Laboratorio di Didattica della Fisica I

Data	Orario	Aula	Tipo
08-mar	15 -17:15	A	Lezione
13-mar	15 -17:15	A	Lezione
15-mar	15 -17:15	Lab. MM e Did.	Laboratorio
20-mar	15 -17:15	A	Lezione
22-mar	15 -17:15	Lab. MM e Did.	Laboratorio
27-mar	15 -17:15	A	Lezione
29-mar	15 -17:15	Lab. MM e Did.	Laboratorio
03-apr	15 -17:15	B	Lezione
05-apr	15 -17:15	Lab. MM	Laboratorio I turno
10-apr	15 -17:15	Lab. MM	Laboratorio II turno

Materiale su http://www.ba.infn.it/~angelini/SSIS/labdidfis.html

Laboratorio di Didattica della Fisica I

Finalità:

Elaborazione di unità didattiche focalizzate sul contributo innovativo delle tecnologie informatiche sui processi di apprendimento e sul metodo costruttivista.

In particolare verranno affrontati:

- il significato dei vari passi del processo di formazione della conoscenza scientifica
- il problema della costruzione dei modelli in fisica
- il ruolo della simulazione al fine della loro validazione e di una corretta comprensione del significato delle grandezze.

Laboratorio di Didattica della Fisica I

Argomenti:

- Conoscenza scientifica e modelli di apprendimento
- Aspetti elementari del calcolo numerico
- Come introdurre agli studenti di liceo il calcolo numerico
- L'utilizzo di Excel per l'integrazione delle equazioni del moto
- Confronto teoria – esperimento (acquisizione dei dati sperimentali in laboratorio)
- ….

Tecnologie informatiche e didattica della Fisica

La proposizione dei nuovi strumenti informatici, sia di hardware che di software, ha aperto prospettive metodologiche finora poco esplorate nel campo della didattica della Fisica. Basta pensare al loro uso per

- la raccolta e l’analisi dei dati
- il calcolo numerico e la manipolazione simbolica
- progettazione e implementazione di modelli
- visualizzazione di dati e simulazione

Non va neanche dimenticata l’importanza di Internet nello scambio di esperienze e conoscenze nel campo didattico.

Tecnologie informatiche e didattica della Fisica

Tuttavia l'esperienza mostra che la presenza di computer, di programmi e di rete Internet nelle classi non eleva il livello di apprendimento, se non è presente un accurato piano didattico per la loro utilizzazione.

Molte scuole oggi sono dotate di strumenti informatici avanzati e questo ha in ogni caso aspetti positivi.

La questione che qui si vuole affrontare è se sia possibile che tali strumenti contribuiscano ad una crescita qualitativa del processo di formazione, in particolare per la parte che attiene alla corretta acquisizione di concetti e di metodologie del sapere scientifico.

La necessità di un approfondimento epistemologico

Le scelte che ogni insegnante è costretto a fare ogni giorno sui contenuti teorici, sperimentali e procedurali riflettono e trasmettono agli alunni l'immagine che egli ha della conoscenza scientifica.

Un fisico non è necessariamente un buon docente di Fisica.

Infatti essere un buon docente comporta sicuramente anche il controllo di tecniche di insegnamento e comunicazione.

D'altra parte la padronanza delle conoscenze specifiche è ineludibile e tale padronanza si acquisisce anche attraverso una riflessione sui fondamenti della disciplina.

Questa riflessione è anche funzionale ad un approccio didattico non tradizionale.

Il processo di modellizzazione in Fisica

La Fisica (ogni scienza sperimentale) ha l'obiettivo di analizzare, interpretare e prevedere il comportamento del mondo naturale.

La sua validità risiede dunque nel riscontro con i **fatti**.

Il **fatto** è l'insieme di un gran numero di osservazioni **quantitative** da parte di osservatori diversi delle stesse grandezze fisiche.

Il fatto richiede dunque:

- una definizione **operativa** delle grandezze (procedura)
- il contenimento dell'errore e la sua valutazione
- la selezione delle variabili rilevanti e delle loro interazioni

Il processo di modellizzazione in Fisica

Il secondo passo è la costruzione di un **modello**.

Che cosa s'intende per modello in Fisica?

È la **rappresentazione** concettuale di un fenomeno reale.

Tale rappresentazione non è descrittiva, ma formale, basata cioè su un linguaggio matematico.

Il processo di modellizzazione non può essere a sua volta formalizzato, esso procede per vie diverse, spesso si basa sulla ricerca di analogie. (Ad esempio l'analogia con le onde nello sviluppo dei modelli quantistici).

È fondamentale sottolineare la differenza tra il fenomeno e la sua rappresentazione, il modello.

Schematizzazione del modello in Fisica

La caratterizzazione di un modello richiede:

- Individuazione dei descrittori: costituenti e connessioni tra essi, agenti esterni e connessioni con i costituenti
- Assegnazione di variabili ai descrittori: variabili intrinseche (massa, carica, …), variabili di stato (posizione, velocità, pressione, …), variabili d'interazione all'interno o con l'esterno (forze, potenziali)
- Formulazione di leggi d'interazione: relazioni tra le variabili ($F = Gm_1m_2/r^2$, $PV = nRT$, …)
- Formulazione di leggi di evoluzione: descrivono come cambiano le variabili di stato per effetto delle variabili d'interazione ($Gm_1m_2/r^2 = m_1a$, eq. di diffusione, …)

Il processo di costruzione dei modelli

Regolarità

nel comportamento di sistemi naturali

osservazione →

Modelli descrittivi

Leggi empiriche di comportamento

inferenza ↓

Modelli Esplicativi

Leggi causali generano le leggi empiriche

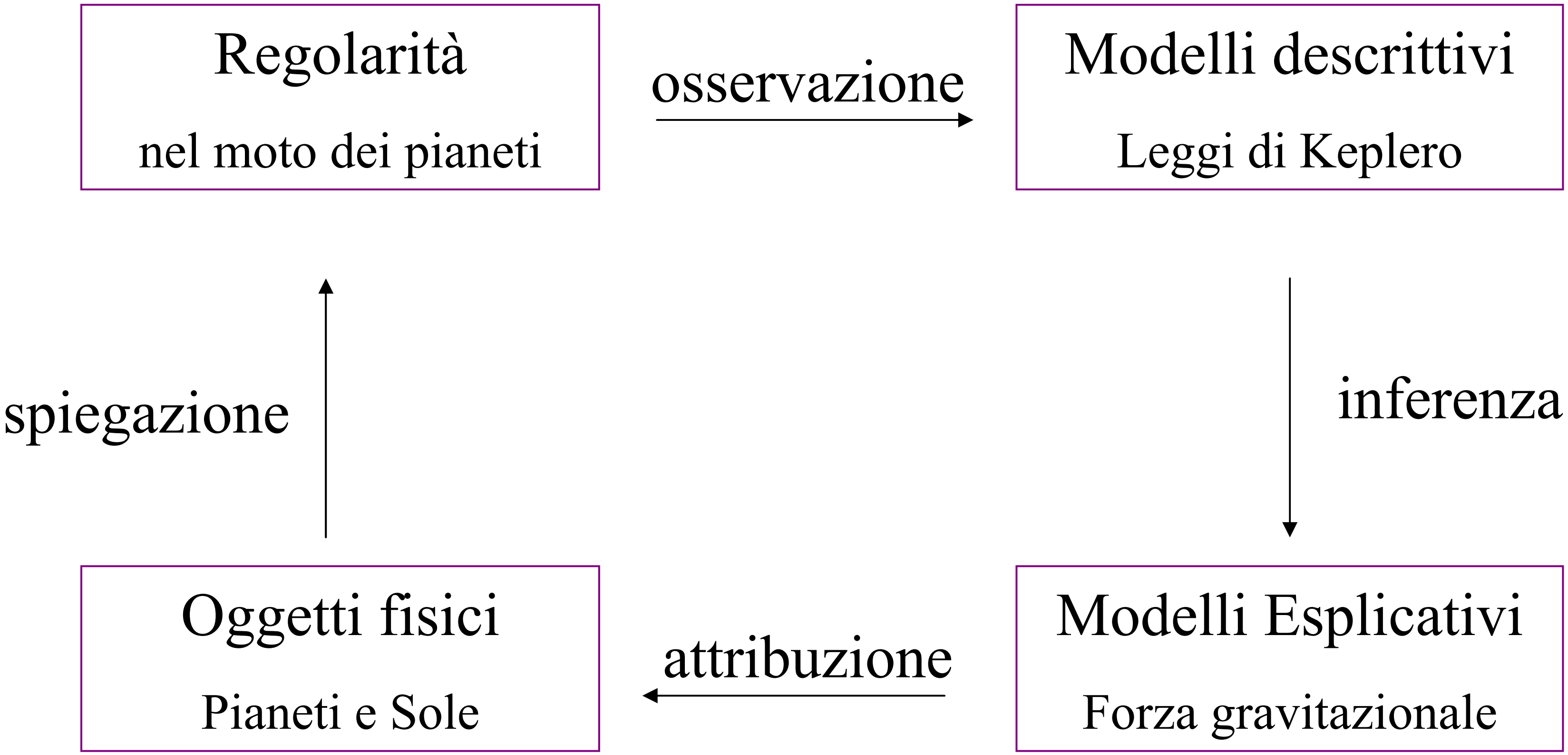
← attribuzione

Oggetti fisici

che si influenzano tra di loro

spiegazione ↑

Esempio: il modello gravitazionale



La Teoria

Una Teoria scientifica è un sistema di principi progettuali per la modellizzazione di processi reali. Anche la Teoria è caratterizzata da variabili e da leggi. Ad esempio le 3 Leggi della Dinamica mettono in relazione le variabili di stato (posizioni) con le variabili d'interazione (forze).

