertanto le citazioni – ove non altrimenti indicato – si riferiscono sempre a tale opera. Per distinguere i due volumi le pagine del vol. II sono indicate in carattere *slanted*.

Useremo per la convergenza (debole o completa) di leggi la stessa notazione adottata per le f.d. Nel seguito avremo a che fare quasi sempre con leggi $\mathcal{L}(X)$ di v.a. X. In questo caso se una successione $\mathcal{L}(X_n)$ di leggi di v.a. converge completamente, la legge limite $\mathcal{L}(X)$ è necessariamente quella di una v.a. e noi trascureremo di indicare la completezza scrivendo solo $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$. Si noti che se $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, allora anche $\mathcal{L}(a+bX_n) \to \mathcal{L}(a+bX)$: pertanto la convergenza di leggi verso leggi è in realtà convergenza di tipi verso tipi. Inoltre, data $\mathcal{L}(X_n)$ (convergente, o non convergente) ci si può chiedere se esistono a_n e b_n tali che $\mathcal{L}(a_n + b_nX_n)$ sia convergente: si noti che i teoremi limite classici sono una particolare forma di questo problema dove si studiano le successioni di somme consecutive di v.a. indipendenti. La convergenza dei tipi gode di una importante proprietà (A. Khintchin, p. 216):

Teorema 1.1. TEOREMA SULLA CONVERGENZA DEI TIPI: *Se $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$ non degenere, e se $\mathcal{L}(a_n+b_nX_n) \to \mathcal{L}(X')$ non degenere, allora $\mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X')$ sono dello stesso tipo con $\mathcal{L}(X') = \mathcal{L}(a + bX)$ e, se $b_n > 0$,*

$$b_n \to b\,, \qquad a_n \to a\,.$$

Inoltre, per ogni a finito, esistono a_n e $b_n \neq 0$ tali che $\mathcal{L}(a_n + b_nX_n) \to \mathcal{L}(a)$.

In altre parole: data una successione di leggi le trasformazioni lineari producono al più un tipo non degenere di leggi limite; c'è comunque sempre la possibilità di ottenere come limite il tipo degenere.

Quest'ultima parte del teorema fornisce l'occasione per svolgere alcune osservazioni circa le leggi (ad esempio) di tipo Cauchy: è noto infatti che le v.a. di tipo Cauchy si ottengono con cambiamenti di origine e di scala della legge $\mathcal{C}$ caratterizzata dalle seguenti densità e f.c.

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad e^{-|u|}\,.$$

Supponendo ora di avere una successione di v.a. X_n i.i.d. tutte con legge $\mathcal{C}$ si vede immediatamente dalla forma della f.c. che, posto $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, le v.a. S_n/n hanno ancora tutte legge $\mathcal{C}$ per ogni valore di n. Pertanto è immediato concludere che la Legge dei grandi numeri classica in questo caso non è rispettata dato che $\mathcal{L}(S_n/n) = \mathcal{C}$ per ogni n ovviamente non converge verso una v.a. degenere. È noto che questo comportamento è dovuto al fatto che la legge $\mathcal{C}$ non ha neanche il primo momento, per cui le ipotesi della forma classica della Legge dei grandi numeri non sono rispettate. Il Teorema sulla convergenza dei tipi, però, ci dice che anche in questo caso è comunque possibile determinare una successione di costanti b_n tali che b_nS_n risulti convergente verso la legge degenere $\mathcal{L}(0)$: quello che abbiamo verificato con le osservazioni precedenti, infatti, è solo che tali b_n non possono essere del tipo $1/n$. La dimostrazione del Teorema sulla convergenza dei tipi (p.216) ci suggerisce anche la procedura per determinare le b_n: se infatti γ_n è una successione di numeri tali che

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \gamma_n) = \frac{1}{n}\,, \qquad \forall n$$

comunque scelti dei numeri $c_n > \gamma_n$ si avrà

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq c_n) < \frac{1}{n}\,, \qquad \forall n$$

e quindi anche (p.216) $\mathcal{L}(S_n/nc_n) \to \mathcal{L}(0)$, cioè $b_n = 1/nc_n$. Nel nostro esempio i valori γ_n si calcolano da

$$\frac{1}{n} = \mathbf{P}(|S_n| \geq \gamma_n) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{\gamma_n}{n}\right) = 2\int_{\gamma_n/n}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\frac{\gamma_n}{n}$$

ottenendo

$$\gamma_n = n\tan\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Siccome è possibile dimostrare che

$$n > \tan\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad \forall\, n \geq 1$$

si ricava che ponendo $c_n = n^2 > \gamma_n$, cioè $b_n = 1/n^3$, otteniamo come forma possibile di convergenza degenere per le leggi di Cauchy: $\mathcal{L}(S_n/n^3) \to \mathcal{L}(0)$. In conclusione: le leggi di tipo Cauchy non soddisfano la forma classica della Legge dei Grandi numeri, ma è sempre possibile determinare delle forme generalizzate di convergenza degenere come ad esempio $\mathcal{L}(S_n/n^3) \to \mathcal{L}(0)$.

1.2 Teoremi limite classici

I tipi classici di leggi limite sono tre (p. 283):

1. degenere $\mathcal{L}(a)$, con $f(u) = e^{iau}$
2. normale $\mathcal{N}(a, b^2)$, con $f(u) = e^{iau}e^{-b^2u^2/2}$
3. Poisson $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$, con $f(u) = e^{iau}e^{\lambda(e^{ibu}-1)}$

Il tipo delle leggi di Poisson $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$ si ottiene a partire dalla legge standard di Poisson $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda; 0, 1)$ nel modo seguente: se X è una v.a. con legge $\mathcal{P}(\lambda)$, allora $Y = a + bX$ ha legge $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$; Y assume valori $y_k = a + b\,k$ con $k = 0, 1, \ldots$ con le stesse probabilità di Poisson con cui X assume i valori k.

Non riporteremo qui le formulazioni classiche dei Teoremi limite (vedi §20 e §21); ricorderemo invece che i tre tipi citati possiedono un'importante proprietà di chiusura. Diremo che la legge $\mathcal{L}(X)$ si *decompone* nelle leggi $\mathcal{L}(X_1)$ e $\mathcal{L}(X_2)$ (ovvero: queste ultime due *compongono* la prima), se X_1 e X_2 sono indipendenti e $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_1+X_2)$, ovvero se $f = f_1 f_2$. Si ha allora il seguente risultato:

Teorema 1.2. Teorema di composizione e decomposizione: *I tipi degenere e normale sono chiusi sotto composizione e decomposizione; lo stesso è vero per ogni famiglia di leggi di Poisson con lo stesso b:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a_1) * \mathcal{L}(a_2) &= \mathcal{L}(a_1 + a_2)\\ \mathcal{N}(a_1, b_1^2) * \mathcal{N}(a_2, b_2^2) &= \mathcal{N}(a_1 + a_2, b_1^2 + b_2^2)\\ \mathcal{P}(\lambda_1; a_1, b) * \mathcal{P}(\lambda_2; a_2, b) &= \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_1; a_1 + a_2, b)\end{aligned}$$

Si noti che chiusura sotto composizione vuol dire che date due v.a. indipendenti di un certo tipo la loro somma è dello stesso tipo; chiusura sotto decomposizione vuol dire che se una v.a. di un tipo si decompone in due altre v.a. queste sono dello stesso tipo della prima. Queste proprietà sono state individuate da P. Lévy: le dimostrazioni delle proprietà di composizione sono elementari; quelle delle decomposizioni (a parte il caso degenere che è immediato) sono state date negli anni 1935-37 da H. Cramer (normale) e D.A. Raikov (Poisson).

1.3 Il Problema Limite Centrale

Dall'epoca di Laplace fino al 1935 (p.286) lo scopo della ricerca sui problemi limite è stato quello di indebolire le ipotesi sotto le quali continuano a valere la *Legge dei Grandi Numeri* (convergenza di somme consecutive $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ di v.a. indipendenti verso la legge degenere $\mathcal{L}(0)$) e la *Convergenza Normale* (convergenza di S_n verso la legge normale $\mathcal{N}(0, 1)$). Le formulazioni classiche dei due teoremi sono del tipo

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}\right) \to \mathcal{L}(0)\,, \qquad \mathcal{L}\left(\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbf{Var}(S_n)}}\right) \to \mathcal{N}(0, 1)$$

e le ipotesi richiedono nel primo caso che gli addendi siano integrabili; nel secondo che siano di quadrato integrabile. Le condizioni necessarie e sufficienti per queste convergenze, stabilite definitivamente negli anni '30, sono enunciate a p. 290 per la convergenza degenere, e a p. 292 per la convergenza normale (J.W. Lindeberg e W. Feller). In tutto questo periodo il teorema di convergenza verso le leggi di Poisson è rimasto ai margini della discussione. Negli stessi anni '30 è anche diventata chiara l'importanza della relazione che connette i teoremi limite con i *processi decomponibili* (o *additivi*, o ancora *ad incrementi indipendenti*): un argomento sul quale torneremo nel Capitolo 2. In un processo decomponibile un incremento $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ è sempre somma degli n incrementi indipendenti che si ottengono da una decomposizione di $[t\,,\, t + \Delta t]$ in n sotto intervalli; d'altra parte n è arbitrario, per cui la legge di $\Delta X(t)$ deve essere una delle leggi dei limiti di somme consecutive come quelle considerate in questa Sezione. Questa osservazione mette quindi in evidenza la rilevanza di una classificazione di tutte le leggi limite di successioni di somme consecutive per una descrizione completa dei processi decomponibili.

Il recupero della convergenza verso leggi di Poisson avviene solo con una generalizzazione della forma dei teoremi limite che fino al 1935 si presentavano come teoremi di convergenza di somme consecutive *normate*. Nel seguito indicheremo con

$$X_{nk}\,, \qquad k = 1, \dots, k_n\,, \quad n = 1, 2, \dots$$

(dove k_n è una successione divergente di numeri interi, ad esempio $k_n = n$) una successione di v.a tali che $X_{n1}, \dots, X_{nk_n}$ siano indipendenti comunque preso n: in generale, però, queste v.a. non sono identicamente distribuite. Adotteremo inoltre la notazione

$$S_{nk_n} = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$$

per indicare la successione delle *somme consecutive.* La formulazione più generale del *PLC* (Problema Limite Centrale, p. 301-2) prevede la *ricerca di tutte le possibili leggi limite delle somme S_{nk_n}, e delle condizioni di convergenza verso queste leggi limite.* In questo modo si contengono tutti i casi classici noti, compreso il teorema limite di Poisson che, invece, in formulazioni più particolari rimane escluso. In questa parte della discussione gioca un ruolo centrale il concetto di famiglie di *leggi infinitamente divisibili* (*i.d.* B. de Finetti) e la loro rappresentazione esplicita (A. Kolmogorov, P. Lévy).

Prima di procedere bisogna però osservare che nei termini generali in cui è stato posto qui il PLC è praticamente senza contenuto perché la famiglia di tutte le possibili leggi limite conterrebbe qualunque legge $\mathcal{L}$. Basterebbe infatti considerare una successione Y_n di v.a. tutte con legge $\mathcal{L}$ e scegliere

$$X_{n1} = Y_n\,, \qquad X_{nk} = 0\,, \quad k = 2, \dots k_n$$

in modo che $S_{nk_n} = Y_n$. In tal caso $\mathcal{L}(S_{nk_n}) = \mathcal{L}$ e quindi $\mathcal{L}$ sarebbe ovviamente legge limite di una successione di somme consecutive. Per evitare queste situazioni triviali si aggiunge allora la richiesta che le X_{kn} siano *u.a.n.* (*uniformly asymptotically negligible*, p. 302), cioè che

$$\lim_n \max_k \mathbf{P}(|X_{nk}| \geq \epsilon) = 0\,, \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

In pratica gli addendi delle nostre somme consecutive devono essere *tutti* piccoli, nel senso di *asintoticamente trascurabili*: una condizione ovviamente non rispettata nel nostro esempio visto che per un dato $\epsilon > 0$ la probabilità $\mathbf{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$ risulta indipendente da n ($\mathcal{L}$ è sempre la stessa) e quindi non è infinitesima.

