



Università degli studi di Bari
Facoltà di Scienze MM FF NN
Corsi di Laurea triennali in Fisica e Fisica Applicata

Trasformate Integrali di Fourier e di Laplace

Nicola Cufaro Petroni

anno accademico 2002-03

Indice

I	Trasformata di Fourier	1
1	Formula Integrale di Fourier	3
1.1	Richiami sulle Serie di Fourier	3
1.2	Formula integrale di Fourier	7
2	Trasformata di Fourier	11
2.1	Forma esponenziale della Formula Integrale di Fourier	11
2.2	Trasformazione di Fourier	12
2.3	Esempi di Trasformate di Fourier	18
3	Risoluzione di equazioni differenziali	31
3.1	Trasformazione di Fourier e Derivazione	31
3.2	Trasformata di Fourier e Convoluzione	34
3.3	Equazioni differenziali	37
II	Trasformata di Laplace	41
4	Trasformata di Laplace	43
4.1	Integrale di Laplace	43
4.2	Esempi	44
4.3	Trasformata bilatera di Laplace	47
5	Proprietà della Trasformata di Laplace	51
5.1	Olomorfia della Trasformata di Laplace	51
5.2	Regole di trasformazione	54

II

6	Inversione della Trasformata di Laplace	61
6.1	Teorema di unicità	61
6.2	Formula di Riemann	62
6.3	Regole di antitrasformazione	67
7	Risoluzione di equazioni differenziali e integrali	73
7.1	Equazioni differenziali e integrali	73
7.2	Esempi	76

Parte I
Trasformata di Fourier

Capitolo 1

Formula Integrale di Fourier

1.1 Richiami sulle Serie di Fourier

Supponiamo di considerare una funzione $f(t)$ che sia definita nell'intervallo $[-T/2, T/2]$: con ciò intendiamo che all'esterno di detto intervallo la funzione potrebbe

- essere definita in qualsiasi modo,
- essere definita ed essere periodica di periodo T ,
- non essere affatto definita.

Questa osservazione iniziale serve a mettere in evidenza il fatto che quel che è essenziale per la definizione della serie di Fourier di f è che essa sia definita in un intervallo limitato che noi, per semplicità di rappresentazione, e senza perdere di generalità, scegliamo simmetrico attorno all'origine. Posto ora con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$a_m = a_{-m} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos \frac{2m\pi s}{T} ds \quad (1.1)$$

$$b_m = -b_{-m} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sin \frac{2m\pi s}{T} ds \quad (1.2)$$

si dice **serie di Fourier** di f la serie trigonometrica così definita per ogni valore di t in $[-T/2, T/2]$:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{2m\pi t}{T} + b_m \sin \frac{2m\pi t}{T} \right) = \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) ds + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos \frac{2m\pi}{T}(s-t) ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

(nota che $b_0 = 0$ dalla sua definizione). Si osservi che in questo modo abbiamo soltanto definito la serie di Fourier, cosa sempre possibile per ogni funzione f dalla quale si possano calcolare i coefficienti (1.2), ma che non sappiamo né se tale serie converge, né – se converge – a cosa converge.

Condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier di una f data e le corrispondenti relazioni fra la sua somma ed f stessa sono ricapitolate nel seguente Teorema qui enunciato senza dimostrazione:

Teorema 1.1. *Se in $[-T/2, T/2]$ la funzione $f(t)$ è generalmente continua, generalmente derivabile, e se la sua derivata prima $f'(t)$ è generalmente continua con eventuali discontinuità tutte di prima specie, allora la sua serie di Fourier (1.3) converge in tutto $[-T/2, T/2]$ e la somma vale*

- $f(t)$, nei punti di $(-T/2, T/2)$ in cui f è continua;
- $\frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)]$, nei punti di $(-T/2, T/2)$ in cui f non è continua;
- $\frac{1}{2} \left[f(-\frac{T}{2}^+) + f(\frac{T}{2}^-) \right]$ negli estremi $-T/2$ e $T/2$ dell'intervallo.

All'esterno dell'intervallo $[-T/2, T/2]$ la serie converge ai valori che si ottengono con una ripetizione periodica dei valori assunti all'interno di $[-T/2, T/2]$.