Le Leggi, i Teoremi, le Definizioni della Teoria facilitano il processo di modellizzazione. È all'interno della Teoria della Meccanica Newtoniana che si sviluppano modelli come l'Oscillatore Armonico o la Gravitazione.

La Teoria da un lato è una struttura generale che contiene i modelli, dall'altro essa solo attraverso i modelli può essere messa in relazione con la realtà.

I vari livelli della conoscenza scientifica

Principi formali

Modelli esplicativi

Leggi empiriche

Osservazioni

Apprendimento come costruzione di modelli

Mentre è assurdo pensare a insegnare nella Scuola Secondaria i processi di formalizzazione di una Teoria scientifica, il **processo di modellizzazione** si presta ad essere il nucleo procedurale e fondante dell'apprendimento della Fisica.

Un insegnamento basato sulla modellizzazione può riuscire a coinvolgere gli studenti nello sforzo di comprensione della realtà fisica al fine di:

- Descrivere, predire e controllare i fenomeni
- Rappresentarli in modo simbolico, grafico, matematico
- Familiarizzare con un certo numero di modelli di base
- Affrontare la problematica della validazione di un modello

Obiettivi del corso e valutazione

Questa ultima parte, la validazione di un modello sulla base delle sue capacità predittive sarà l'oggetto specifico della seconda parte di questo corso.

Tuttavia l'obiettivo vero sarà quello formulare un'unità didattica che ripercorra, per un particolare fenomeno, il possibile ciclo di costruzione di un modello.

I fenomeni da considerare sarà oggetto di un esperienza di laboratorio.

Alla fine di questo ciclo di lezioni formeremo dei gruppi di lavoro di 3-4 persone che si dedicheranno a sviluppare queste unità.

Perché le equazioni differenziali?

Tutti i fenomeni fisici complessi conducono a modelli in cui le equazioni sono equazioni differenziali. Questo è normale in Fisica specialmente quando si studiano fenomeni nella loro evoluzione temporale.

Per questo motivo è necessario introdurre alcuni elementi di calcolo numerico:

1. Inizialmente ripasseremo alcune nozioni necessarie per costruire il controllo del docente sull'argomento
2. Vedremo l'uso del foglio elettronico per l'integrazione
3. Cercheremo un modo di presentare agli studenti le nozioni più semplici e indispensabili

Calcolo numerico

Il primo presupposto per poter lavorare a questo programma è una minima conoscenza di calcolo numerico relativamente alle

equazioni differenziali.

Non per trasmetterli agli studenti ma per avere il controllo che ogni docente deve avere su possibili difficoltà incontrate dagli studenti

Questa presentazione non è per studenti!

- Si usa notazione compatta. Ad es. $\dot{y}$
- Molti dei concetti richiamati servono solo al docente per avere un controllo di quello che fa lo studente. Ad es. tutto quello che diremo sull'errore
- I metodi da usare verranno introdotti in maniera generale. Ad es. l'equazione differenziale del II ordine la scriveremo

$$\ddot{y} = g(t, y, \dot{y})$$

Un esempio della Fisica:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x$$

Equazioni differenziali ordinarie

- Un'ED è un'equazione che coinvolge una funzione incognita e una o più sue derivate. Considereremo solo funzioni di una variabile indipendente (ED Ordinarie)
- Esempi

$$-C\frac{dV}{dt}=\frac{V}{R}\ \text{(scarica di un condensatore)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=F(t)\ \text{(pendolo)}$$

Le variabili dipendenti sono V nella prima equazione e θ nella seconda. In entrambe t è la variabile indipendente. La prima è un'equazione del I ordine, la seconda è del II ordine.

Condizioni ausiliarie

Ad un'equazione differenziale in genere sono associate delle condizioni sulla funzione incognita e sulle sue derivate

- Condizioni iniziali: consiste nel fissare tali condizioni per un singolo valore della variabile indipendente.

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = g \quad \text{con } \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0 \text{ (moto di un grave)}$$

- Condizioni al contorno: le condizioni vengono fissate per più valori della variabile indipendente.

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{con } D(0,t) = D(L,t) = 0$$

(corda vibrante)

Alcuni tipi di equazioni differenziali

- Equazioni lineari. Si possono scrivere

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = g(t)$$

Esse godono del Principio di sovrapposizione, fondamentale in Fisica (Ottica, Meccanica Quantistica, …). Ad esempio

$$\ddot{y} = g(t) \text{ con } \quad y(0) = \alpha \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = \beta$$

Se $y_1(t)$ è soluzione per g_1, α_1, β_1

e $y_2(t)$ è soluzione per g_2, α_2, β_2,

allora $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ lo è per

$$c_1 g_1 + c_2 g_2,\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2,\ c_1\beta_1 + c_2\beta_2$$

- Equazioni non lineari (Non risolubili analiticamente)

Stabilità delle soluzioni

- Una caratteristica importante di molti tipi di equazioni differenziali è la stabilità delle soluzioni.Una soluzione y(t) si dice stabile se ogni altra soluzione con condizioni iniziali sufficientemente vicine a quelle di y(t) rimane in un "tubo" intorno a y(t). La stabilità è un requisito importante per poter risolvere numericamente l'equazione; se essa non è verificata, accade che gli errori introdotti dal calcolo si propagano in maniera tale da invalidare il metodo.
- Una soluzione non stabile viene detta instabile. (Non predicibilità, chaos,…)

Soluzioni numeriche

- Molte equazioni differenziali di uso comune non si sanno risolvere esplicitamente
- Di qui la necessità di soluzioni approssimate
- Quando le approssimazioni consistono nel determinare un valore della soluzione in un certo numero di punti, parliamo di soluzioni numeriche.
- Il calcolo numerico può comportare diversi problemi: non è detto che la soluzione esista, ne può esistere più di una, in ogni caso c'è da tenere sotto controllo l'errore intrinseco nel tipo di calcolo.

Sistemi di equazioni differenziali

- Un sistema di ED del I ordine con condizioni iniziali si può scrivere

$$\dot{\vec{Y}} = \vec{F}(t, \vec{Y}) \quad ; \quad \vec{Y}(a) = \vec{A}$$

Dove Y, A e F sono dei vettori

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ F_2(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ \dots \\ F_n(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \end{pmatrix}.$$

Le funzioni F devono essere continue e derivabili perché il sistema possa essere risolto numericamente.

Da un'ED a un sistema di ED del I ordine

Ogni equazione differenziale di ordine n può essere ricondotta a un sistema di n equazioni differenziali del I Ordine.

Consideriamo ad esempio l'equazione del II ordine:

$$\ddot{y} = g(t, y, \dot{y})$$

Essa è evidentemente equivalente al sistema :

$$\begin{cases} Y_2 = \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 = g(t, Y_1, Y_2) \end{cases}$$

Metodi di soluzione numerica

Supponiamo di avere l'equazione

$$\dot{y} = f(t, y); \quad y(t_1) = y_1$$

Non faremo alcun tentativo di approssimare la soluzione esatta su un intervallo continuo della variabile indipendente t, ma cercheremo di costruire una sequenza di valori

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

che approssimano il valore di y(t) nei punti

$$t_1, t_2, t_3, \ldots$$

In genere i t_i sono equidistanti

$$t_{i+1} = t_i + h$$

con h costante.

Errori computazionali

Per errori computazionali si intendono quelli introdotti dal calcolatore o altro sistema usato.

Di questo tipo sono gli errori di *troncamento* o quelli legati al *calcolo delle formule*. Questi ultimi sono insiti, ad esempio negli algoritmi che la macchina usa per valutare le funzioni elementari.

Questo tipo di errore può essere tenuto sotto controllo, almeno fino ad un certo punto, aumentando il numero di cifre significative usate nel programma di calcolo.