Si noti che nel caso particolare in cui $k_n = n$, e

$$X_{nk} = \frac{X_k}{b_n} - \frac{a_n}{n}$$

con le X_k indipendenti, le somme consecutive prendono la forma di *somme normate* (p. 301)

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} X_{nk} = \frac{S_n}{b_n} - a_n \,, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

e il PLC assume la forma meno generale della *ricerca di tutte le possibili leggi limite delle somme normate, e delle condizioni di convergenza verso queste leggi limite.* Questo problema è stato affrontato (P. Lévy) inizialmente nel caso di v.a. *i.i.d.* (indipendenti e identicamente distribuite): è noto che se le varianze sono finite le leggi limite di somme normate sono normali; pertanto Lévy si è interessato del caso in cui le varianze non sono finite (le attese però devono esistere, anche se non è richiesto che siano finite). In questo caso giocano un ruolo importante le famiglie di *leggi stabili* (p. 338). Questa formulazione più ristretta del PLC ammette fra i tipi limite sia quello degenere che quello normale, ma quello di Poisson resta escluso: le somme di Poisson sono somme consecutive, ma non somme normate; anzi si può dimostrare che le leggi di Poisson non possono essere limiti di somme normate. Qui esamineremo innanzitutto la soluzione del *PLC nella versione più generale* dei limiti di somme consecutive, partendo inizialmente con l'esame preliminare del caso particolare di *varianze limitate*; solo successivamente prenderemo in considerazione il caso dei limiti di *somme normate*.

1.4 Soluzione del PLC per varianze limitate

Il caso generale del PLC per somme consecutive con varianze limitate (p.303) è una estensione del problema limite classico che consente già di recuperare il teorema di Poisson in una formulazione unitaria. Le X_{nk} saranno nel seguito v.a. indipendenti, di quadrato integrabile, *centrate sull'attesa* (cioè con attesa nulla), con f.d. F_{nk} e f.c. f_{nk}, e con *varianze limitate*, cioè con varianze finite σ^2_{nk} tali che

$$\max_k \sigma^2_{nk} \to 0 \,, \qquad \sum_k \sigma^2_{nk} \le c < +\infty \,, \ \forall n \,.$$

Le due richieste sono separatamente necessarie dato che non si implicano a vicenda. Se ad esempio si avesse

$$\sigma^2_{nk} = 1/\sqrt{n} \,, \qquad k = 1, \dots, n$$

risulterebbe $\max_k \sigma^2_{nk} \to 0$, mentre $\sum_k \sigma^2_{nk} = \sqrt{n}$ non sarebbe limitata superiormente da nessun c; se invece avessimo

$$\sigma^2_{n1} = 1 \,; \qquad \sigma^2_{nk} = 1/n^2 \,, \quad k \ge 2$$

ovviamente risulterebbe $\sum_k \sigma^2_{nk} = 1 + 1/n \le 2$ per ogni n, ma $\max_k \sigma^2_{nk} = 1$ non sarebbe infinitesimo. Si hanno allora i seguenti risultati:

Teorema 1.3. Rappresentazione di Kolmogorov: *La famiglia delle leggi limite di $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ coincide con la famiglia delle leggi di v.a. centrate sulle attese, con varianze finite e con f.c. della forma $f = e^{\psi}$, con*

$$\psi(u) = \int (e^{iux} - 1 - iux)\frac{1}{x^2}\, dK(x)$$

*dove K è una f.d.– a meno di una costante moltiplicativa – con variazione limitata; ψ determina K in modo unico e viceversa (*Lemma di unicità *p. 305).*

Teorema 1.4. Criterio di convergenza: *Se $\mathcal{L}(X)$ è una delle possibili leggi limite, si ha $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{L}(X)$ se e solo se $K_n \xrightarrow{w} K$ dove*[2]

$$K_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{x} y^2\, dF_{nk}(y)\,.$$

Se le v.a. X_{nk} non sono centrate il criterio di convergenza si modifica nel modo seguente: $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{L}(X)$ se e solo se $K_n \xrightarrow{w} K$ e $\sum_k a_{nk} \to \mathbf{E}X$ dove

$$K_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{x} y^2\, dF_{nk}(y + a_{nk})\,, \qquad a_{nk} = \mathbf{E}X_{nk}\,.$$

Sebbene non sia il caso più generale, questa soluzione del PLC contiene come casi particolari sia la convergenza normale che il teorema di Poisson:

- Il caso normale $\mathcal{N}(0,1)$ si ha con

$$\psi(u) = -\frac{u^2}{2}\,, \qquad K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- Il caso di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ si ha con

$$\psi(u) = \lambda(e^{iu} - 1)\,, \qquad K(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

In ambedue i casi il criterio di convergenza assume forme particolari (p. 307); nel caso della convergenza normale tale forma particolare si riconduce facilmente al criterio classico di Lyapounov.

[2]Se l'ipotesi di varianze limitate viene modificata richiedendo piuttosto che $\sum_k \sigma^2_{nk} \to \sigma^2_X$, allora la condizione $K_n \xrightarrow{w} K$ deve essere sostituita con $K_n \xrightarrow{c} K$, dove c indica la *convergenza completa* (p. 180)

1.5 Soluzione del PLC

Nel caso del PLC generale (p. 308) le difficoltà sorgono da due fatti: (I) non viene supposta l'esistenza neanche dei primi momenti: non è quindi possibile centrare alle attese; (II) le funzioni K non sono più in generale di variazione limitata. Le f.c. delle leggi limite, pertanto avranno una forma più complicata di quanto visto nel caso precedente. Un ruolo centrale è giocato qui dalle leggi *i.d.* (*infinitamente decomponibili o divisibili*, p. 308): una legge $\mathcal{L}$ con f.c. f è i.d. se, comunque scelto n, esistono n v.a. i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) X_{nk} $(k = 1, \dots, n)$ tali che $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$, ovvero $f = f_n^n$, dove f_n è la f.c. comune delle X_{nk}.

Se $f \neq 0$ basterà scegliere $f_n = f^{1/n} = e^{(\log f)/n}$. Si potrebbe pensare allora che ogni f.c. sia i.d. dato che basterebbe prendere $f_n = f^{1/n}$ per soddisfare la definizione. In realtà non è così: per dare senso a questa affermazione bisognerebbe mostrare innanzitutto che tali radici sono essenzialmente uniche[3] e poi che esse sono delle f.c. Si può mostrare che l'unicità delle radici è legata all'esistenza di zeri reali della f.c. f. Ne segue, ad esempio, che una distribuzione concentrata solo su un intervallo finito (una legge uniforme su un intervallo finito, o una distribuzione Beta) non è mai i.d.[4]: si vede infatti da semplici esempi che le loro f.c. hanno zeri reali. In secondo luogo bisognerebbe verificare che tutte le radici $f_n = f^{1/n}$ della data f.c. non solo sono ben definite, ma sono a loro volta ancora delle f.c. A questo scopo è utile ricordare il Teorema di Bochner-Khintchin[5] in base al quale una funzione continua con $f(0) = 1$ è un a f.c. se e solo se essa è semi-definita positiva. Pertanto in pratica occorrerà verificare che le $f_n = f^{1/n}$ non solo sono ben definite, ma sono anche semi-definite positive. Si noti inoltre che se una legge è i.d., tale risulta anche tutto il suo tipo (p.308): per questo motivo sarà in generale sufficiente studiare il caso di un solo rappresentante opportunamente scelto per ogni tipo di leggi.

I tipi degenere, normale e Poisson sono i.d., anzi si vede facilmente esaminando le f.c. che le leggi componenti sono dello stesso tipo delle leggi iniziali: $\mathcal{L}(a)$ si decompone in $\mathcal{L}(a/n)$, $\mathcal{N}(a, b^2)$ in $\mathcal{N}(a/n, b^2/n)$, e infine $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$ in $\mathcal{P}(\lambda/n; a/n, b)$. Nella discussione di queste propriet1 è ovviamente utile tenere presente il Teorema 1.2 di Composizione e Decomposizione. L'importanza delle leggi i.d. deriva dal fatto che *la famiglia delle leggi limite del PLC nella sua forma generale coincide con la famiglia delle leggi i.d.* In particolare si vede che le leggi limite trovate nel caso precedente con varianza limitata sono tutte i.d.

Elencheremo ora le proprietà principali delle leggi i.d.

---

[3] Vedi discussione su W.Feller An Introduction to Probability Theory and its Applications – II, p. 554.

[4] Vedi W.Feller An Introduction to Probability Theory and its Applications – II, p.177

[5] Vedi p.220, ma anche ad esempio A.N.Shiryayev Probability, p.285, e W.Feller An Introduction to Probability Theory and its Applications – II, p.622

Teorema 1.5. Teorema di struttura (p. 310): *Una f.c. è i.d. se e solo se è un limite di una successione di prodotti di f.c. di tipo Poisson.*

Se $X_{nk} \sim \mathcal{P}(\lambda_{nk})$ è una v.a. di Poisson, le v.a. di *tipo Poisson* sono le v.a.

$$a_{nk} + b_{nk}X_{nk} \sim \mathcal{P}(\lambda_{nk}; a_{nk}, b_{nk})$$

le cui f.c. f_{nk} sono tali che

$$\ln f_{nk}(u) = iua_{nk} + \lambda_{nk}(e^{iub_{nk}} - 1).$$

Il Teorema di struttura afferma che una legge $\mathcal{L}$ è i.d. se e solo se esistono v.a. di tipo Poisson (indipendenti per ogni n) tali che

$$\mathcal{L} = \lim_n \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{nk} + b_{nk}X_{nk})\right) .$$

In termini di f.c. questo vuol dire che, dette $f_n = f_{n1} \cdot \ldots \cdot f_{nn}$ le f.c. prodotto con

$$\ln f_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \big(iua_{nk} + \lambda_{nk}(e^{iub_{nk}} - 1)\big)$$

f è i.d. se e solo se esistono delle f_{nk} di tipo Poisson tali che $f_n \to f$.

Teorema 1.6. Teorema di Rappresentazione (A. Khintchin, pp. 313 e 310): *La famiglia delle f.c. i.d. coincide con la famiglia delle f.c. della forma e^{ψ} con*

$$\psi(u) = iu\alpha + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\Psi(x)$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$, Ψ f.d. a meno di una costante moltiplicativa, e $\Psi(-\infty) = 0$.