Ricorderemo qui che

- f è *generalmente continua* se essa è continua in tutto $[-T/2, T/2]$ fatta eccezione al più per un numero finito di punti;
- f è *generalmente derivabile* se essa è derivabile in tutto $[-T/2, T/2]$ fatta eccezione al più per un numero finito di punti;
- un punto di discontinuità si dice di *prima specie* quando in esso la funzione ammette limiti finiti da destra e da sinistra, ma tali due limiti non coincidono.

Si può infine mostrare che le tre ipotesi del Teorema 1.1 assicurano automaticamente che anche le eventuali discontinuità di f sono di prima specie: per questo motivo non è necessario inserire esplicitamente questa proprietà fra le condizioni richieste. Naturalmente si verifica facilmente che una funzione che soddisfi tali condizioni è anche limitata.

Questo teorema ci garantisce che, all'interno di $[-T/2, T/2]$ la serie di Fourier riproduce correttamente i valori di f in tutti i punti in cui essa è continua. Nei punti in cui f non è continua, invece, (e negli estremi dell'intervallo) la serie (1.3) converge al valore medio fra i limiti da destra e da sinistra, valore che può non coincidere con quello di f . Siccome, però nelle ipotesi richiamate prima si richiede che il numero delle eventuali discontinuità sia finito, sarà facile eliminare anche la necessità di questa precisazione ridefinendo preliminarmente i valori di f in questi punti come

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)] . \quad (1.4)$$

In questo modo – senza modificare la $f(t)$ in maniera essenziale – i valori di $f(t)$ risultano sempre coincidenti con la somma della corrispondente serie di Fourier. Per il seguito, salvo diversa indicazione, supporremo sempre che tale precauzione preliminare sia stata presa in modo che la tesi principale del Teorema 1.1 potrà essere enunciata dicendo semplicemente che, se le ipotesi sono rispettate, *la serie di Fourier (1.3) converge in tutto $[-T/2, T/2]$ e la sua somma vale f .*

Osservazione 1.1. *In sostanza i risultati qui ricordati mostrano che la serie di Fourier converge proprio ai valori della funzione f nell'intervallo $[-T/2, T/2]$. All'esterno di tale intervallo, inoltre, a causa della periodicità delle funzioni che la compongono, la serie (1.3) continua sicuramente a convergere riproducendo periodicamente i valori da essa assunti in $[-T/2, T/2]$; e ciò avviene indipendentemente sia dal fatto che f sia o meno definita all'esterno di $[-T/2, T/2]$, sia dagli eventuali valori che essa vi assume. In pratica si hanno tre situazioni possibili:*

- *se f non è definita all'esterno di $[-T/2, T/2]$ la serie (1.3) la prolunga riproducendola periodicamente;*
- *se f è definita all'esterno di $[-T/2, T/2]$, ma non è periodica di periodo T , i valori (periodici) che la serie (1.3) assume all'esterno di $[-T/2, T/2]$ non coincidono con quelli di f ;*
- *solo se f è definita all'esterno di $[-T/2, T/2]$ ed è anche periodica di periodo T la serie (1.3) converge ai valori di f su tutto l'asse reale.*

Ricorderemo, infatti, che per costruire la serie (1.3) occorre solo considerare i valori di f in $[-T/2, T/2]$ in modo da poter calcolare i coefficienti (1.2), e che tutta la costruzione è invece perfettamente indipendente dagli eventuali valori di f all'esterno di $[-T/2, T/2]$. La serie (1.3) e la funzione f sono cioè due oggetti diversi: sotto le ipotesi del Teorema 1.1 i loro valori coincidono in $[-T/2, T/2]$, ma possono essere completamente diversi all'esterno di $[-T/2, T/2]$. Diremo allora che la serie di Fourier **rappresenta fedelmente** i valori di $f(t)$ solo in $[-T/2, T/2]$. D'altra parte, se f fosse originariamente definita e non periodica su tutto l'asse reale, potremo sempre considerare un T arbitrario e costruire la serie (1.3): questa, se le condizioni del Teorema 1.1 sono soddisfatte, rappresenterà fedelmente i valori di f in $[-T/2, T/2]$, mentre all'esterno di tale intervallo i suoi valori sarebbero sicuramente diversi da quelli di f . Ad ogni modo, siccome il numero T è in questo caso del tutto arbitrario, ci sarà anche consentito sceglierlo in maniera tale che la serie (1.3) possa rappresentare i valori di f in qualunque intervallo finito di nostro interesse.