Errori di discretizzazione

Sono gli errori che dipendono dal fatto di lavorare su un intervallo discreto della variabile indipendente.

Possiamo definire:

- Errore vero o globale. Per ogni punto $t=t_i$

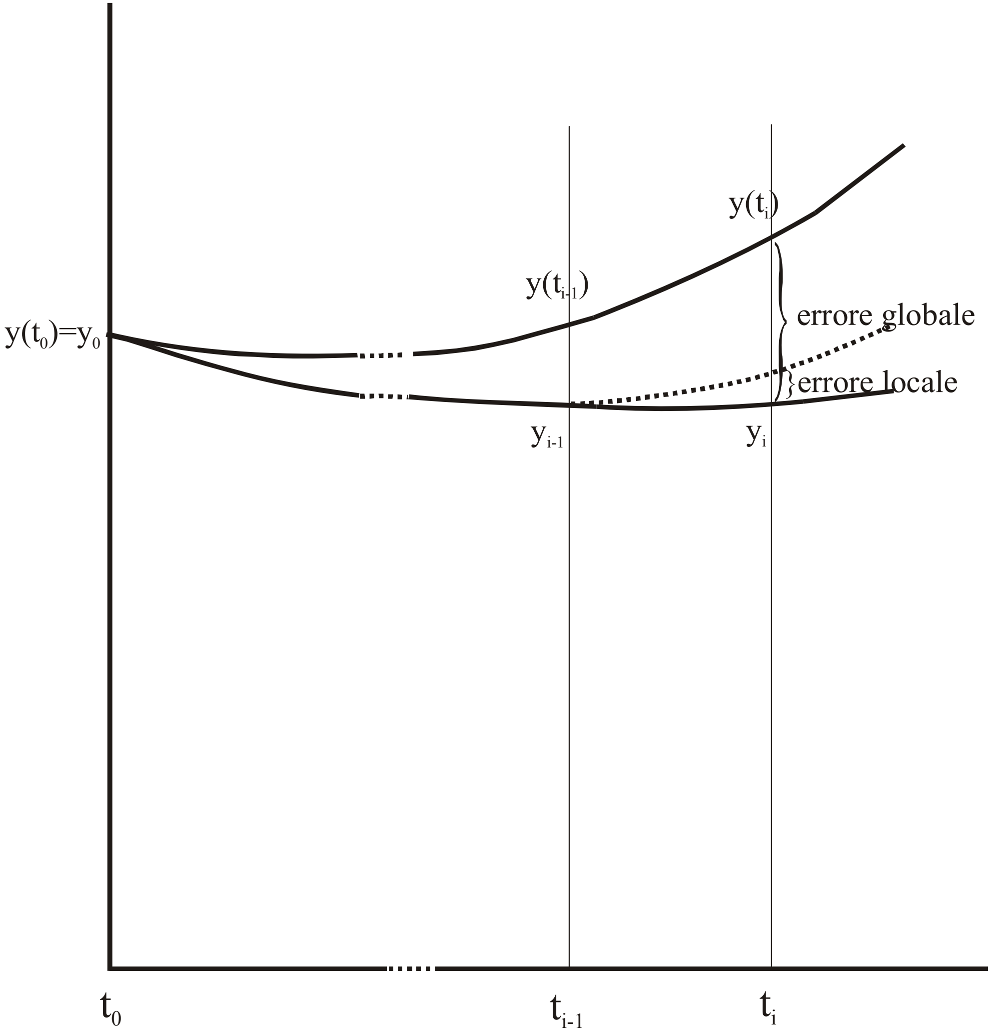
$$E_i=y(t_i) - y_i$$

- Errore locale. Detta u(t) la soluzione del problema con condizioni iniziali $u(t_{i-1})=y_{i-1}$, l'errore locale è

$$D_i=u(t_i) - y_i$$

L'errore locale, cioè, è l'errore commesso solo nell'ultimo passo di integrazione tra t_{i-1} e t_i.

Errore globale – Errore locale



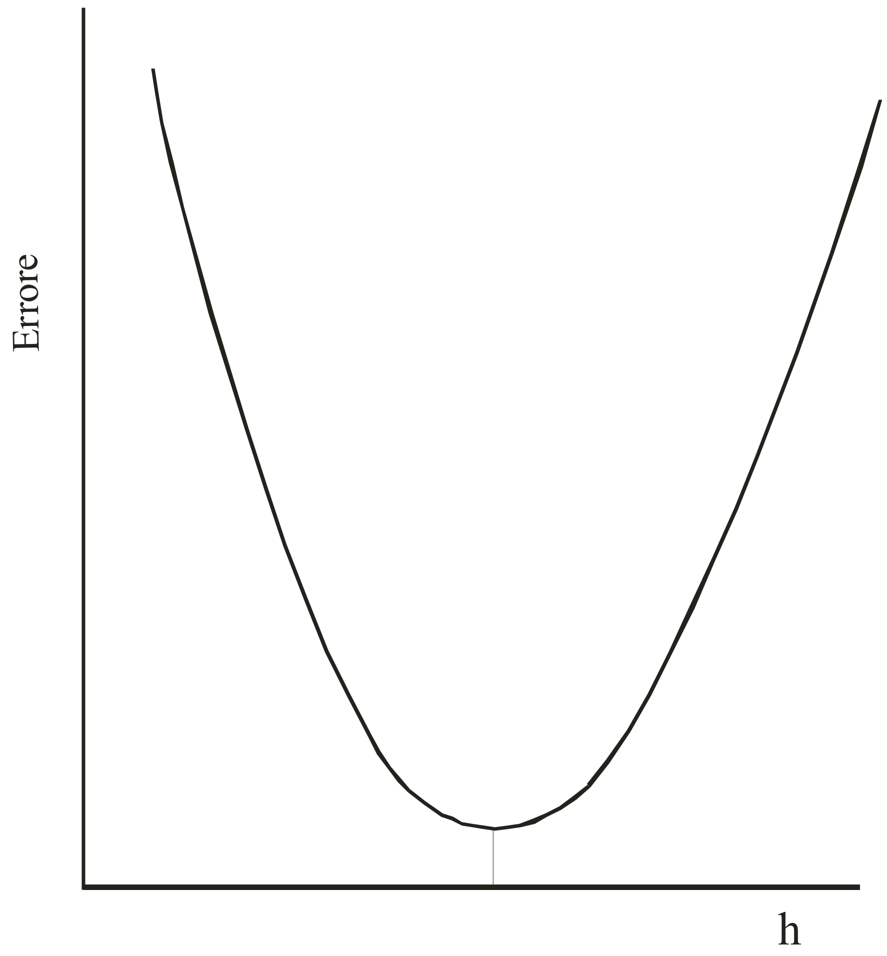
Gestione dell’errore

- Abbiamo detto che gli errori computazionali diminuiscono al crescere del numero di cifre significative. Tuttavia in generale questo non può essere fatto oltre un certo limite. Inoltre è chiaro che più calcoli si fanno, maggiore è l’errore.
- L’errore di discretizzazione può essere diminuito rendendo il passo *h* sempre più piccolo. Così facendo, tuttavia, si aumenta il numero di punti presenti nell’intervallo considerato, e quindi si aumenta il numero di calcoli.

In conclusione occorre conciliare due esigenze contrapposte.

(Nel nostro caso il limite maggiore sarà, tuttavia, legato al tempo di calcolo.)

Andamento qualitativo dell'errore



Metodo di Eulero

Riprendiamo la generica ED del I ordine

$$\dot{y} = f(t, y); \quad y(t_1) = y_1$$

Il metodo di Eulero consiste nel ricavare $y(t_{i+1})$ a partire da $y(t_i)$, dove

$$t_{i+1} = t_i + h,$$

utilizzando lo sviluppo di Taylor troncato al I ordine.

$$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + h \cdot \dot{y}(t_i) = y(t_i) + h \cdot f(t_i, y(t_i))$$

Quest'ultima formula rappresenta semplicemente l'approssimazione della derivata con il rapporto incrementale e quindi può essere facilmente recepita da uno studente, magari con l'aiuto di qualche grafico.

Applicazione 1

Usare il metodo di Eulero per trovare il valore approssimato di $y(1)$, dove $y(t)$ soddisfa l'ED

$$\dot{y}(t) = y \quad \text{con} \quad y(0) = 1$$

(Soluzione $y(t) = e^t$)

Usare inizialmente $h=0.25$ e valutare l'errore globale.

Provare poi a ripetere l'esercizio diminuendo h fino a rendere l'errore globale inferiore all'1%.