Teorema 1.7. Teorema di Unicità (p. 312): *C'è una corrispondenza uno a uno fra le ψ e le coppie (α, Ψ), per cui scriveremo anche $\psi = (\alpha, \Psi)$.*

Teorema 1.8. Teorema di Convergenza (p. 312): *Se $\alpha_n \to \alpha$ e $\Psi_n \xrightarrow{c} \Psi$, allora $\psi_n \to \psi$. Viceversa, se $\psi_n \to g$ continua nell'origine, allora $\alpha_n \to \alpha$ e $\Psi_n \xrightarrow{c} \Psi$ con $g = \psi = (\alpha, \Psi)$.*

Teorema 1.9. Teorema Limite Centrale (p. 321): *Se X_{nk} sono v.a. indipendenti e u.a.n., la famiglia di tutte le leggi limite delle $\mathcal{L}\left(\sum_k X_{nk}\right)$ coincide con la famiglia delle leggi i.d.*

Teorema 1.10. Criteri di convergenza (pp. 321 e 323): *Se $\mathcal{L}$ è una legge i.d. con $\psi = (\alpha, \Psi)$, e se X_{nk} sono v.a. indipendenti e u.a.n. le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *la successione* $\mathcal{L}\left(\sum_k X_{nk}\right)$ *converge ad* $\mathcal{L}$*;*

2. $\Psi_n \xrightarrow{c} \psi$ *e* $\alpha_n \to \alpha$ *dove, con* $\tau > 0$ *finito e fissato arbitrariamente, abbiamo posto:*

$$
\begin{aligned}
a_{nk} &= \int_{|x|<\tau} x\,dF_{nk}\,, \qquad \overline{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk}) \\
\alpha_n &= \sum_k \left(a_{nk} + \int \frac{x}{1+x^2}\, d\overline{F}_{nk} \right) \\
\Psi_n(x) &= \sum_k \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2}\, d\overline{F}_{nk}
\end{aligned}
$$

3. *in ogni punto di continuità* $x \neq 0$ *di* Ψ

$$
\begin{aligned}
\sum_k F_{nk}(x) \quad &\to \quad \int_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2}, d\Psi\,, \qquad x<0 \\
\sum_k [1 - F_{nk}(x)] \quad &\to \quad \int_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2}, d\Psi\,, \qquad x>0
\end{aligned}
$$

al limite prima per $n \to \infty$ *e poi per* $\epsilon \to 0$

$$
\sum_k \left[\int_{|x|<\epsilon} x^2\, dF_{nk} - \left(\int_{|x|<\epsilon} x\, dF_{nk} \right)^2 \right] \to \Psi(0^+) - \Psi(0^-)
$$

per una dato $\tau > 0$ *tale che* $\pm\tau$ *sono punti di continuità di* Ψ

$$
\sum_k \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk} \to \alpha + \int_{|x|<\tau} x\, d\Psi - \int_{|x|\geq\tau} \frac{1}{x}\, d\Psi
$$

Passeremo ora ad enunciare i criteri di convergenza relativi ai tre tipi classici di leggi limite (p. 327); nel seguito useremo la notazione per attese e varianze *troncate*:

$$
\begin{aligned}
a_{nk}(\tau) \quad &= \quad \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk} \\
\sigma^2_{nk}(\tau) \quad &= \quad \int_{|x|<\tau} x^2\, dF_{nk} - \left(\int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk} \right)^2
\end{aligned}
$$

Iniziamo con l'osservare che la *legge normale* $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$ è i.d. con $\psi = (\alpha, \Psi)$ dato da

$$
\psi(u) = iu\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\, u^2\,, \qquad \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ \sigma^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}
$$

Anche la *legge di Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ è i.d. con $\psi = (\lambda/2, \Psi)$ dato da

$$\psi(u) = \lambda(e^{iu} - 1)\,, \qquad \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ \lambda/2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Infine la *legge degenere* $\mathcal{L}(0) = \mathcal{N}(0,0)$ è un caso particolare di legge normale.

Teorema 1.11. Criterio di convergenza normale (p. 328): *Se X_{nk} sono v.a. indipendenti, allora per ogni $\epsilon > 0$*

$$\mathcal{L}\left(\sum_k X_{nk}\right) \to \mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)\,, \quad e \quad \max_k \mathbf{P}(|X_{nk}| \geq \epsilon) \to 0$$

se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ e $\tau > 0$ si ha

1. $\sum_k \mathbf{P}(|X_{nk}| \geq \epsilon) \to 0$

2. $\sum_k \sigma^2_{nk}(\tau) \to \sigma^2\,, \quad \sum_k a_{nk}(\tau) \to \alpha$

Corollario 1.12. (p. 328) *Se X_{nk} sono v.a. indipendenti e $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ converge, allora la legge limite è normale e la condizione u.a.n. è soddisfatta se e solo se* $\max_k |X_{nk}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Teorema 1.13. Criterio di convergenza di Poisson (p. 329): *Se X_{nk} sono v.a. indipendenti e u.a.n. allora $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{P}(\lambda)$ se e solo se per ogni $\epsilon \in (0,1)$ e $\tau \in (0,1)$ si ha*

$$\sum_k \int_{|x|\geq\epsilon, |x-1|\geq\epsilon} dF_{nk} \to 0\,, \quad e \quad \sum_k \int_{|x-1|<\epsilon} dF_{nk} \to \lambda$$
$$\sum_k \sigma^2_{nk}(\tau) \to 0\,, \quad e \quad \sum_k a_{nk}(\tau) \to 0$$

Teorema 1.14. Criterio di convergenza degenere (p. 329): *Se X_{nk} sono v.a. indipendenti allora $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{L}(0)$ e la condizione u.a.n. è soddisfatta se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ e $\tau > 0$ si ha*

$$\sum_k \int_{|x|\geq\epsilon} dF_{nk} \to 0$$
$$\sum_k \sigma^2_{nk}(\tau) \to 0\,, \quad \sum_k a_{nk}(\tau) \to 0$$

Corollario 1.15. (p. 329) *Se X_k sono v.a. indipendenti, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e $b_n \uparrow \infty$, allora $\mathcal{L}(S_n/b_n) \to \mathcal{L}(0)$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$*

$$\sum_k \int_{|x|\geq\epsilon b_n} dF_k \to 0$$

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_k \left[\int_{|x|<b_n} x^2\,dF_k - \left(\int_{|x|<b_n} x\,dF_k\right)^2\right] \to 0$$

$$\frac{1}{b_n}\sum_k \int_{|x|<b_n} x\,dF_k \to 0$$

Corollario 1.16. (p. 330) *Se X_k sono v.a. indipendenti e $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, allora $\mathcal{L}(S_n/n) \to \mathcal{L}(0)$ se e solo se*

$$\sum_k \int_{|x|\geq n} dF_k \to 0$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_k \left[\int_{|x|<n} x^2\,dF_k - \left(\int_{|x|<n} x\,dF_k\right)^2\right] \to 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_k \int_{|x|<n} x\,dF_k \to 0$$

Può succedere che, in condizioni di u.a.n., la successione $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ non converge, ma esiste una opportuna successione di numeri a_n tali che $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n)$ converga. Così avviene, ad esempio, nel TLC classico con $X_{nk} = X_k/s_n = X_k/\sigma\sqrt{n}$ dove è necessario centrare le somme consecutive per evitare che divergano. In questi casi si mostra (p. 322) che tutte e sole le leggi limite di $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n)$ sono le leggi i.d., e si introducono *formulazioni estese* sia del Teorema Limite Centrale (p. 322) che dei criteri di convergenza (p. 326).

1.6 Somme normate

Nel caso delle *somme normate* assume un ruolo fondamentale il concetto di *leggi auto-decomponibili* (a.d.), e nel caso ancora più particolare di addendi *i.i.d.* (indipendenti e identicamente distribuiti) di *leggi stabili*. Nel seguito (p. 331) le X_k saranno v.a. indipendenti con f.d. F_k e f.c. f_k (quindi non sono in generale i.i.d.); $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ sono somme consecutive e date le successioni numeriche a_n e $b_n > 0$ la

$$\frac{S_n}{b_n} - a_n$$

è la successione di somme normate con f.d. G_n e f.c.

$$g_n(u) = e^{-iua_n}\prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{u}{b_n}\right).$$

Se le $X_{nk} = X_k/b_n$ sono u.a.n. si applica il TLC esteso e le leggi limite delle somme normate formano una famiglia $\mathfrak{N}$ di leggi i.d. Si noti che in base al Teorema sulla convergenza dei tipi è sempre possibile trovare a_n e $b_n > 0$ in modo che le somme normate convergano verso una legge degenere e, d'altra parte, tutte le leggi degeneri appartengono ad $\mathfrak{N}$. Pertanto per evitare casi triviali escluderemo dalle nostre considerazioni le leggi limite degeneri.

Non riporteremo per brevità le condizioni per l'esistenza e la determinazione delle successioni normanti a_n e $b_n > 0$ (p. 332) e passeremo direttamente alla caratterizzazione della famiglia $\mathfrak{N}$ (p. 334). Introduciamo a questo scopo il concetto di *leggi a.d.* (*auto-decomponibili*): una legge f si dice a.d. quando per ogni $c \in (0,1)$ esiste una f.c. f_c tale che

$$f(u) = f(cu)\, f_c(u)$$

Tra la leggi a.d. non compare il tipo di Poisson: questo non contraddice il Teorema 1.2 di Composizione e Decomposizione. Infatti da quel teorema sappiamo che se una generica $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$ si decompone in due altre leggi, queste devono necessariamente essere ancora di Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1; a_1, b_1)$ e $\mathcal{P}(\lambda_2; a_2, b_2)$ con le condizioni

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda\,, \qquad a_1 + a_2 = a\,, \qquad b_1 = b_2 = b\,.$$

Tali condizioni sono però incompatibili con le proprietà delle leggi a.d. Infatti la f.c. di $\mathcal{P}(\lambda; a, b)$ è

$$f(u) = e^{iau+\lambda(e^{ibu}-1)}\,;$$

se questa fosse a.d. la prima componente $\mathcal{P}(\lambda_1; a_1, b_1)$ dovrebbe avere f.c.

$$f(cu) = e^{icua+\lambda(e^{icub}-1)}$$

cioè dovrebbe avere $\lambda_1 = \lambda\,,\ a_1 = ac\,,\ b_1 = bc\,$. Pertanto innanzitutto si avrebbe $b_1 = bc < b$ (dato che $c < 1$) e non $b_1 = b\,$; inoltre bisognerebbe supporre che la seconda componente $\mathcal{P}(\lambda_2; a_2, b_2)$ abbia $\lambda_2 = 0$ il che è ovviamente impossibile. Questa situazione è infine confermata dall'Osservazione a p. 338 secondo la quale i criteri di auto-decomponibilità escludono le leggi di Poisson.

Teorema 1.17. Criterio di auto-decomponibilità (p. 335): *Una legge appartiene ad $\mathfrak{N}$ se e solo se è a.d. Una legge a.d. f e le sue componenti f_c sono sempre i.d.*

Teorema 1.18. Criterio Ψ (p. 336): *Le leggi a.d. sono leggi i.d. tali che su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ la funzione Ψ possieda derivate destre e sinistre (denotate indifferentemente Ψ') e*

$$\frac{1+x^2}{x}\,\Psi'(x)$$

è non crescente.

Il fatto che, come visto, le leggi di Poisson corrispondono a funzioni Ψ discontinue in qualche $x \neq 0$, costituisce un'ulteriore ragione che spiega perché esse non appartengano alla famiglia $\mathfrak{N}$: questo è il motivo per cui esse sono rimaste trascurate per tutto il tempo in cui la ricerca si è orientata verso le leggi limite di somme normate.