Osserviamo inoltre che ponendo

$$c_m = \bar{c}_{-m} = \frac{a_m - ib_m}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{-i2m\pi s/T} ds \quad (1.5)$$

la serie di Fourier (1.3) assume anche la forma esponenziale

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{i2m\pi t/T} \quad (1.6)$$

come si verifica facilmente con un semplice calcolo. Infine, definendo le quantità r_m e θ_m tramite le relazioni

$$r_0 = a_0/2, \quad \theta_0 = 0; \quad a_m = r_m \cos \theta_m, \quad b_m = -r_m \sin \theta_m \quad (m \neq 0) \quad (1.7)$$

la serie (1.3) assume anche la forma

$$\sum_{m=0}^{\infty} r_m \cos(m\omega t + \theta_m), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.8)$$

Se allora, ad esempio con $f(t)$ periodica di periodo T , $y = f(t)$ rappresenta l'espressione di una legge fisica, la serie (1.8) mostra esplicitamente che l'oscillazione, in genere non elementare, $y = f(t)$ può essere decomposta nella sovrapposizione di infiniti moti periodici elementari (moti armonici) ciascuno di ampiezza r_m , di frequenza $m\omega$ e di sfasamento θ_m . Si dice in tal caso che la componente m -ma di tale decomposizione è l' m -ma *armonica* del moto periodico $y = f(t)$.

1.2 Formula integrale di Fourier

Riprendendo la discussione dell'Osservazione 1.1 supporremo ora che la nostra funzione f sia definita (senza, in generale, essere periodica) su tutto l'asse reale e che in ogni intervallo finito soddisfi le ipotesi del Teorema 1.1. Consideriamo allora un intervallo della forma $[-T/2, T/2]$ con T arbitrario e costruiamo su tale intervallo la serie di Fourier (1.3): tale serie rappresenterà fedelmente i valori di f solo in $[-T/2, T/2]$ mentre convergerà a valori diversi da quelli di f all'esterno di tale intervallo. È pertanto intuitivo tentare di migliorare questa rappresentazione di f allargando l'intervallo $[-T/2, T/2]$ sul quale la serie (1.3) rappresenta fedelmente f . Per far questo ci gioveremo del fatto che, nel nostro caso, T è arbitrario sicché niente ci impedirà a passare al limite per $T \rightarrow +\infty$.

Riprendiamo dunque in considerazione la serie (1.3) ed eseguiamo il limite per $T \rightarrow +\infty$: per semplificare tale operazione supporremo che f sia *integrabile*, cioè che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| ds < +\infty \quad (1.9)$$

In tal caso, siccome risulta

$$\left| \int_{-T/2}^{T/2} f(s) ds \right| \leq \int_{-T/2}^{T/2} |f(s)| ds, \quad \forall T > 0,$$

si avrà anche

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(s) ds \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)| ds < +\infty,$$

e pertanto per il primo termine di (1.3) otteniamo

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) ds = 0.$$

Quanto alla seconda parte di (1.3) supporremo che sia possibile eseguire il limite degli estremi di integrazione separatamente da quello dei fattori $1/T$; in pratica faremo l'ipotesi che sia possibile calcolare tale limite in due passi:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(s) \cos \frac{2m\pi}{T}(s-t) ds. \quad (1.10)$$

Inoltre ammetteremo senza verifica esplicita che il limite per $\tau \rightarrow +\infty$ della serie (1.10) possa essere eseguito termine a termine. Ne consegue che (1.10) diviene

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \frac{2m\pi}{T}(s-t) ds. \quad (1.11)$$

Poniamo ora

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad F_t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(s-t) ds$$

e riscriviamo (1.11) come

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \omega F_t(m\omega)$$

espressione che costituisce una evidente realizzazione del procedimento di Riemann per la definizione dell'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_t(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(s-t) ds.$$

Se allora supponiamo che i risultati dei teoremi ricordati nella Sezione 1.1 restino validi lungo tutto il procedimento di limite per $T \rightarrow +\infty$, potremo scrivere