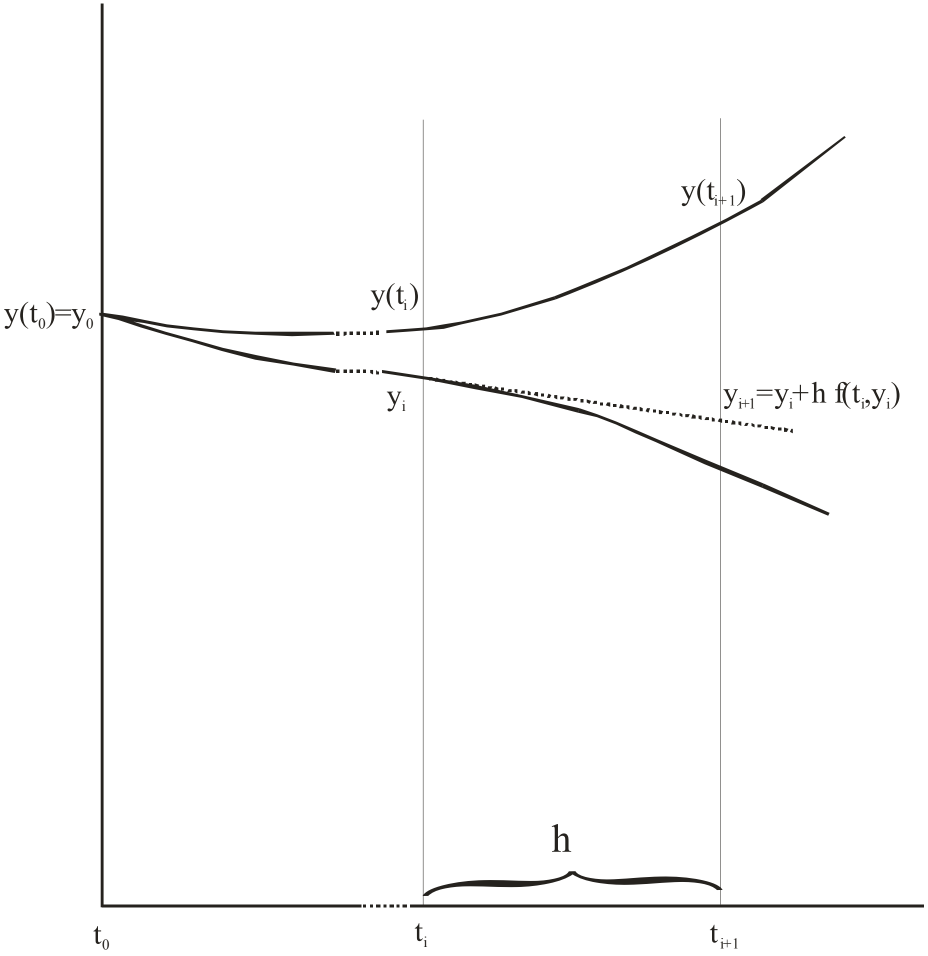
Errore locale nel metodo di Eulero

- Con il metodo di Eulero si calcola

$$y_{i+1} \neq y(t_{i+1})$$

usando la tangente alla curva in t_i.

- Fonte dell'errore è la distanza h di t_i da t_{i+1}.



Metodo di Eulero - Cauchy

Se non si vuole ridurre h, per non aumentare i calcoli, possiamo cercare di valutare la derivata *f(t,y)* nel punto $t_i+h/2$, più vicino a t_{i+1}

$$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + h \cdot \dot{y}\left(t_i + \frac{h}{2}\right) = y(t_i) + h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \cong$$

$$\cong y(t_i) + h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y(t_i) + \frac{h}{2} f\left(t_i, y(t_i)\right)\right)$$

Cioè, per calcolare la derivata f, si considera $y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)$ come approssimazione (di Eulero) al valore della funzione in $t_i + \frac{h}{2}$.

Applicazione 2

Usare il metodo di Eulero – Cauchy per approssimare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{y} = y^2 + 1 \quad \text{con} \quad y(0) = 0$$

in t=1 usando il passo h=0.1.

Valutare l'errore globale.

(Soluzione esatta $y=tan(t)$.)

Esercitazione

Spessore del nastro di una cassetta.

Il nastro di una Compact Cassette da 60' ha uno spessore h di circa 15 μm. Esso può essere trovato indirettamente misurando come varia la parte di nastro avvolta r nel tempo. Supponiamo di far partire il registratore all'istante t=0 quando $r=r_0$. Nel tempo Δt la bobina sarà ruotata di un angolo $\Delta\theta$ corrispondente a un numero di giri Δn tale che

$$\Delta n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

In corrispondenza il raggio r della bobina sarà variato di $\Delta r = \Delta n \cdot h$ e, quindi, avremo

$$\Delta r = \frac{h}{2\pi}\Delta\theta$$

Dove h è lo spessore.

Esercitazione

Nel limite $\Delta t \to 0$, si ha

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{2\pi}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2\pi}\frac{v}{r}$$

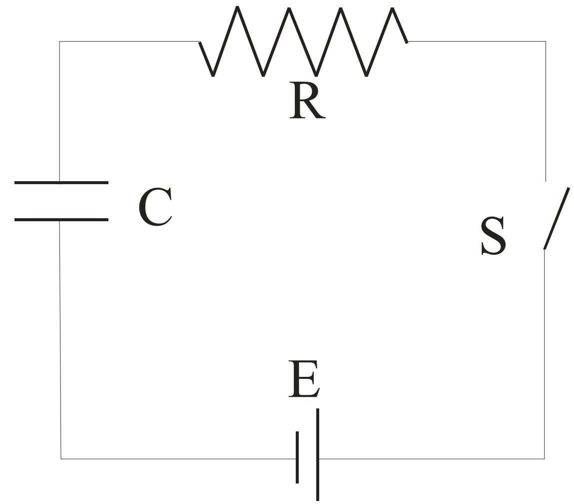
dove si è tenuto conto della relazione tra velocità angolare del nastro e velocità lineare.

La velocità lineare è nota: v=4,76 cm/s. Confrontando il risultato di una serie di misure con i dati ottenuti integrando questa equazione per vari valori di h, possiamo ottenere una stima di questo parametro.

Usare il metodo di Eulero – Cauchy per approssimare la soluzione dell'equazione differenziale

(Soluzione esatta $r^2(t) - r^2(0) = \frac{hv}{\pi} t$.)

Applicazione 3: circuiti RC



Ricaviamo l'ED per la carica di un condensatore dalla 2ª legge di Kirchhoff

$$E = IR + \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} - \frac{E}{R} = 0 \quad \text{con} \;\; q(0) = 0$$

L'equazione si integra facilmente separando le variabili

$$\frac{dq}{q - CE} = -\frac{dt}{RC} \;\Rightarrow\; \ln(q - CE) = -\frac{t}{RC} + \text{costante}$$

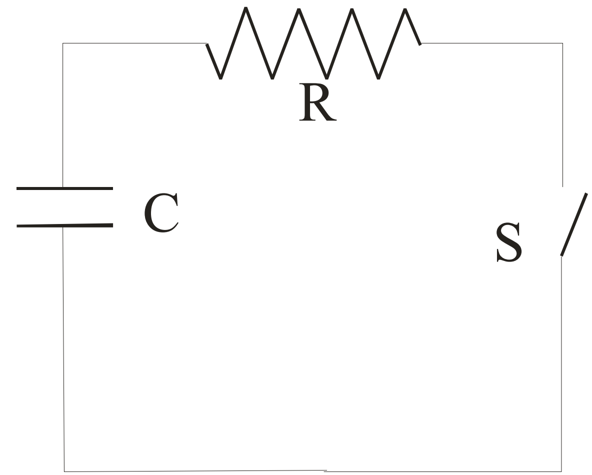
Imponendo la condizione iniziale per determinare la costante:

$$q = CE\left(1 - \exp(-t/\tau)\right), \quad \text{dove } \tau = RC$$

Esercizio: Applicare il metodo di Eulero-Cauchy con τ=100s.

Una volta caricato il condensatore si può procedere al processo di scarica.

In questo caso l'equazione è



$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=0 \quad \text{con} \quad \mathrm{q(0)=q_0}$$

La cui soluzione è

$$q=q_0\exp(-t/\tau)\ , \quad \text{dove ancora } \ \tau=RC$$

In laboratorio si può misurare con un tester la tensione ai capi del condensatore $V=q/C$. Sostituendo si ottiene l'equazione per V

$$\frac{dV}{dt}+\frac{V}{RC}=0 \quad \text{con} \quad \mathrm{V(0)=V_0}=\frac{\mathrm{q_0}}{C}$$

La cui soluzione è

$$V=V_0\exp(-t/\tau)$$

Applicazione 3

t	V
0	9,58
20	7,36
40	5,81
60	4,61
80	3,59
100	2,93
120	2,34
140	1,87
160	1,46
180	1,21
200	0,98
220	0,8
240	0,65
260	0,53
280	0,44
300	0,36

Nel processo di scarica di un condensatore si ottengono le misure mostrate in tabella per la tensione ai capi del condensatore.