1.7 Somme normate di v.a. i.i.d. Leggi stabili

La prima famiglia $\mathfrak{N}_{\mathfrak{I}}$ di leggi limite di somme normate esaminate da P. Lévy è quella delle leggi limite di somme i.i.d. In questo caso le X_k hanno tutte la stessa f.c. f_0 e quindi le f.c. delle somme normate sono del tipo

$$g_n(u) = e^{-iua_n} f_0^n\left(\frac{u}{b_n}\right)$$

Naturalmente $\mathfrak{N}_{\mathfrak{I}} \subset \mathfrak{N}$. Per caratterizzare $\mathfrak{N}_{\mathfrak{I}}$ si introduce il concetto di *leggi stabili* (p. 338): una legge f è stabile se per ogni $b > 0$ e $b' > 0$ esistono a e $b'' > 0$ tali che

$$f(b''u) = e^{iua} f(bu) f(b'u) \,. \tag{1.1}$$

Praticamente si tratta di leggi a.d. con componenti della forma

$$f_c(u) = e^{iau/b''} f(c'u)$$

calcolate a partire dalla stessa legge f di partenza. Infatti sostituendo $b''u$ con u e ponendo $c = b/b''$ e $c' = b'/b''$ la (1.1) diviene

$$f(u) = e^{iua/b''} f(cu) f(c'u) = f(cu) f_c(u)$$

Da un altro punto di vista si può dire che una legge $\mathcal{L}$ è stabile se date due v.a. X e X', indipendenti e distribuite come $\mathcal{L}$, per ogni $b > 0$ e $b' > 0$ la legge della v.a. $bX + b'X$ è ancora dello stesso tipo di $\mathcal{L}$. Il Criterio di auto-decomponibilità e il Criterio Ψ prendono ora una nuova forma da cui si ricava in particolare l'importante risultato secondo il quale le f.c. delle leggi stabili sono esprimibili in termini di funzioni elementari:

Teorema 1.19. Criterio di stabilità (p. 339): *Una legge appartiene ad $\mathfrak{N}_{\mathfrak{I}}$ se e solo se è stabile. Una f.c. è stabile se e solo se con $\gamma \in (0, 2]$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $b \geq 0$ e $|c| < 1$ si ha*

$$\log f(u) = \psi(u) = \begin{cases} i\alpha u - b|u|^\gamma \left(1 + ic\frac{u}{|u|}\tan\frac{\pi}{2}\gamma\right) & \text{se } \gamma \neq 1, \\ i\alpha u - b|u| \left(1 + ic\frac{u}{|u|}\frac{2}{\pi}\log|u|\right) & \text{se } \gamma = 1. \end{cases}$$

Si osservi che quando $\gamma = 2$ si ottengono leggi di tipo normale, e inoltre che le f.c. stabili e reali sono tutte della forma

$$e^{-b|u|^\gamma}\,, \qquad 0 < \gamma \leq 2\,.$$

1.8 Rappresentazione di Lévy

Finora per i logaritmi delle f.c. i.d. abbiamo usato la rappresentazione di A. Khintchin

$$\psi(u) = iu\alpha + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \, d\Psi(x)$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$, Ψ f.d. a meno di una costante moltiplicativa, e $\Psi(-\infty) = 0$. La rappresentazine originariamente usata da P. Lévy invece è differente (p. 343): essa individua la funzione $\psi = \log f$ mediante una terna (α, β^2, L) e

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= iu\alpha - \frac{\beta}{2} u^2 + ⨍ \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) dL(x) \\
&= iu\alpha - \frac{\beta}{2} u^2 + \lim_{\delta \to 0} \int_{|x|>\delta} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) dL(x)
\end{aligned}$$

dove α, $\beta \in \mathbf{R}$, e la *funzione di Lévy* $L(x)$ è definita su $\mathbf{R} - \{0\}$, è non decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$ con $L(\pm\infty) = 0$ e

$$⨍_{-x}^{x} y^2 \, dL(y) < +\infty$$

per qualche (e quindi per ogni) $x > 0$ finito. Questa rappresentazione (benché più complicata da formulare) è centrale nella discussione dei *processi decomponibili* (cioè *ad incrementi indipendenti*) alla quale è storicamente associata. Per questo motivo, inoltre, essa ha un significato probabilistico diretto (vedi il Teorema di decomponibilità continua nella successiva Sezione 2.2). Siccome si ha per $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} &= \left(1 + iux - \frac{u^2x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \\
&= iux - \frac{u^2}{2}(1+x^2) + o(x^2)\frac{1+x^2}{x^2} \longrightarrow -\frac{u^2}{2}
\end{aligned}$$

la corrispondenza fra le due rappresentazioni (p. 344) è data dalle relazioni

$$\begin{aligned}
\Psi(0^+) - \Psi(0^-) &= \beta^2 \\
\frac{1+x^2}{x^2} \, d\Psi(x) &= dL(x) \,, \qquad x \neq 0
\end{aligned}$$

ovvero, con $x > 0$,

$$\begin{aligned}
L(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{1+y^2}{y^2} \, d\Psi(y) \,, \qquad & L(x) &= \int_{+\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} \, d\Psi(y) \\
\Psi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{y^2}{1+y^2} \, dL(y) \,, \qquad & \Psi(x) &= \beta^2 + \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} \, dL(y)
\end{aligned}$$

e inoltre i due insiemi $C(L)$ e $C(\Psi)$ dei punti di continuità delle due misure sono gli stessi su $\mathbf{R} - \{0\}$. Tutto quanto affermato finora in termini di misura di Khintchin può essere riformulato equivalentemente in termini di misura di Lévy (p. 344 e seguenti). In particolare si noti che le *funzioni di Lévy delle leggi stabili* assumono le seguenti forme particolari (p. 345)

$$\begin{cases} \gamma = 2 & L = 0, & \text{legge normale,} \\ 0 < \gamma < 2 & \begin{cases} dL(x) = \beta|x|^{-\gamma-1}\,dx & \text{per } x < 0, \\ dL(x) = \beta'|x|^{-\gamma-1}\,dx & \text{per } x > 0, \end{cases} & \text{altri casi.} \end{cases}$$

e quindi per $0 < \gamma < 2$ le funzioni di Lévy delle leggi stabili sono

$$L(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\gamma}|x|^{-\gamma} & \text{per } x < 0, \\ -\frac{\beta'}{\gamma}|x|^{-\gamma} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

1.9 Soluzione del PLC per v.a. i.i.d.

Tornando al caso generale delle somme consecutive non normate è istruttivo esaminare la forma presa dalla soluzione del PLC nel caso in cui, per ogni fissato n, le X_{nk} con $k = 1, \ldots, n$ sono i.i.d. Osserviamo che si tratta di un caso diverso sia da quello con varianze limitate, che da quello delle somme normate. In particolare nel caso delle somme normate le X_{nk} non sono aggiornate per ogni diverso valore di n, come invece avviene in generale. Ad esempio: nel caso generale le v.a. X_{11} e X_{21} (con n differenti) possono essere del tutto diverse, mentre nel caso delle somme normate

$$X_{nk} = \frac{X_k}{b_n} - \frac{a_n}{n}\,; \qquad X_{11} = \frac{X_1}{b_1} - a_1\,, \quad X_{21} = \frac{X_1}{b_2} - \frac{a_2}{2}\,,$$

pe cui X_{11} e X_{21} risultano essere per lo meno dello stesso tipo. Nel caso in questione, siccome le X_{nk} con $k = 1, \ldots, n$ sono i.i.d., invece di avere delle f.c. f_{nk} distinte, esse avranno un'unica f_n comune a tutte le v.a. con lo stesso n, mentre le somme consecutive $\sum_k X_{nk}$ avranno come f.c. f_n^n.

Bisogna introdurre a questo punto (p. 347) il concetto di *legge di Poisson composta* (λ, f): supponiamo di considerare una successione X_k di v.a. i.i.d. tutte con f.d. F e f.c. f, e una v.a. N con legge di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chiameremo legge di Poisson composta (λ, f) la legge della v.a.

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k\,.$$

Posto allora $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ($S_0 = 0$), con f.d. $F_{S_n} = F^{*n}$ e f.c. $f_{S_n} = f^n$, è evidente che

$$\mathbf{P}(S \le x \,|\, N = n) = F_{S_n}(x)$$

per cui si ha

$$F_S = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F_{S_n}\,, \qquad f_S = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^n = e^{\lambda(f-1)}\,.$$

Si noti che se $X_k = 1$, $\mathbf{P}$-q.o. per $k = 1, 2, \ldots$, si ha $S = N$, e la legge di Poisson composta degenera nella legge di Poisson usuale. In altre parole la legge di Poisson composta (λ, e^{iu}) coincide con $\mathcal{P}(\lambda)$. Se invece $N(t)$ è un processo di Poisson con $\lambda = \alpha t$, $S(t)$ sarà un *processo di Poisson composto* $(\alpha t, f)$: intuitivamente si tratta di un processo di Poisson ordinario al quale, però, ad ogni istante aleatorio viene aggiunta non la quantità deterministica 1, ma una v.a. X_k. Le traiettorie di tale processo sono sempre a scalini, ma i salti hanno una altezza aleatoria, in generale anche negativa, che segue la legge F delle X_k. Una legge di Poisson composta (λ, f) è sempre i.d. dato che $f^{1/m} = e^{\frac{\lambda}{m}(f-1)}$ è ancora una legge di Poisson composta $(\lambda/m, f)$ per ogni m. Naturalmente anche le leggi centrate $e^{-iua+\lambda(f-1)}$ sono i.d.

Teorema 1.20. Corollario di struttura (p. 348): *f è i.d. se e solo se esistono delle leggi di Poisson composte f_n tali che $f_n^n \to f$.*

Si ricordi che qui non siamo nel caso dei limiti di somme normate: sebbene per ogni n la legge di Poisson composta f_n rappresenti una somma di v.a. i.i.d., nella successione delle f_n tali v.a. possono cambiare. Così ad esempio le prime n v.a. che compongono f_{n+1} non sono necessariamente eguali alle n v.a. che compongono f_n. Il passo $n+1$-mo non si ottiene semplicemente sommando la v.a. $n+1$-ma a quel che precede: tutto passa per una revisione anche delle precedenti n v.a. Inoltre anche che il Teorema di Struttura 1.5 (p. 310) fa un'affermazione analoga, ma in quel caso gli addendi delle somme consecutive non erano in generale identicamente distribuiti. Si noti infine che questo Corollario è un allargamento della definizione di leggi i.d. Infatti se una legge f è infinitamente divisibile allora $f = f_n^n$ per ogni n e quindi anche $f_n^n \to f$; il viceversa però non è in generale vero.

Teorema 1.21. Criterio centrale di convergenza per v.a. i.i.d. (p. 348): *Siano X_{nk}, $k = 1, \ldots, n$, delle v.a. i.i.d. con f.d. F_n e f.c. $f_n \to 1$; sia inoltre $\mathcal{L}(X)$ una legge i.d. con $\psi = (\alpha, \beta^2, L)$. Allora $\mathcal{L}\left(\sum_k X_{nk} - a_n\right) \to \mathcal{L}(X)$ se e solo se:*

(C_L) $L_n \xrightarrow{w} L$ dove, con $x > 0$, si ha

$$L_n(-x) = nF_n(-x)\,, \qquad L_n(x) = n(F_n(x) - 1)\,;$$

(C_{β^2}) per $n \to \infty$ e successivamente per $x \to 0$ si ha

$$n \int_{-x}^{x} y^2\, dF_n(y) \to \beta^2\,;$$

(C_α) $a_n = \alpha_n - \alpha + o(1)$ dove

$$\alpha_n = n \int \frac{x}{1+x^2}\, dF_n(x)\,.$$

1.10 Esempi

Il *tipo normale* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ è caratterizzato da

$$\psi(u) = \log f(u) = imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\,.$$

La sua rappresentazione di Khintchin è

$$\alpha = m\,, \qquad \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0, \\ \sigma^2 & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Infatti per $x \to 0$ si ha

$$\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2} \to -\frac{u^2}{2}\,,$$

mentre, nel senso delle distribuzioni, $d\Psi(x) = \sigma^2\delta(x)\,dx$, per cui

$$i\alpha u + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\Psi(x) = imu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\,.$$

La rappresentazione di Lévy si ricava allora facilmente ed è

$$\alpha = m\,, \qquad \beta = \sigma^2\,, \qquad L(x) = 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0\,.$$

Ricordiamo che il tipo normale, oltre ad essere i.d. è anche stabile: paragonando infatti la sua f.c. con quella tipica delle leggi stabili si vede subito che le leggi normali sono stabili con $\gamma = 2$.