• Ripetere l'integrazione dell'ED per la tensione per vari valori di τ compresi tra 80 e 90s con passo di 1s

• Calcolare per ciascuna delle integrazioni

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{16} \left(V_i^{teor.} - V_i^{sper.} \right)^2$$

• Trovare l'integrazione che dà il minimo valore di χ^2 determinando così la migliore valutazione di τ.

Considerazioni sull'applicazione 3

In questa possibile esperienza di laboratorio, presentata a questo punto perché legata ad un'eq. diff. del I ordine, l'interesse deriva non tanto dal passaggio

$$\text{dati} \rightarrow \text{modello} \rightarrow \text{dati},$$

quanto:

- dalla possibilità di usare la simulazione per valutare una grandezza fisica in maniera indiretta
- dal poter mettere in evidenza l'importanza delle condizioni iniziali
- dal fatto che l'equazione costituisce un modello applicabile in vari campi dalla radioattività all'epidemiologia.

Metodo 1 di calcolo per ED del II ordine Sistema del I ord. con Eulero o E.-Cauchy

Come abbiamo già visto l'equazione

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$$

è evidentemente equivalente al sistema del I ordine:

$$\begin{cases} z = \dot{y} \\ \dot{z} = f(t, y, z) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = \dot{y}_0 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero avremo:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_i \\ z_{i+1} = z_i + hf(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

Metodo 2 di calcolo per ED del II ordine
Sviluppo di Taylor al II ordine

Per l'equazione $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ con $y(t_0) = y_0$ e $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$

possiamo anche utilizzare lo sviluppo di Taylor al II ordine

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\dot{y}_i + \dfrac{h^2}{2} f(t_i, y_i, \dot{y}_i) \\ \dot{y}_{i+1} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} \end{cases}$$

La 2ª equazione può essere sostituita da

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + hf(t_i, y_i, \dot{y}_i)$$

Nel caso di un'equazione del moto, questo corrisponde a considerare un moto con accelerazione costante invece che con velocità costante in ciascun intervallo di tempo *h*.

Metodo 3 di calcolo per ED del II ordine Algoritmo di Verlet

Data sempre l'ED $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ con $y(t_0) = y_0$ e $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ notiamo che, conoscendo y in tre punti possiamo definire anche la derivata seconda discreta

$$\dot{y}_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad , \quad \dot{y}_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\ddot{y}_i = \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i - h\dot{y}_i}{h^2} = f(t_i, y_i, \dot{y}_i)$$

Dalla 2ª equazione si ricava

$$y_{i+1} = y_i + h\dot{y}_i + h^2 f(t_i, y_i, \dot{y}_i)$$

Per il passo successivo occorre anche determinare $\dot{y}_{i+1}$ usando la definizione precedente.

Applicazione 4: caduta di un grave

- Utilizzare i tre algoritmi descritti per trovare la soluzione dell'equazione per il moto di un grave al tempo t=11s

$$\ddot{z} = g \;\; \text{con} \;\; z(0) = 0 \;\; \text{e} \;\; \dot{z}(0) = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Individuare l'algoritmo che approssima meglio la soluzione esatta

Applicazione 5: oscillatore armonico

Consideriamo un corpo di massa m vincolato ad una molla di costante elastica k. Il moto del corpo è descritto da

$$m\ddot{x} = F = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

che può essere facilmente risolta

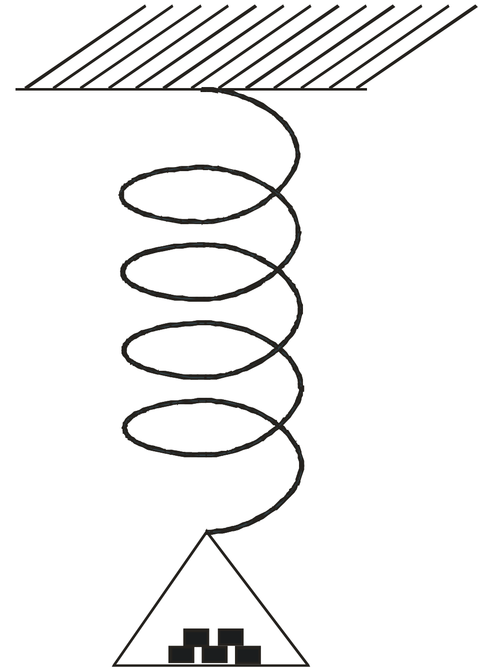
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Dove A e φ sono determinati dalle condizioni iniziali. Dalla pulsazione ω si può ricavare il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Da questa espressione vediamo che la misura della massa m e della costante elastica k permettono la determinazione di T.

Supponiamo di avere l'apparato in figura in cui è possibile variare la massa ponendo dei bulloni di massa m=28,85g su un cestello di massa M=90,45g.



Se dessimo per acquisiti i risultati ottenuti per integrazione potremmo determinare la costante k a partire dalla misura del periodo T.

Tuttavia anche da una integrazione numerica è possibile determinare il valore di k necessario per ottenere un certo valore di T.

Supponiamo di avere effettuato misure del periodo usando un diverso numero n di bulloni, cioè diverse masse. Avremmo ottenuto una tabella del tipo

n	1	2	3	4	5	6	7	8
T	0,53	0,59	0,65	0,71	0,76	0,80	0,86	0,92

Per ciascun valore della massa dovremo integrare l'equazione e cambiare k fino a quando le soluzioni non avranno il periodo T relativo a quella massa. Gli 8 valori di k così ottenuti dovrebbero essere all'incirca uguali. Il loro valor medio darà una determinazione abbastanza affidabile di k.

Per l'integrazione numerica si può usare un qualsiasi metodo tra quelli che abbiamo visto per le ED del II ordine.

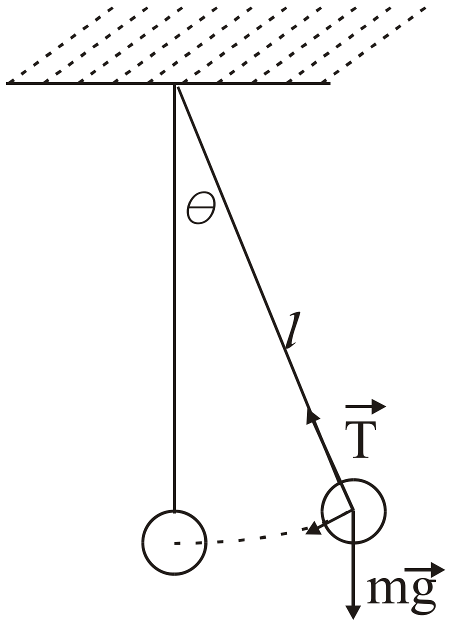
Le condizioni iniziali non hanno importanza per la determinazione del periodo. Basta moltiplicare per 4 l'intervallo di tempo nel quale l'oscillatore ha compiuto un quarto di oscillazione (in modo da non far crescere troppo l'errore globale).

Applicazione 6: pendolo semplice
Misura dell'accelerazione di gravità

La II legge della dinamica per il pendolo

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La componente lungo il filo della forza peso è compensata dalla tensione T, mentre la componente tangenziale genera il moto:



$$-g\sin\theta = a_t \text{ dove } a_t = \ell\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

Nel limite di piccole oscillazioni $sin\theta \sim \theta$, si ottiene un moto armonico di periodo $T = 2\pi\sqrt{\ell / g}$

Se le oscillazioni sono grandi il periodo dipende dall'ampiezza. Supponiamo di avere misurato il periodo di un pendolo di cui è nota la lunghezza. È possibile integrare l'equazione del moto variando il valore della costante di gravità fino a quando il periodo della soluzione non coincide con quello sperimentale. Otterremo così una determinazione della accelerazione *g*. Ripetendo più volte per diversi valori della lunghezza sia la parte sperimentale che quella numerica, si può avere una determinazione più precisa mediando sui valori ottenuti. Considerare per esempio i seguenti dati sperimentali

l (cm)	36,5	33	29,8	27	24	21	18
T(s)	1,20	1,15	1,08	1,03	0,97	0,91	0,84

Altri suggerimenti:

- Studiare la dipendenza del periodo dalla lunghezza usando gli stessi dati
- Verificare l'isocronismo per piccole oscillazioni
- Studiare la dipendenza del periodo dall'ampiezza delle oscillazioni a fissata lunghezza
- Esaminare il caso delle oscillazioni smorzate introducendo una forza di attrito tangenziale proporzionale alla velocità
- Esaminare il caso delle oscillazioni forzate introducendo una forza sinusoidale nel tempo
- Considerare il caso di oscillazioni forzate e smorzate che, per particolari valori dei parametri, può dare un moto caotico.

Considerazioni sulle applicazioni 5 e 6

Queste esperienze di laboratorio mostrano alcune tipiche caratteristiche della modellizzazione:

- nella costruzione del modello si attua una drastica riduzione dei gradi di libertà: un pendolo diventa

  un punto materiale + un filo inestensibile
- il modello, come avviene i generale per la Meccanica consiste essenzialmente nell'espressione della forza da inserire nella II Legge della Dinamica
- oltre alla misura di costanti caratteristiche del fenomeno, il modello si presta a essere reso più complesso.

Sistemi di ED del II ordine

Spesso accade che le ED del II ordine siano più di una: ad esempio quando si studia il moto in più dimensioni.

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ \ddot{y} = g(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases}$$

Nei casi più semplici esistono coordinate che disaccoppiano il moto:

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \\ \ddot{y} = g(y, \dot{y}) \end{cases}$$

Basta in ogni caso applicare uno qualsiasi dei metodi già visti per le ED del II ordine separatamente a ciascuna coordinata.

Esercizio 7: moto dei corpi celesti

Si vuole studiare il moto dei corpi soggetti alla legge di gravitazione universale di Newton

$$\vec{F} = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Forza centrale ⌗moto piano ⌗ sufficienti 2 coordinate

$$\begin{cases} \ddot{x} = -GM\dfrac{x}{r^3} \\ \ddot{y} = -GM\dfrac{y}{r^3} \end{cases} \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per l’integrazione numerica occorre quindi:

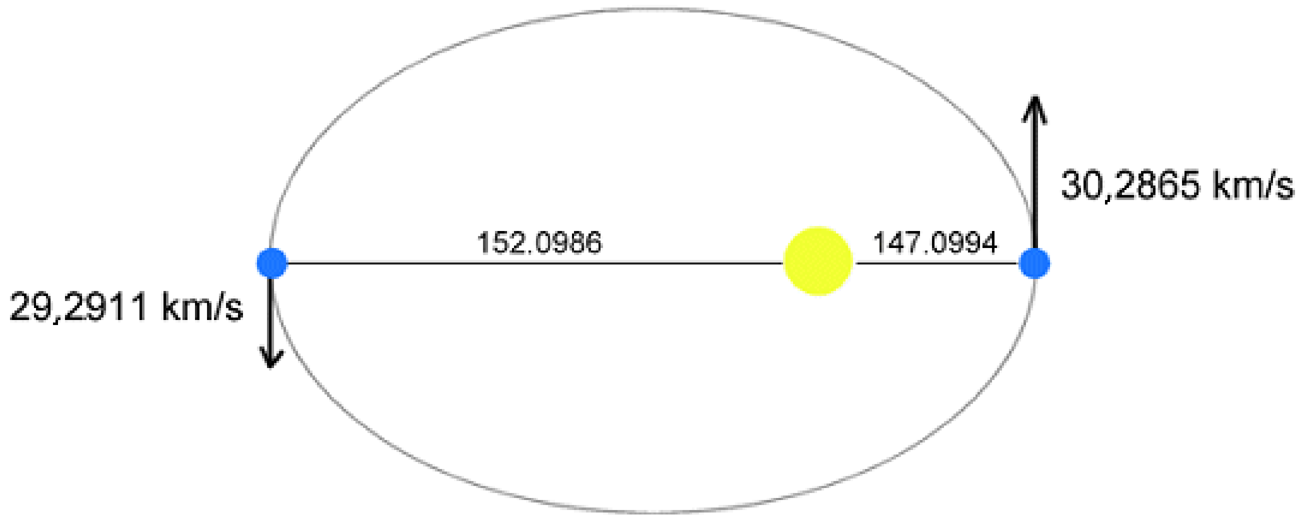
1. Da $x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i$ calcolare r_i
2. Calcolare quindi $x_{i+1}, y_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \dot{y}_{i+1}$ usando uno degli algoritmi già visti per le ED del II ordine. Ad esempio, con il metodo di Verlet (consigliabile):

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h\dot{x}_i - h^2 GM \dfrac{x_i}{r_i^3} \\ \dot{x}_{i+1} = \dfrac{(x_{i+1} - x_i)}{h} \\ y_{i+1} = y_i + h\dot{y}_i - h^2 GM \dfrac{y_i}{r_i^3} \\ \dot{y}_{i+1} = \dfrac{(y_{i+1} - y_i)}{h} \end{cases}$$

3. Iterare successivamente i passi 1 e 2 per ottenere l'orbita, fino a riottenere le condizioni iniziali nei casi di orbita chiusa.

Possibili obiettivi

- Determinare l'orbita terrestre ($G=6,67\ 10^{-11}\ m^3/Kg\ s^2$, $M_{sole}=1,99\ 10^{30}$ Kg, $M_{terra}=5,98\ 10^{24}$, $R_{perielio}=1,471\ 10^{11}$ m, $R_{afelio}=1,521\ 10^{11}$ m, $V_{perielio}=30,2865$ Km/s)



- Verificare la 3ª legge di Keplero

$$T^2 = \text{costante} \cdot a^3$$

dove *a* è il semiasse maggiore dell'orbita.

- Verificare la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad\qquad L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Variare le condizioni iniziali in modo da avere orbite aperte

- Modificare leggermente la dipendenza della forza da *r*, $r^2 \rightarrow r^{2+\epsilon}$ in modo da ottenere un moto di precessione dell'orbita
- …..

Considerazioni sull'applicazione 7

Essa può, ovviamente coprire solo una parte del ciclo di modellizzazione, cioè la fase di validazione di un modello.

Al di là del fascino che può avere per gli studenti imparare a simulare il moto dei pianeti, lo studio della gravitazione si presta a un lavoro interdisciplinare condotto insieme al docente di Storia e Filosofia.

- Anche qui si riduce un sistema complesso ad un punto materiale soggetto a una forza
- La forza è individuata in quella che dà origine a un fenomeno apparentemente lontano (caduta dei gravi)
- Una volta impostato l'algoritmo, si ha a disposizione una palestra per un gran numero di esercizi.

Ma in un liceo è possibile?

Nei licei la Fisica viene giustamente introdotta da un punto di vista sperimentale, troppo spesso in assenza di attività di laboratorio.

L'obiettivo è quello di formulare delle Leggi, ma, spesso, il livello di conoscenze di matematica diventa un ostacolo alla comprensione del vero significato delle leggi:

- le equazioni differenziali (ED) non si studiano
- le derivate si studiano solo in qualche liceo all'ultimo anno

Convinzioni sbagliate

Spesso questo dà luogo a veri e propri errori di comprensione.

Se si considera la II Legge della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

alcuni sono relativi al concetto stesso di forza:

- confusione, spesso derivante dal linguaggio comune, con i concetti di potenza, energia, massa, …
- l'idea che il movimento di un corpo derivi da una sua proprietà intrinseca
- L'idea che le forze siano solo di contatto

Non è sempre facile far capire che la forza rappresenta la modellizzazione dell'interazione tra due corpi.

Convinzioni sbagliate

Ma è lo stesso significato della II Legge della Dinamica

$$\vec{F}(\vec{r},t) = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

quando essa viene scambiata per un'equazione algebrica.

Infatti, poiché si è costretti a studiare solo il caso di una forza costante, lo studente è portato a pensare che si può ricavare l'accelerazione dal rapporto tra Forza e massa, e quindi velocità e posizione si ricavino dalle leggi per il moto uniformemente accelerato.

Nella simulazione numerica si comprende bene che la costanza della accelerazione è solo un'approssimazione valida per intervalli di tempo abbastanza piccoli.

La simulazione come antidoto

A combattere questi pregiudizi può essere utile proprio un’attività di simulazione:

- serve a chiarire il significato delle grandezze cinematiche
- permette di comprendere subito il ruolo della dipendenza funzionale della Forza, dal fatto che, ad un certo istante, le variazioni di posizione e velocità dipendano dal valore puntuale della forza
- fa capire il ruolo delle condizioni iniziali (non si può farne a meno)
- abitua a riportare i risultati su grafico e a interpretarli

Insegnare il calcolo numerico

Nel calcolo numerico quello che si fa è discretizzare la variabile indipendente continua.

Questo è il modo con cui normalmente vengono introdotti concetti come la velocità media e l'accelerazione media in Fisica, o analoghe grandezze in altre discipline (tassi).

La difficoltà, semmai, è il passaggio al concetto di velocità istantanea che nasconde il concetto matematico di limite.

L'introduzione del calcolo numerico deve avvenire contestualmente a questi concetti e può anche essere utile a introdurre le grandezze istantanee.