Il *tipo di Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$, è noto per essere i.d. ma non stabile. Il logaritmo della sua f.c. è

$$\psi(u) = \log f(u) = \lambda(e^{iu} - 1)\,,$$

e la sua rappresentazione di Khintchin è

$$\alpha = \frac{\lambda}{2}\,, \qquad \Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1, \\ \lambda/2 & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

Infatti siccome $d\Psi(x) = \frac{\lambda}{2}\delta(x-1)\,dx$ si ha ora

$$i\alpha u + \int \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\Psi(x) = \lambda(e^{iu} - 1)\,.$$

La sua rappresentazione di Lévy è invece

$$\alpha = \frac{\lambda}{2}\,, \qquad \beta = 0\,, \qquad L(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0, \\ -\lambda & \text{per } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{per } 1 < x, \end{cases}$$

come si vede applicando le regole di corrispondenza con $d\Psi(x) = \frac{\lambda}{2}\delta(x-1)\,dx$. Sulla base di queste considerazioni possiamo ora provare ad applicare il Criterio centrale di convergenza per v.a. i.i.d. (Teorema 1.21, p. 348) per ricavare come caso particolare la forma classica del Teorema di Poisson:

Teorema 1.22. TEOREMA CLASSICO DI POISSON: *Se X_{nk} sono v.a. i.i.d. tutte di Bernoulli con $p_n = \lambda/n$, allora le leggi delle somme consecutive $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) = \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ sono tutte leggi binomiali, e $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk}) \to \mathcal{P}(\lambda)$.*

Si ha infatti in questo caso che le f.d. e le f.c. delle X_{nk} sono quelle tipiche delle leggi di Bernoulli

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 - \frac{\lambda}{n} & \text{per } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{per } 1 \le x \end{cases}, \qquad f_n(u) = \frac{\lambda}{n}e^{iu} + 1 - \frac{\lambda}{n} \to 1\,,$$

per cui le condizioni del Criterio centrale di convergenza per v.a. i.i.d. divengono

(C_L) la convergenza $L_n \xrightarrow{w} L$ è garantita dal fatto che per ogni n

$$L_n(x) = \begin{cases} nF_n(x) & \text{per } x < 0 \\ n(F_n(x) - 1) & \text{per } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ -\lambda & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{per } 1 \le x \end{cases} = L(x)\,;$$

(C_{β^2}) siccome $dF_n(x) = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\delta(x) + \frac{\lambda}{n}\delta(x-1)\right] dx$, per $n \to \infty$ e successivamente per $x \to 0$ si ha

$$n\int_{-x}^{x} y^2\,dF_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ \lambda & \text{per } x > 1 \end{cases} \longrightarrow \beta^2 = 0\,;$$

(C_α) infine $a_n = 0$ dato che come nel punto precedente

$$\alpha_n = n\int \frac{x}{1+x^2}\,dF_n(x) = \frac{\lambda}{2} = \alpha\,.$$

1.11 Domini di attrazione

Esamineremo ora in maggior dettaglio le proprietà delle leggi limite stabili già introdotte nei paragrafi precedenti. Siano le X_k con $k = 1, 2, \ldots$ delle v.a. i.i.d. con legge comune $\mathcal{L}(X)$, f.d. F e f.c. f; sia inoltre $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, e poniamo infine[6],

[6] Si noti che qui adottiamo la convenzione secondo cui $F(x) = \mathbf{P}(X \le x)$, mentre sul libro di M.Loève si usa la convenzione opposta $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$. Questo non dovrebbe condurre a malintesi visto che tutto è qui espresso in termini di f.d., mentre le definizioni in termini di probabilità e attese sono qui introdotte solo per rendere i concetti più intuitivi.

con $x > 0$ (p.360)

$$\begin{aligned} q(x) &= 1 - \mathbf{P}(-x < X \leq x) = 1 - F(x) + F(-x)\,, \\ \mu_2(x) &= \mathbf{E}\left(X^2 I_{(-x,x]}(X)\right) = \int_{-x}^{x} y^2\, dF(y)\,. \end{aligned}$$

Siamo quindi nel caso in cui le somme consecutive si ottengono aggiungendo ogni volta un termine alle somme precedenti: $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, senza passare attraverso una ridefinizione delle v.a. $X_1, \ldots, X_n$. Si noti che ovviamente $q(+\infty) = 0$; invece $\mu_2(+\infty)$ può anche divergere verso $+\infty$. Se però $\mu_2(+\infty) < +\infty$ allora $\mu_2(+\infty)$ è il secondo momento di X: in sostanza $\mu_2(x)$ è il secondo momento troncato.

Diremo (p. 360) che la legge $\mathcal{L}(X)$ appartiene al *dominio di attrazione* della legge $\mathcal{L}(Y)$ (*legge attrattiva*) quando esistono due successioni a_n, e $b_n > 0$ tali che

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{b_n} - a_n\right) \to \mathcal{L}(Y)\,.$$

Naturalmente questa definizione si applica piuttosto ai tipi di leggi, e non alle leggi individuali. Dal novero delle leggi attrattive, però, riterremo escluso il caso triviale delle leggi degeneri. Infatti è noto dal Teorema sulla convergenza dei tipi che, con un'opportuna scelta di a_n e b_n, ogni legge $\mathcal{L}(X)$ appartiene al dominio di attrazione di una legge degenere. In termini di f.c. il fatto che la legge $\mathcal{L}(X)$ appartiene al dominio di attrazione della legge $\mathcal{L}(Y)$ non degenere significa che

$$e^{iua_n} f^n\left(\frac{u}{b_n}\right) \to f_Y(u)\,.$$

Si dimostra inoltre che (p. 360) se $\mathcal{L}(S_n/b_n - a_n) \to \mathcal{L}(Y)$ non degenere, allora $b_n \to +\infty$ e $b_n/b_{n+1} \to 1$. Abbiamo già visto che le leggi attrattive coincidono con le *leggi stabili* $\mathcal{L}(X)$. Siccome queste possono anche essere caratterizzate (p. 363) dal fatto che esistono due successioni a_n e b_n tali che

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{b_n} - a_n\right) = \mathcal{L}(X)\,;$$

si vede subito che le leggi stabili sono attratte da esse stesse. Abbiamo anche visto che le leggi stabili sono individuate tramite funzioni di Lévy L_γ di forma ben determinata dipendente da un solo parametro $0 < \gamma \leq 2$. Il caso $\gamma = 2$ è associato con $L_2 = 0$ e rappresenta il caso gaussiano; tutti gli altri casi hanno $0 < \gamma < 2$. Ricordiamo anche (p. 363) che quando $\mu_2(+\infty) < +\infty$ (cioè nel caso di varianza finita) le somme normate convergono verso il tipo normale. Pertanto altri tipi di leggi attrattive sono possibili solo se $\mu_2(+\infty) = +\infty$.

Per enunciare il Criterio di stabilità e di attrazione è necessario introdurre le seguenti definizioni (J. Karamata 1930; p. 354): diremo che una funzione $V(x)$ positiva e monotona su $[0, +\infty)$ *varia lentamente a* $+\infty$ quando

$$\frac{V(tx)}{V(t)} \to 1\,, \qquad t \to +\infty\,, \quad \text{per ogni } x > 0\,;$$

diremo invece che una funzione $U(x)$ positiva e monotona su $[0, +\infty)$ *varia regolarmente a* $+\infty$ *con esponente* $a \in \mathbf{R}$ quando $U(x) = x^a V(x)$ con $V(x)$ che varia lentamente.

Teorema 1.23. Criterio di stabilità e di attrazione (p.364):

(I) *La famiglia delle leggi attrattive non degeneri coincide con quella delle leggi stabili non degeneri. Queste sono leggi i.d. con* $\psi_\gamma = (\alpha, \beta_\gamma^2, L_\gamma)$ *e* $0 < \gamma \leq 2$, *dove:*

- *per* $\gamma = 2$ *si ha* $\beta_2^2 > 0$, *e* $L_2 = 0$;
- *per* $0 < \gamma < 2$ *si ha*

$$\beta_\gamma^2 = 0\,, \qquad L_\gamma(x) = \begin{cases} cp/|x|^\gamma & \text{se } x < 0, \\ -cq/|x|^\gamma & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

dove $c > 0$, $p, q \geq 0$ *e* $p + q = 1$.

Nel seguito indicheremo anche le funzioni di Lévy per $0 < \gamma < 2$ *con la notazione* $L_\gamma(c, p)$.

(II) $\mathcal{L}(X)$ *è attratta da una* $\mathcal{L}_\gamma$ *con* $\gamma \in (0, 2]$ *se e solo se*

$$\frac{x^2 q(x)}{\mu_2(x)} \to \frac{2-\gamma}{\gamma}\,, \qquad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

(III) $\mathcal{L}(X)$ *è attratta da una* $\mathcal{L}_\gamma$ *con* $L_\gamma(c, p)$ *se e solo se*

- *per* $0 < \gamma < 2$

$$\frac{F(-x)}{q(x)} \to p\,, \qquad q(x) = c(1 + o(1))\frac{h(x)}{x^\gamma}\,, \qquad \text{per } x \to +\infty$$

  dove $h(x)$ *varia lentamente, e le* b_n *ammissibili sono caratterizzate da* $nq(b_n) \to c$ *per* $n \to \infty$;
- *per* $\gamma = 2$ $\mu_2(x)$ *varia lentamente, e le* b_n *ammissibili sono caratterizzate da* $n\mu_2(b_n)/b_n^2 \to \beta_2^2 > 0$ *per* $n \to \infty$;

e in ogni caso le a_n *ammissibili sono caratterizzate da* $a_n = \alpha_n - \alpha + o(1)$ *dove*

$$\alpha_n = n \int \frac{x}{1 + x^2}\, dF(b_n x)\,.$$

Capitolo 2

Processi Decomponibili

2.1 Analisi aleatoria

Adotteremo le seguenti definizioni (p. *164*): con $T \subseteq \mathbf{R}$, chiameremo *funzione aleatoria* (f.a.) una famiglia $X_T = (X_t, t \in T)$ di v.a. e *processo stocastico* (p.s.) una classe di f.a. con leggi condizionate comuni. Chiameremo *legge di evoluzione* di una f.a. la sua legge condizionata per date condizioni iniziali $\mathcal{L}(X_T|X_{t_0})$ con $t_0 \in T$. Pertanto un p.s. sarà la classe di tutte le f.a. con la stessa legge di evoluzione $\mathcal{L}(X_T|X_{t_0})$ e al variare delle condizioni iniziali: ad ogni condizione iniziale X_{t_0} corrisponde una f.a. del processo. Diremo inoltre che un processo è *regolare* quando esiste una probabilità condizionata regolare per gli eventi definiti sul processo.

In base alla dipendenza funzionale che viene messa in evidenza ci sono tre possibili definizioni di f.a.

1. **Definizione-t**: *una f.a. X_T è una applicazione da T nello spazio $\mathcal{R}$ delle v.a. definite su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$: questa definizione (p. *164*) mette in evidenza l'argomento t nel senso che ad ogni t viene associata una v.a. $X_t = (X_t(\omega), \omega \in \Omega)$. Queste v.a. prendono valori in uno spazio $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ detto *spazio degli stati* della f.a. Per il seguito $\mathcal{X}$ sarà un Boreliano di $\mathbf{R}$. Si possono quindi introdurre (p. *167*) le proprietà analitiche di X_T in termini dei corrispondenti limiti (q.o., in probabilità o in media p-ma) di v.a. in $\mathcal{R}$. In particolare si può parlare di *continuità*, secondo il particolare tipo di convergenza considerato, se $X_s \to X_t$ per $s \to t$, per ogni t (nel seguito questa ultima precisazione verrà usualmente sottintesa). Analogamente (p. *165*) diremo che due f.a. X_T e $\tilde{X}_T$ sono *equivalenti* se $X_t = \tilde{X}_t$ q.o. per ogni $t \in T$.

2. **Definizione-ω**: *una f.a. X_T è una applicazione misurabile da* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *nello spazio misurabile delle traiettorie (campioni)* $(\mathcal{X}_T, \mathcal{S}_T)$: questa definizione (p. *167*) mette in evidenza l'argomento ω nel senso che ad ogni ω viene associata una *traiettoria* $x_t = (X_t(\omega), t \in T)$. In questo caso si introduce quindi lo *spazio dei campioni* $(\mathcal{X}_T, \mathcal{S}_T)$ della f.a. ottenuto come spazio prodotto di copie

$(\mathcal{X}_t, \mathcal{S}_t)$ dello spazio degli stati $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$. Si prova facilmente che le due definizioni presentate sono equivalenti. Nell'ambito della definizione-ω le proprietà analitiche delle f.a. sono date in termini delle proprietà delle traiettorie. Così ad esempio una f.a. è *ω–continua* q.o. quando quasi tutte le traiettorie sono continue per ogni t. Analogamente diremo che due f.a. sono *q.o. ω–uguali* (o *indistinguibili*) (p. *165*) quando quasi tutte le traiettorie delle due f.a. sono coincidenti per ogni $t \in T$.

3. **Definizione-$\boldsymbol{m}$**: *Una f.a. $(\mathcal{F} \times \mathcal{T})$–misurabile X_T è una applicazione misurabile da $(\Omega \times T, \mathcal{F} \times \mathcal{T})$ nello spazio degli stati $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$*; qui $\mathcal{T}$ è una σ-algebra di parti di T (p. *168*). Si vede facilmente che una f.a. $(\mathcal{F} \times \mathcal{T})$–misurabile è una f.a. nel senso delle due definizioni precedenti, e in più le sue traiettorie sono $\mathcal{T}$-misurabili. Una f.a. misurabile è una *f.a. di Borel* se T è un Boreliano e $\mathcal{T}$ è la sua σ-algebra di Borel.

In generale le proprietà date mediante la definizione-ω sono più forti delle corrispondenti proprietà date nell'ambito della definizione-t, nel senso che *le ω–proprietà implicano le t–proprietà, ma in generale il viceversa non è vero.* Così, se due f.a. sono equivalenti (definizione-t), comunque scelto $t \in T$ esse differiscono solo su un insieme trascurabile N_t; invece per essere indistinguibili (definizione-ω) le loro traiettorie dovrebbero coincidere per ogni $t \in T$ tranne che su un insieme trascurabile: ora se le due f.a. sono equivalenti le loro traiettorie differiscono in almeno un $t \in T$ su un insieme $\bigcup_t N_t$, ma pur essendo tutti gli N_t trascurabili niente garantisce che la loro unione sia ancora trascurabile se T non è numerabile: non si può dire pertanto che esse siano anche indistinguibili. In sostanza nella definizioni–ω (f.a. indistinguibili) non solo le due f.a. sono equivalenti (nel senso della definizione–t), ma anche $\bigcup_t N_t$ deve essere trascurabile. Allo stesso modo la ω–continuità q.o. implica la t–continuità q.o. mentre il viceversa non è vero.

Sarà anche utile descrivere la continuità tramite la presenza di discontinuità: se X_s non converge q.o. a X_t per $s \to t$ diremo che t è una *discontinuità fissa* di X_T. Un punto di discontinuità delle traiettorie che però dipenda da ω sarà chiamato invece *discontinuità mobile* di X_T. Pertanto la t–continuità q.o. di X_T implica l'assenza di discontinuità fisse; mentre la ω–continuità q.o. implica l'assenza sia di discontinuità fisse che di discontinuità mobili (con l'eccezione possibile di un insieme trascurabile di traiettorie). Se per una data funzione numerica $g(t)$ esistono finiti $g(t^+)$ e $g(t^-)$, ma $g(t^+) \neq g(t^-)$, diremo che t è una *discontinuità semplice o di prima specie.* Se t è una discontinuità semplice e inoltre il valore $g(t)$ si trova fra $g(t^+)$ e $g(t^-)$ (estremi inclusi) diremo che t è un *salto.* Si dimostra (p. 176) che *se la f.a. X_T è separabile*[1]*, allora le discontinuità semplici di quasi tutte le traiettorie sono salti*

[1]Per il concetto di *separabilità* (J.L. Doob) e definizioni connesse vedi p. *170* e seguenti. In generale, data una f.a. X_T le funzioni di ω

$$\underline{X}_t = \liminf_{s \to t} X_s\,, \qquad \overline{X}_t = \limsup_{s \to t} X_s$$

(con la possibile eccezione delle discontinuità fisse); se poi la f.a. è separabile per insiemi chiusi[2]*, allora nei salti le traiettorie sono continue o da destra o da sinistra.* Parleremo infine di *discontinuità degenere* quando $X_t - X_{t^-}$ o $X_{t^+} - X_t$ sono v.a. degeneri.

2.2 Processi decomponibili

Una f.a. X_T si dice *decomponibile* (p. *212*) se i suoi incrementi $X_{st} = X_t - X_s$ su intervalli $[s, t)$ disgiunti sono indipendenti. Alternativamente si parla anche di f.a. *con incrementi indipendenti*, di f.a. *additiva*, o anche di f.a. *di Lévy* (P. Lévy 1934). Un processo decomponibile su T sarà allora la famiglia delle f.a. decomponibili che hanno in comune gli stessi incrementi: in sostanza si tratta di una f.a. decomponibile definita a meno del suo valore X_a in un punto arbitrario a (usualmente a meno del suo valore iniziale). Un processo sarà in genere rappresentato da una delle sua f.a. X_T che sarà comunque sempre scelta separabile. Si mostra facilmente (p. *299*) che un processo decomponibile è un processo di Markov regolare.

La legge di un processo decomponibile, determinata dalle leggi congiunte di tutte le sue sezioni finite $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, è in realtà determinata dalla famiglia delle leggi dei suoi incrementi (p. *212*). Supponiamo infatti di indicare con f_{st} la f.c. dell'incremento X_{st}: la legge congiunta di due generici incrementi X_{ac} e X_{bd} con $a < b < c < d$ è data dalla f.c. del vett.a. con componenti X_{ac} e X_{bd}, ma a causa dell'indipendenza di incrementi non sovrapposti

$$\mathbf{E}\left(e^{iuX_{ac}+ivX_{bd}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{iuX_{ab}+i(u+v)X_{bc}+ivX_{cd}}\right) = f_{ab}(u)f_{bc}(u+v)f_{cd}(v)\,,$$

e quindi la f.c. congiunta è assegnata una volta che siano date le leggi individuali degli incrementi. Allo stesso modo, se $f_s(u)$ rappresenta la f.c. di X_s, si vede che $f_t = f_s f_{st}$, e posto $v_k = u_k + \ldots + u_n$ con $t_1 < \ldots < t_n$ si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{iu_1X_{t_1}+\ldots+iu_nX_{t_n}}\right) &= \mathbf{E}\left(e^{iv_1X_{t_1}+iv_2X_{t_1t_2}+\ldots+iv_nX_{t_{n-1}t_n}}\right)\\ &= f_{t_1}(v_1)f_{t_1t_2}(v_2)\ldots f_{t_{n-1}t_n}(v_n)\,.\end{aligned}$$

Per questo motivo, se le leggi individuali sono di uno stesso tipo – ad esempio normale, Poisson o i.d. – parleremo di *processo* di quel tipo, ad esempio *decomponibile*

possono non essere misurabili, e in tal caso le proprietà analitiche della f.a. X_T non sarebbero esprimibili in termini probabilistici. La misurabilità è automatica se T è numerabile, ma sarebbe comunque garantita se nel calcolo dei sup e degli inf fosse possibile sostituire T con un suo sottinsieme fisso e numerabile S. Se tale S esiste diremo che X_T è separabile e che S è l'insieme di separazione di X_T. L'uso delle f.a. separabili è giustificato dal fatto che ogni f.a. è equivalente ad una f.a. separabile per insiemi chiusi (p. *173*).

[2] Il concetto di di *separabilità per insiemi chiusi* (p. *172*) prevede che esista un sottoinsieme numerabile $S = \{s_j\}$ di T tale che comunque scelti un intervallo aperto A ed uno chiuso C risulti

$$\{X_t \in C\,,\, t \in AT\} = \{X_{s_j} \in C\,,\, s_j \in AS\} \in \mathcal{F}$$

normale, decomponibile di Poisson o i.d. In realtà vedremo che i processi che rimangono dopo aver rimosso le discontinuità degeneri e le discontinuità fisse da un processo decomponibile sono a loro volta i.d. (p. *213*). È proprio dall'analisi dei campioni di questa parte residua dei processi decomponibili che P. Lévy ha scoperto la forma generale delle leggi i.d. e delle loro f.c. Qui si è seguito invece un cammino inverso esaminando prima le leggi i.d. delle quali abbiamo già studiato la struttura.

In base ai risultati del seguente Teorema i processi decomponibili sono in generale composti da tre parti: una funzione numerica non aleatoria, una serie di discontinuià fisse, e una parte q.o. t–continua (ma non, in generale, q.o. ω–continua; cioè: questa terza parte può contenere discontinuità mobili):

Teorema 2.1. Teorema di decomposizione in tre parti (p. *216*): *Ogni processo decomponibile è la somma*

$$X_T = x_T + X_T^d + X_T^c$$

di tre parti indipendenti (non necessariamente tutte presenti):

1. *una funzione (non aleatoria) di centramento x_T;*
2. *una parte X_T^d con discontinuità fisse, centrata, decomponibile, con quasi tutte le traiettorie continue tranne che in un insieme numerabile di discontinuità fisse;*
3. *una parte X_T^c q.o. t–continua, centrata, decomponibile con quasi tutte le traiettorie continue tranne che in un insieme numerabile di discontinuità mobili.*

Si noti che X_T^c è un processo q.o. t–continuo, ma non in generale q.o. ω–continuo, per cui le sue traiettorie possono ammettere delle discontinuità, ma queste non sono fisse (come nel caso di X_T^d): ad esempio un processo di Poisson, con un insieme numerabile di discontnuità mobili, sarebbe nella parte X_T^c di un processo decomponibile.

Il p.s. X_T è continuo in t (non aleatorio) quando sia $X_{t^-t} = X_t - X_{t^-}$, sia $X_{tt^+} = X_{t^+} - X_t$ sono q.o. nulle, cioè quando sono v.a. degeneri a zero; in caso contrario il p.s. non è continuo in t. Si dice poi che X_T presenta una *discontinuità degenere* in t quando almeno una delle due v.a. X_{t^-t} e X_{tt^+} è q.o. uguale ad un numero $\delta \neq 0$. Diremo allora che X_T è privo di discontinuità degeneri quando, se una delle due v.a. X_{t^-t} e X_{tt^+} è degenere, allora essa degenera a zero. Naturalmente un p.s. privo di discontinuità degeneri può presentare altre discontinuità non degeneri (fisse o mobili), e quindi in generale non è continuo: l'assenza di discontinuità degeneri garantisce solo che una eventuale discontinuità (fissa) non abbia altezza identicamente uguale a $\delta \neq 0$.