Insegnare il calcolo numerico

La proposta è quindi di introdurre l'uso del foglio elettronico già all'inizio della Cinematica, insegnando a studiare il moto uniforme e il moto uniformemente accelerato sul foglio elettronico mediante dati simulati o presi in laboratorio a intervalli costanti di tempo.

Riducendo tali intervalli si possono introdurre velocità e accelerazione istantanea (numericamente e con l'ausilio di grafici).

Moto uniforme e moto uniformemente accelerato possono poi essere usati per la soluzione della II Legge della Dinamica nel caso di forze non costanti (sono le approssimazioni al I e al II ordine che abbiamo visto).

Qualche suggerimento 1/4

Si può iniziare studiando il moto uniforme.

Supponiamo di conoscere la posizione e velocità iniziale.

Dati gli istanti di tempo con distanza uniforme Δt

$$t_0 \quad t_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad t_i \quad t_{i+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad t_{N-1} \quad t_N$$

per qualsiasi i si ha la stessa velocità che è uguale alla velocità media

$$v_i = v = \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{\Delta t}$$

da cui si ricava l'equazione che consente di fare una prima simulazione numerica, ricavando dalle condizioni iniziali, la posizione agli istanti successivi:

$$s(t_{i+1}) = s(t_i) + v\Delta t$$

Spazio e velocità in funzione del tempo risultanti della simulazione possono essere riportati in grafici.

Qualche suggerimento 2/4

Consideriamo poi la presenza di una forza, quindi il moto accelerato.

Normalmente la forza non dipende dall'istante di tempo direttamente, ma soltanto attraverso la posizione ed, eventualmente, la velocità.

Per la II Legge della Dinamica si ha

$$a(t_i) = \frac{F(s(t_i), v(t_i))}{m}$$

La velocità non sarà più costante; in ciascun intervallo la possiamo approssimare con la media delle velocità agli estremi

$$\bar{v} = \frac{v(t_{i+1}) + v(t_i)}{2}$$

Quindi il moto nell'intervallo (t_i, t_{i+1}) è dato da

$$s(t_{i+1}) \cong s(t_i) + \bar{v}\Delta t = s(t_i) + \frac{v(t_{i+1}) + v(t_i)}{2}\Delta t$$

Qualche suggerimento 3/4

Le condizioni iniziali riguardano l'istante t_i, occorre quindi una espressione per $v(t_{i+1})$.

L'accelerazione media nell'intervallo (t_i, t_{i+1}) è data da

$$a_m = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t}$$

da cui possiamo ricavare $v(t_{i+1})$:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + a_m \Delta t \cong v(t_i) + a(t_i)\Delta t$$

Approssimazione dovuta al fatto che possiamo ricavare l'accelerazione dalla II Legge della Dinamica solo all'istante t_i, per il quale conosciamo posizione e velocità e quindi la forza F. Questa equazione ci dice come evolve la velocità; inoltre inserita nell'equazione per la posizione ci dà:

$$s(t_{i+1}) \cong s(t_i) + v(t_i)\Delta t + a(t_i)\frac{\Delta t^2}{2}$$

Qualche suggerimento 4/4

In conclusione le equazioni che permettono di simulare il moto, a partire dalla conoscenza ad un certo istante di tempo di posizione e velocità, sono, tenendo conto della II Legge della Dinamica:

$$\begin{cases} s(t_{i+1}) \cong s(t_i) + v(t_i)\Delta t + \dfrac{1}{m}F(s(t_i), v(t_i))\dfrac{\Delta t^2}{2} \\ v(t_{i+1}) \cong v(t_i) + \dfrac{1}{m}F(s(t_i), v(t_i))\Delta t \end{cases}$$

Possiamo, a questo punto, fare notare che queste equazioni corrispondono ad approssimare il moto, entro ciascun intervallo di tempo Δt, con un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante.

Dal punto di vista matematico, abbiamo ottenuto, con ragionamenti abbastanza semplici, l'approssimazione corrispondente a troncare la serie di Taylor al II ordine.

Progettare un'unità didattica

Abbiamo detto che l'obiettivo è quello formulare unità didattiche che ripercorrono, per particolari fenomeni, il ciclo di costruzione di un modello. Questo è possibile per qualsiasi fenomeno che normalmente è oggetto di esperienze (vedi Laboratorio di Fisica I e II).

Queste esperienze dovranno essere però completamente rielaborate dal punto di vista che vi è stato presentato.

Mentre in quei corsi l'esperimento è finalizzato alla verifica di una legge già nota o alla misura di una costante, in questa nuova ottica deve essere pensato come una parte del processo di apprendimento basato sulla modellizzazione.

Unità di didattiche: prima fase

Vanno considerate quindi le seguenti fasi:

1. OSSERVAZIONE

Lo studente viene posto davanti alla fenomenologia. Questa fase non necessita sempre di un laboratorio, basta a volte richiamare fatti che si incontrano nella vita di ogni giorno per i quali si può identificare una causa, una grandezza comune caratteristica. In questa fase vanno identificate le variabili che influenzano il fenomeno, le domande e le ipotesi che saranno la base per le fasi successive.

Questi aspetti possono utilmente costituire una scheda studente che indirizzi l'attività di osservazione.

Unità di didattiche: seconda fase

2. PREDIZIONE

A questo punto lo studente ha a disposizione le variabili identificate nella prima fase.

Un modello ha sempre un numero di variabili limitate e rappresenta una semplificazione delle condizioni reali. Quali sono le variabili trascurabili e quelle necessarie perché il modello sia di qualche consistenza?

Se il quadro si è fatto sufficientemente chiaro si passa all'elaborazione del modello, ad esempio l'espressione della forza responsabile di un certo tipo di moto. In caso contrario si possono elaborare le problematiche alle quali una fase di sperimentazione può dare risposta.

Unità di didattiche: terza fase

3. SPERIMENTAZIONE

La fase di sperimentazione può servire a selezionare tra diverse ipotesi elaborate nella fase predittiva, ma anche a dare un quadro più preciso alla fase osservativa. La distinzione tra le fasi non va vista quindi in stretto senso temporale.

Quando infine il modello è stato elaborato essa assume l'aspetto di primo momento di validazione. Se, ad esempio, una variabile svolge un ruolo essenziale, il fenomeno sarà sensibile alle sua variazioni e si cercherà tramite l'analisi dei dati di formalizzare questa dipendenza.

Unità di didattiche: quarta fase

4. SIMULAZIONE

Questa fase interviene quando il modello è stato formalizzato completamente e rappresenta il momento di validazione finale. Il fenomeno ora è rappresentato da una espressione matematica suscettibile di una simulazione numerica.

Vanno sottolineati i vari aspetti della simulazione:

1. La possibilità di simulare i fenomeni dalla cui osservazione siamo partiti
2. La possibilità di andare oltre, cioè di simulare lo stesso fenomeno in condizioni nuove
3. La capacità di dare un valore numerico alle costanti che appaiono nella legge fisica tenendo conto di risultati sperimentali

Moto in presenza di resistenza del mezzo

Il fenomeno che consideriamo riguarda oggetti che, benché soggetti alla forza peso, non appaiono muoversi in caduta libera: pioggia, paracadutista, …

Se sottoposte unicamente alla forza peso, gocce di pioggia che cadessero da un'altezza di 300 m arriverebbero al suolo con una velocità di circa 75 m/s=270 Km/h! Sperimentalmente si trova che esse cadono con una velocità costante v_{lim} compresa tra 2 e 8 m/s.

La forza di resistenza dipende da vari fattori: forma, dimensioni, velocità e direzione del moto, eventuale moto di rotazione, densità delle gocce (dipendente da quota e temperatura), …

Fase osservativa – Scheda studente

Costruiamo la prima scheda studente. Occorre:

- richiamare la fenomenologia
- evidenziare la presenza di una forza frenante
- far capire per quali fenomeni la spinta di Archimede è importante e per quali non lo è
- far individuare l'esistenza di una velocità limite, che però sarà mostrata meglio nella successiva sperimentazione
- far individuare l'importanza di alcune variabili, come la massa, la forma, il volume considerando i diversi tempi di caduta per diversi oggetti

Esempio di scheda studente

- I gravi, in presenza di acqua o aria, cadono di moto uniformemente accelerato?
- Quali variabili influenzano il moto di un grave in presenza di aria?
- Due palline delle stesse dimensioni ma di peso diverso, lasciate cadere dalla stessa altezza, raggiungeranno il suolo contemporaneamente?
- Cosa succede se faccio cadere due oggetti dello stesso peso ma di massa diversa (p.e. due fogli di carta identici di cui uno accartocciato)?
- Sposta in aria una volta lentamente, una volta velocemente, una larga busta di cartoncino in cui hai infilato una mano. La resistenza al moto è molto diversa nei due casi. A cosa attribuisci la differenza?
- Elenca i fattori che, secondo te intervengono nel determinare la resistenza dell’aria.
- Supponendo che una goccia di pioggia si formi a 300 m di altezza, con quale velocità dovrebbe arrivare al suolo? Ti sembra che qualcosa di simile accada?
- Nel Dizionario Enciclopedico Treccani troviamo i seguenti dati:

Esempio di scheda studente

Precipitazione	Quantità in mm/h	Diametro in mm	Vel. caduta al suolo (m/s)
Nebbia secca	tracce	0,01	0,003
Nebbia umida	0,05	0,1	0,25
Nebbia piovigginosa	0,25	0,2	0,75
Pioggia leggera	1	0,5	2
Pioggia moderata	4	1	4
Pioggia forte	15	1,5	5
Pioggia violenta	40	2	6
Nubifragio	100	3	8

Questa tabella mostra misurazioni della velocità a terra di gocce di pioggia. Questa velocità non dipende dall'altezza delle nuvole da cui cadono. Questi dati sperimentali cosa suggeriscono sull'andamento della velocità di caduta?