Per dimostrare il Teroema 2.1 innanzitutto si mostra (p. *217*) che si possono eliminare da X_T le eventuali discontinuità degeneri includendole in una prima *funzione* *di centramento*[3] x'_T in modo da lasciare un processo X'_T decomponibile, *centrato* e privo di discontinuità degeneri. Pertanto i limiti q.o. X'_{t-} e X'_{t+} esistono, e se le v.a. $X'_{t-t} = X'_t - X'_{t-}$ o $X'_{tt+} = X'_{t+} - X'_t$ degenerano, allora esse degenerano a zero. Si mostra inoltre (p. *217*) che $X'_{t-t+} = X'_{t+} - X'_{t-}$ degenera a zero se e solo se X'_{t-t} e X'_{tt+} degenerano a zero, e che l'insieme delle discontinuità fisse del processo centrato X'_T è numerabile e indipendente dalla scelta della funzione di centramento. Successivamente si prova (p. *218*) che quasi tutte le traiettorie del processo decomponibile e centrato X'_T sono limitate su ogni $[a,b] \subset T$, e sono continue con l'eccezione di un insieme numerabile di salti oltre le possibili discontinuità fisse. Più precisamente (p. *219-20*) un processo decomponibile e centrato X'_T risulta essere la somma

$$X'_T = x''_T + X^d_T + X^c_T$$

di tre parti indipendenti: una seconda eventuale funzione di centramento x''_T, un processo centrato e decomponibile X^d_T contenente le discontinuità fisse di X'_T, e un processo centrato e decomponibile X^c_T senza discontinuità fisse. Naturalmente nell'enunciato del Teorema di Decomposizione in Tre Parti risulterà $x_T = x'_T + x''_T$.

Nel seguito supporremo che $T = [a,b]$ e che il processo X_T sia rappresentato dalla sua f.a. determinata dalla condizione $X_a = 0$ in modo che $X_{at} = X_t$ e $f_{at} = f_t$.

Lemma 2.2. Lemma di equivalenza delle t–continuità (p. *221*): *Per un processo decomponibile X_T le t–continuità in legge, in probabilità e q.o. sono equivalenti e uniformi*[4] *e implicano che il processo è centrato.*

In conseguenza del precedente Lemma trascureremo da ora in poi di indicare che la continuità del nostro processo è q.o. e parleremo semplicemente di *processo decomponibile e continuo* (*d.c.*)

Teorema 2.3. Teorema di decomponibilità continua (p. *222*): *Se X_T con $T = [a,b]$ è un processo d.c. e separabile, allora*

1. *X_T è i.d. e $\log f_t = \psi_t = (\alpha_t, \beta_t^2, L_t) = (\alpha_t, \Psi_t)$ con α_t continua e Ψ_t continua in t e non decrescente in t e x;*

2. *quasi tutte le traiettorie di X_T sono limitate e continue con l'eccezione di un insieme numerabile di salti e $|L_t(x)| = \mathbf{E}\nu_t(x)$ dove $\nu_t(x)$ è il numero di salti dei campioni in $[a,t)$ con altezza inferiore a $x < 0$ o almeno eguale a $x > 0$.*

[3]Data una v.a. X e un numero c, si dice che la v.a. X è stata *centrata* a c (p. 244) quando viene sostituita da $X - c$. Il numero c è arbitrario, ma il centramento più usuale è alle attese, quando queste esistono. Alternativamente si può scegliere di centrare alle mediane (p. 256) o ad altri valori numerici.

[4]Per qualunque tipo di convergenza si dice che il processo è *uniformemente continuo* in T (p. *180*) se $X_s - X_t \to 0$ uniformemente in T per $s \to t$ nel senso della convergenza considerata.

Il punto *2.* del precedente teorema fornisce una evidente interpretazione probabilistica della funzione di Lévy $L_t(x)$. Lasciando da parte il caso triviale d.c. e degenere corrispondente a $\Psi_t \equiv 0$, il teorema ci permette di ricavare le proprietà di due casi estremi corrispondenti a $\Psi_t(x)$ con un solo punto (fisso) di aumento: il processo d.c. normale, e il processo d.c. di Poisson (vedi anche la discussione svolta nella Sezione 1.10). Il *processo d.c. normale* ha un solo punto di aumento di $\Psi_t(x)$ in $x = 0$, ha $L_t \equiv 0$ e

$$\psi_t(u) = i\alpha_t u - \frac{\beta_t^2}{2}u^2$$

con α_t continua, e β_t^2 continua e non decrescente. Il *processo d.c. di Poisson* ha un punto di aumento di $\Psi_t(x)$ in $x = c \neq 0$, e

$$\begin{aligned}
\psi_t(u) &= i\gamma_t u - \lambda_t(e^{iuc} - 1) \\
\gamma_t &= \alpha_t - \frac{c}{1+c^2}\lambda_t \\
\lambda_t &= L_t(c^+) - L_t(c^-)
\end{aligned}$$

con γ_t continua e λ_t continua e non decrescente. Le forme *ridotte*, ottenute con una centratura e un cambiamento istantaneo della scala temporale, sono il *processo Browniano* con

$$\psi_t(u) = -\frac{\sigma^2 t}{2}u^2 \qquad (\sigma^2 > 0)\,,$$

e il *processo di Poisson* con

$$\psi_t(u) = -\lambda t(e^{iu} - 1) \qquad (\lambda > 0)\,.$$

Il seguente Teorema enuncia i criteri che consentono di sapere se un processo è normale o di Poisson (enunciato in forma ridotta), e il successivo Lemma raccoglie le proprietà delle distribuzioni dei salti di un processo di Poisson:

Teorema 2.4. Criteri per i processi d.c. normale e di Poisson (p. *223*): *Se X_T con $T = [a, b]$ è un processo d.c. allora*

1. *X_T è un processo d.c. normale se e solo se quasi tutte le sue traiettorie sono ω–continue;*

2. *X_T è un processo d.c. di Poisson se e solo se quasi tutte le sue traiettorie sono funzioni a gradino con salti di altezza costante.*

Lemma 2.5. Lemma sui salti di Poisson (p. *224*): *Se X_T con $T = [0, +\infty)$ è un processo di Poisson allora*

1. *la legge delle posizioni dei salti in $I = [s, s + t)$, condizionata dal fatto che in I vi siano n salti, è quella di n v.a. indipendenti distribuite uniformemente;*

2. *i tempi di attesa τ_n ($\tau_0 = 0$) fra i salti $(n-1)$–mo e n–mo sono v.a. indipendenti con $\mathbf{P}(\tau_n > t) = e^{-\lambda t}$.*

2.3 Stazionarietà e derivata di una legge

Il concetto generale di *stazionarietà* (p. *225*) lungo un insieme di indici T è quello dell'invarianza per traslazioni lungo T, ovvero, con un linguaggio più suggestivo per $T = [0, +\infty)$, quello dell'invarianza per traslazioni temporali. Faremo inoltre alcune distinzioni (p. *303*): diremo che X_T è una *f.a. stazionaria* se la sua legge è invariante per traslazioni temporali; parleremo invece di *p.s. stazionario* quando soltanto la legge di evoluzione delle sue f.a. è stazionaria, cioè quando la legge condizionata dalle condizioni iniziali è invariante per traslazioni temporali. In particolare affinché un p.s. decomponibile e centrato X_T sia stazionario basta che siano stazionarie le leggi individuali dei suoi incrementi $\Delta X(t) = X_{t,t+\Delta t} = X(t + \Delta t) - X(t)$, ossia che in termini di f.c. sia $f_{t,t+\Delta t} = f_{\Delta t}$ per ogni Δt. Infatti in questo caso segue subito che risultano stazionarie le leggi congiunte degli incrementi, e quindi anche la legge di evoluzione del processo. Inoltre dalla decomponibilità segue che per ogni t, s si ha $f_{s+t} = f_s f_t$, e quindi anche $f_t = f^n_{t/n}$ per ogni n. Ne segue che $f_t = e^{\psi_t}$ è una legge i.d. con $f_t \to 1$ per $t \to 0$; ovvero anche $\psi_{s+t} = \psi_s + \psi_t$ con $\psi_t \to 0$ per $t \to 0$. Conseguentemente un p.s. stazionario, centrato e decomponibile è un processo d.c. con $f_{t,t+\Delta t} = f_{\Delta t} = e^{\psi \Delta t}$ con $\psi = (\alpha, \Psi)$ di una legge i.d.

In altri termini una f.a. decomponibile (e quindi di Markov) è stazionaria quando la legge di X_t non dipende da t e le probabilità di transizione sono invarianti per traslazioni temporali: infatti, data la markovianità, in questo modo anche tutte le leggi congiunte delle sezioni finite della f.a. (e quindi anche la legge di X_T) risultano invarianti per traslazioni temporali. Invece per poter considerare stazionario un p.s. decomponibile è sufficiente che siano invarianti per traslazioni temporali le probabilità di transizione, cioè la legge di evoluzione. Talora nella teoria dei processi di Markov[5] (p. *293*) si chiama "stazionarietà" quella delle f.a. e "omogeneità" quella dei p.s. Si deduce allora facilmente che il processo Browniano e il processo di Poisson sono stazionari (nel senso dei p.s.) in quanto le f.c. dei loro incrementi $X_{t,t+\Delta t}$ sono invarianti per traslazioni temporali. Esse infatti hanno la forma $f_{t,t+\Delta t} = f_{\Delta t} = e^{\psi \Delta t}$ dove si ha rispettivamente: nel caso Browniano $\psi(u) = -\sigma^2 u^2/2$, e nel caso di Poisson $\psi(u) = \lambda(e^{iu} - 1)$. Pertanto anche le leggi di evoluzione e le rispettive probabilità di transizione sono invarianti per traslazioni temporali. Viceversa è noto che le singole f.a. di questi processi non sono stazionarie dato che le distribuzioni delle X_t dipendono da t.

Diremo poi che una f.c. $\dot{f}_t$ rappresenta la *derivata in t della legge* (pp. *225* e *299*) di un processo centrato e decomponibile X_T se

$$f^{1/\Delta t}_{t,t+\Delta t} \longrightarrow \dot{f}_t \,, \qquad \Delta t \to 0$$

Si noti però che, nonostante la notazione con il punto ricordi l'usuale derivazione rispetto al tempo, $\dot{f}_t$ non è né la derivata temporale di f_t, né la f.c. di una qualche

[5]Vedi anche C.W.Gardiner: HANDBOOK OF STOCHASTIC METHODS; Springer, Berlin 1997, p. 60.

derivata della legge (funzione di distribuzione o di densità) del processo. Piuttosto si può osservare che, ponendo $\psi_t = \log f_t$, dalla decomponibilità del processo si ha che $f_{t+\Delta t} = f_t f_{t,t\Delta t}$ e quindi

$$f_{t,t+\Delta t} = e^{\psi_{t+\Delta t} - \psi_t}.$$

Pertanto, se la derivata temporale nel senso usuale di ψ_t esiste e se la indichiamo come al solito con $\dot{\psi}_t$, avremo

$$f_{t,t+\Delta t}^{1/\Delta t} \longrightarrow e^{\dot{\psi}_t}, \qquad \Delta t \to 0$$

ovvero anche $\log \dot{f}_t = \dot{\psi}_t$ dove $\dot{\psi}_t$ è la solita derivata temporale, mentre $\dot{f}_t$ è definita dalla relazione precedente, cioè da $\dot{f}_t = e^{\dot{\psi}_t}$. In questo modo per il processo Browniano e per il processo di Poisson, e in generale per tutti i p.s. centrati, decomponibili e stazionari, si ha $\dot{f}_t = e^{\dot{\psi}_t} = e^{\psi}$, e risulta rispettivamente nel caso Browniano $\psi(u) = -\sigma^2 u^2/2$, e nel caso di Poisson $\psi(u) = \lambda(e^{iu} - 1)$. Quando $\dot{\psi}_t = \psi$ è indipendente da t diremo anche che la derivata della legge è stazionaria.

Teorema 2.6. Criterio di decomponibilità stazionaria (p. *226*:) *Un processo centrato e decomponibile X_T con $T = [0, +\infty)$ è stazionario se e solo se le f.c. dei suoi incrementi sono i.d. della forma $f_{t,t+\Delta t} = f_{\Delta t} = e^{\psi \Delta t}$ con $\psi = (\alpha, \Psi)$, o equivalentemente se la derivata della sua legge esiste ed è stazionaria.*

2.4 Decomposizione integrale

Un processo d.c. può essere pensato come la sovrapposizione di un processo d.c. normale e del processo di Poisson d.c. corrispondente a tutti i punti di crescita della funzione di Lévy (Teorema 2.3). In realtà P. Lévy ha mostrato (e K. Itô ha reso precisa l'analisi) in che senso ciò è vero e, a partire da questo risultato, ha ricavato la forma generale delle leggi i.d. Noi enunceremo invece il risultato procedendo lungo un cammino inverso, cioè partendo dalla forma generale delle leggi i.d. (o meglio dal Teorema 2.3 di Decomponibilità Continua che da essa discende) già esaminata nelle Sezioni precedenti, per giungere alla ricostruzione dei processi d.c. come sovrapposizione delle loro componenti normale e di Poisson. Le affermazioni che seguono si riferiscono tutte a processi d.c. X_T con le notazioni adottate in precedenza.

Lemma 2.7. Lemma sul numero dei salti (p. *226*): *I numeri $\nu_{st}[x, y)$ dei salti in $[s, t)$ di altezza in $[x, y)$, con $xy > 0$, sono v.a. di Poisson con parametro $L_{st}[x, y)$, e sono indipendenti per intervalli temporali $[s, t)$ disgiunti e indipendenti per intervalli di altezza $[x, y)$ disgiunti.*

Pertanto, con un fissato $x \neq 0$, $\nu_t(x)$ (il numero di salti dei campioni in $[a, t)$ con altezza inferiore a $x < 0$ o almeno eguale a $x > 0$, vedi Teorema 2.3) per $t \in T$ è un processo d.c. di Poisson; con un fissato $t \in T$, $\nu_t(x)$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è un processo di Poisson decomponibile.

Lemma 2.8. Lemma di integrazione (p. *227*): *Gli integrali*

$$I_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x \, \mathrm{d}\nu_t(x) - \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}L_t(x) \right]$$

esistono q.o. e sono v.a. i.d. con

$$\log \mathbf{E} e^{iuI_t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \mathrm{d}L_t(x)$$

Teorema 2.9. Teorema di decomposizione integrale (p. *229*): *Ogni processo d.c. X_T con $T = [a,b]$ è somma di due processi indipendenti*

$$X_T = \eta_T + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x \, \mathrm{d}\nu_T(x) - \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}L_T(x) \right]$$

dove η_T è un processo d.c. normale, e ν_T ha le proprietà enunciate nel Lemma sul Numero di Salti. Vale anche il viceversa.

2.5 Processi di Markov regolari e stazionari

Parleremo di *processo di Markov regolare* (p. *294*) quando esistono versioni regolari delle probabilità condizionate utilizzate (vedi anche pp. *20* e*164*). In questo caso, con S è un Boreliano di $\mathbb{R}$, si possono introdurre le *probabilità di transizione* (pr.tr.)

$$P_{st}(x, S) = \mathbf{P}(X_t \in S \,|\, X_s = x)$$

oltre alle *distribuzioni iniziali*

$$P_{t_0}(S) = \mathbf{P}(X_{t_0} \in S)\,.$$

Un processo di Markov regolare sarà allora costituito da una famiglia di f.a. regolari di Markov con pr.tr. comune e distribuzione iniziale arbitraria; la scelta di una distribuzione iniziale determina poi la legge di una particolare f.a. del processo. Per $r < s < t$ scriveremo allora l'*equazione di Chapman–Kolmogorov* come

$$P_{rt}(x, S) = \int P_{rs}(x, \mathrm{d}y) P_{st}(y, S)$$

con la condizione $P_{ss}(x, S) = I_S(x)$ dove $I_S(x)$ è l'indicatore dell'evento S. Si definiscono anche le *funzioni di distribuzione di transizione* (f.d.tr.) $F_{st}^x(y)$ e le corrispondenti *funzioni caratteristiche di transizione* (f.c.tr.) $f_{st}^x(u)$, in modo che l'equazione di Chapman–Kolmogorov si scrive ora come

$$F_{rt}^x(z) = \int F_{rs}^x(\mathrm{d}y) F_{st}^y(z)\,.$$

Si considerano poi anche le f.d.tr. e le f.c.tr. *centrate* sui valori iniziali:

$$
\begin{aligned}
\overline{F}^x_{st}(y) &= \mathbf{P}(X_t - X_s \le y \,|\, X_s = x) = \mathbf{P}(X_t \le x + y \,|\, X_s = x) \\
&= F^x_{st}(x+y)\,, \\
\overline{f}^x_{st}(u) &= e^{-iux} f^x_{st}(u)\,.
\end{aligned}
$$

I processi decomponibili con incrementi X_{st} sono un importante esempio di processi di Markov regolari per i quali le f.d.tr. centrate soddisfano la relazione

$$F^x_{st}(z) = F_{st}(z-x)\,.$$

Infatti, ponendo $z = x + y$ nella definizione di f.d.tr. centrata, dalla indipendenza degli incrementi segue che

$$
\begin{aligned}
F^x_{st}(z) &= \overline{F}^x_{st}(z-x) = \mathbf{P}(X_t - X_s \le z - x \,|\, X_s = x) = \mathbf{P}(X_{st} \le z - x) \\
&= F_{st}(z-x)\,.
\end{aligned}
$$

L'equazione di Chapman–Kolmogorov si scrive allora in termini di prodotto di convoluzione

$$F_{rt} = F_{rs} \star F_{st}\,;$$

si ha infatti ponendo $w = y - x$

$$
\begin{aligned}
F_{rt}(z) &= F^x_{rt}(z+x) = \int F^x_{rs}(\mathrm{d}y) F^y_{st}(z+x) = \int \left[F^x_{rs}(y+\mathrm{d}y) - F^x_{rs}(y)\right] F^y_{st}(z+x) \\
&= \int \left[F_{rs}(y-x+\mathrm{d}y) - F_{rs}(y-x)\right] F_{st}(z+x-y) \\
&= \int \left[F_{rs}(w+\mathrm{d}w) - F_{rs}(w)\right] F_{st}(z-w) \\
&= \int F_{rs}(\mathrm{d}w) F_{st}(z-w) = F_{rs}(z) \star F_{st}(z)\,.
\end{aligned}
$$

Le pr.tr. $P_{st}(x, S)$ dei processi di Markov soddisfano una equazione integro–differenziale alle derivate parziali che generalizza l'equazione di Fokker–Planck. I coefficienti di tale equazione sono legati alle derivate in t delle leggi di transizione (pp. *225* e *299*). Diremo che una f.c. $\dot{f}^x_t$ rappresenta (per un dato x) la *derivata in t della legge di transizione* di un processo di Markov regolare X_T se per $\Delta t \to 0$ si ha

$$\left(\overline{f}^x_{t,t+\Delta t}\right)^{1/\Delta t} \longrightarrow \dot{f}^x_t$$

Se la f.c. limite esiste essa è necessariamente i.d. (p. *299*) e nelle varie rappresentazioni scriveremo

$$\log \dot{f}^x_t = \psi^x_t\,, \qquad \psi^x_t = (\alpha^x_t, \Psi^x_t) = \left(\alpha^x_t, (\beta^x_t)^2, L^x_t\right)\,.$$

Del seguente risultato riporteremo solo una versione ridotta:

Teorema 2.10. Teorema sulle derivate delle leggi di transizione (p. *300*): *Se la pr.tr. $P_{st}(x,S)$ di un processo di Markov è derivabile due volte in x allora la sua derivata sinistra $\partial_s^- P_{st}(x,S)$ esiste e*

$$\begin{aligned}
\partial_s^- P_{st}(x,S) &= \alpha_s^x \partial_x P_{st}(x,S) \\
&\quad + \int \left[P_{st}(x+y,S) - P_{st}(x,S) - \frac{y}{1+y^2}\partial_x P_{st}(x,S) \right] \frac{1+y^2}{y^2}\, \mathrm{d}\Psi_s^x(y) \\
&= \alpha_s^x \partial_x P_{st}(x,S) + \frac{(\beta_s^x)^2}{2}\partial_x^2 P_{st}(x,S) \\
&\quad + \fint \left[P_{st}(x+y,S) - P_{st}(x,S) - \frac{y}{1+y^2}\partial_x P_{st}(x,S) \right] \mathrm{d}L_s^x(y)
\end{aligned}$$

Il caso continuo corrisponde a funzioni di Lévy $L_s^x \equiv 0$ e quindi a derivate delle leggi di transizione normali. Vi sono poi anche i casi puramente discontinui e le sovrapposizioni delle diverse possibilità.

Diremo che una pr.tr. $P_{u,v}(x,S)$ è *stazionaria* (p. *301*) quando è invariante per traslazioni nel tempo, cioè quando per ogni u,v,s,x,S

$$P_{u+s,v+s}(x,S) = P_{u,v}(x,S)\,.$$

In questo caso $P_{u,v}(x,S)$ dipende da u,v solo tramite la loro differenza $t = v-u$ per cui denoteremo le pr.tr. stazionarie con $P_t(x,S)$. Avremo allora che $P_0(x,S) = I_S(x)$ e l'equazione di Chapman–Kolmogorov si scrive

$$P_{s+t}(x,S) = \int P_s(x,dy)P_t(y,S)\,.$$

Ricordiamo che se la pr.tr. è stazionaria allora il processo di Markov da essa definito è stazionario; inoltre per avere f.a. stazionarie bisogna che anche la distribuzione iniziale sia stazionaria: $P_s = P_0$. Indicheremo con F_t^x e f_t^x le f.d.tr. e f.c.tr. dei processi stazionari, e con $\overline{F}_t^x$ e $\overline{f}_t^x$ le analoghe quantità centrate su x. La rappresentazione delle derivate delle leggi di transizione, quando esistono, avviene in questo caso mediante f.c. $(\overline{f}_{\Delta t}^x)^{1/\Delta t} \to \dot{f}^x$ che risultano indipendenti da t e i.d. con $\log \dot{f}^x = \psi^x = (\alpha^x, \Psi^x) = (\alpha^x, (\beta^x)^2, L^x)$.

Teorema 2.11. Teorema sulle derivate delle leggi stazionarie di transizione (p. *304*): *Se la pr.tr. stazionaria $P_t(x,S)$ di un processo di Markov è derivabile due volte in x allora la sua derivata destra $\partial_t^+ P_t(x,S)$ esiste e nella rappresentazione di Lévy si ha*

$$\begin{aligned}
\partial_t^+ P_t(x,S) &= \alpha^x \partial_x P_t(x,S) + \frac{(\beta^x)^2}{2}\partial_x^2 P_t(x,S) \\
&\quad + \fint \left[P_t(x+y,S) - P_t(x,S) - \frac{y}{1+y^2}\partial_x P_t(x,S) \right] \mathrm{d}L^x(y)\,.
\end{aligned}$$

Il caso continuo con $L^x \equiv 0$ si riduce allora al caso tradizionale dell'equazione di Fokker–Planck all'indietro.