- Oltre alla forza peso, individui altre forze che agiscono sulla goccia?

Esempio di scheda studente

- Il fatto che le gocce di pioggia cadono con una velocità costante può essere spiegato con la spinta di Archimede?
- Possiamo trascurare la spinta di Archimede? (Calcola quanto vale il rapporto fra di essa e la forza peso)

Fase predittiva

La fase osservativa dovrebbe avere già portato all'individuazione delle variabili che influenzano il fenomeno. Ad esempio la domanda sul foglio di carta dovrebbe sottolineato l'importanza della densità e quella sul moto della mano l'influenza della sezione ortogonale alla direzione di moto.

Dovrebbe anche essere chiaro che la resistenza dell'aria sembra dipende dalla velocità con cui si muove l'oggetto.

Nell'analizzare le risposte degli studenti occorre fare attenzione al fatto che risposte esatte possono derivare da concetti sbagliati. Ad esempio le due palline di peso diverso, ma di forma e volume uguale cadono in tempi diversi proprio in quanto la forza di attrito è la stessa e l'accelerazione è data da

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{\vec{F}_{attr}}{M}$$

Uno studente può invece essere ricorso all'idea comune che l'oggetto più pesante arriva prima perché più attratto dalla Terra.

Il modello descrittivo

Costruiamo ora un modello puramente descrittivo semplice.

Descrizione dell'oggetto: sfera rigida di raggio *r* => per simmetria la resistenza del mezzo sarà diretta nella direzione del moto

Descrizione del moto: in assenza di correnti nel mezzo, in queste condizioni, il moto sarà rettilineo. Per un sistema di riferimento con origine nel punto in cui il corpo comincia a cadere e rivolto verso il basso, la posizione *y(t)* e velocità *v(t)* saranno funzioni crescenti del tempo

Descrizione delle interazioni: oltre alla forza peso, l'altra forza nota sicuramente presente è la spinta di Archimede (prerequisito):

$$\vec{F}_P = m\vec{g} \qquad \vec{F}_A = m\frac{\rho_{aria}}{\rho_{acqua}}\vec{g}$$

il rapporto tra le densità è $1{,}22\ 10^{-3}$, quindi F_A può essere trascurata.

Fase di sperimentazione

Le forze note non sono sufficienti a spiegare il fenomeno, ma abbiamo già qualche elemento per individuare le forze di attrito. Per validare le ipotesi fatte a questo proposito nella fase osservativa si può ricorrere ad alcuni semplici esperimenti:

- caduta di oggetti di uguale massa e dimensioni diverse che mostra come il valore della velocità limite dipende dalle caratteristiche geometriche dell'oggetto in moto
- caduta di oggetti di uguale forma e dimensioni, ma di massa diversa che mostra che il valore della velocità limite dipende dalla massa dell'oggetto in moto

Gli esperimenti sono realizzati utilizzando un sensore di moto collegato ad un computer. Gli oggetti in moto sono dei cestini di carta per dolci.

Esperimento 1: oggetti diversi di uguale massa

Tre cestini di dimensioni diverse sono resi di uguale massa (0,58 g) fissando pezzetti di carta con adesivo all'interno.

Vengono fatti cadere da un'altezza di circa 2 m e il sensore di moto registra posizione e velocità dei cestini in funzione del tempo.

Si può notare che il valore della velocità limite viene raggiunto in tempi diversi ed è diverso.

Tale valore può essere messo in relazione con la sezione ortogonale alla direzione del moto.

È importante far distinguere allo studente le due fasi del moto:

- una prima fase in cui la resistenza del mezzo va crescendo e la velocità crescendo
- una seconda fase in cui il moto prosegue a velocità costante e la resistenza del mezzo non muta il suo valore massimo raggiunto

Si può a questo punto ipotizzare che la forza viscosa massima dipenda dal raggio dell'oggetto e dalla velocità limite raggiunta.

Esperimento 1: Esempio di scheda studente

- Eseguito l’esperimento della caduta in aria di cestini di diversa forma e uguale massa, l’elaborazione del foglio Excel cosa mette in evidenza?
- Quale parametro differenzia gli oggetti?
- Puoi affermare che il valore di questo parametro influenza il valore della velocità limite?
- Trascurando la spinta di Archimede, quanto vale la forza di resistenza dell’aria durante la fase di moto costante?
- Questo valore, uguale per tutti i cestini, viene raggiunto a valori di velocità limite sempre più grandi per superfici sempre più piccole. Cosa concludi?

Esp. 2: oggetti di uguale forma e massa diversa

L'esperimento precedente viene ripetuto per 5 cestini uguali impilati in maniera da avere la stessa forma e dimensione di un solo cestino.

Successivamente si ripete l'esperimento per 4 volte togliendo ogni volta un cestino.

Si può ricavare una tabella in cui si riporta la massa dei cestini, la velocità limite raggiunta e il suo quadrato. Riportando questi dati in un grafico si potrà notare che essi si accordano male con una dipendenza lineare della velocità dal numero dei cestini e molto meglio con una dipendenza dal quadrato della velocità.

Possiamo anche fare notare agli studenti come il fatto che la velocità limite sia più grande per pesi più grandi significa che la forza viscosa massima raggiunge valori più elevati perché deve equilibrare pesi più elevati.

Esperimento 2: Esempio di scheda studente

- I dati ottenuti evidenziano che, a parità di forma e dimensione, masse più grandi raggiungono velocità limite più elevate. D'altra parte la forza viscosa nella fase di moto costante equilibria la forza peso (più grande per masse più grandi):

$$M\vec{g} = \vec{F}_{attr}^{\;MAX}$$

Cosa possiamo desumere per la dipendenza della forza viscosa dalla velocità?

- Usando un foglio Excel, riporta in un grafico l'andamento di v_{lim} e v_{lim}^2 in funzione del numero dei cestini. Trova, per ciascun gruppo di dati, la retta che rappresenta la linea di tendenza. Devi imporre il passaggio per lo zero?
- Per quale gruppo di dati ottieni la migliore linea di tendenza?
- Raccogli tutte le conclusioni a cui sei giunto su come la forza viscosa dipende dai parametri che hai esaminato.

Il modello esplicativo

Come si è detto le forze note non sono sufficienti a spiegare l'esistenza di una velocità limite. La resistenza del mezzo deve essere una forza variabile che dipende dalle condizioni del moto.

Una forza che si oppone al moto e cresce al crescere della velocità può intuitivamente essere la soluzione. Si possono proporre due modelli:

$$\vec{F}_1 = -6\pi\,\eta\,r\,\vec{v} \qquad \vec{F}_2 = -0{,}2\pi\,r^2\rho_{\text{aria}}\,v^2\;\hat{j}$$

Il primo modello è la Legge di Stokes e corrisponde al caso di un flusso laminare ed è valido per piccoli r ($<10^{-7}$ m) e piccole velocità ($<0{,}25$ m/s), il secondo al caso del flusso a scia vorticosa ed è valido per raggi e velocità superiori.

Ottimi risultati si hanno considerando l'interpolazione tra i due modelli:

$$\vec{F}_{res} = -(A\,r\,v + B\,r^2\,v^2)\;\hat{j}$$

La simulazione del modello

I due modelli proposti possono essere simulati mediante foglio Excel.

Il confronto con gli esperimenti visti deve portare alla scelta tra i due modelli.

I vostri compiti:

- eseguire gli esperimenti e preparare una scheda docente
- eseguire la simulazione e preparare una scheda docente e una scheda studente su di essa.

Bibliografia

- M. Michelini, L. Santi, R. M. Sperandeo: Proposte didattiche su forze e movimento, Forum – Editrice Universitaria Udinese Srl (2002).
- A. B. Aarons: Guida all'insegnamento della Fisica, Zanichelli Editore (1995).