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(s-t) ds} \quad (1.12)$$

espressione nota con il nome di **Formula Integrale di Fourier**. È facile controllare ora che, ponendo

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega s ds = r(\omega) \cos \theta(\omega) \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin \omega s ds = -r(\omega) \sin \theta(\omega) \end{aligned} \quad (1.13)$$

la formula (1.12) assume la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} r(\omega) \cos [\omega t + \theta(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (1.14)$$

in chiara analogia con le relazioni (1.2), (1.3), (1.7) e (1.8). Se poi f è una funzione *pari* (nel senso che $f(-t) = f(t)$) si vede subito che

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(s) \cos \omega s \, ds, \quad b(\omega) = 0$$

sicché la formula (1.12) si riduce a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \omega t \, d\omega \int_0^{+\infty} f(s) \cos \omega s \, ds \quad (1.15)$$

espressione che prende il nome di **Formula Integrale di Fourier in coseno**; se invece f è *dispari* (nel senso che $f(-t) = -f(t)$) allora

$$a(\omega) = 0, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(s) \sin \omega s \, ds$$

e (1.12) si riduce a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \omega t \, d\omega \int_0^{+\infty} f(s) \sin \omega s \, ds \quad (1.16)$$

che prende il nome di **Formula Integrale di Fourier in seno**. Sarà bene notare che gli integrali presenti in (1.15) e (1.16) sono ben definiti per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$ anche se l'iniziale funzione $f(t)$ è definita solo per $t \geq 0$ (e soddisfa in tale intervallo le ipotesi che garantiscono la validità della formula integrale di Fourier). In tal caso f potrebbe essere rappresentata su $[0, +\infty)$ sia da (1.15) che da (1.16): la differenza fra queste due rappresentazioni è nel fatto che nel primo caso la formula integrale in coseno (1.15) prolungherebbe f sul semiasse reale negativo in una funzione pari, mentre nel secondo caso la formula integrale in seno (1.16) la prolungherebbe in una funzione dispari.

Termineremo questa sezione enunciando, senza dimostrazione, alcuni risultati rigorosi sulla sviluppabilità in integrale di Fourier.

Teorema 1.2. *Se $f(t)$ definita su $(-\infty, +\infty)$ è integrabile, se in ogni intervallo limitato è generalmente continua, generalmente derivabile con derivata prima generalmente continua e discontinuità tutte di prima specie, e se nei suoi eventuali punti di discontinuità è definita come in (1.4), allora essa verifica la relazione (1.12) per ogni t in $(-\infty, +\infty)$, ossia è sviluppabile in Integrale di Fourier.*

Le condizioni elencate nel Teorema 1.2 per la validità della formula integrale (1.12) (o delle formule in seno e coseno (1.15) e (1.16)) sono solo *sufficienti*. Sarà pertanto possibile trovare anche altre condizioni che garantiscano tali risultati come mostra in particolare il seguente Teorema:

Teorema 1.3. *Se una funzione f definita in $[0, +\infty)$ è positiva, non crescente ed infinitesima all'infinito, se nei suoi punti di discontinuità è definita da (1.4) e se è integrabile su ogni intervallo finito del tipo $(0, a)$ con $a > 0$, essa è sviluppabile in integrale di Fourier in seno e coseno secondo le formule (1.15) e (1.16).*

Capitolo 2

Trasformata di Fourier

2.1 Forma esponenziale della Formula Integrale di Fourier

La Formula Integrale di Fourier (1.12) può facilmente essere posta in una forma che ricorda da vicino l'espressione esponenziale (1.6) per le serie di Fourier. Si ha infatti, con una semplice inversione del segno della variabile di integrazione ω in uno degli integrali che seguono, che

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \omega(s-t) ds \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^\lambda d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{i\omega(s-t)} ds + \int_0^\lambda d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s-t)} ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\lambda}^0 d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s-t)} ds + \int_0^\lambda d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s-t)} ds \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^\lambda d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega(s-t)} ds = \frac{1}{2} \int_{-\lambda}^\lambda e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds, \end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.12) potrà essere riscritta come

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^\lambda e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

che assume il nome di **Forma esponenziale** della Formula Integrale di Fourier. Ovviamente nel caso in cui l'integrale in (2.1) esiste come integrale improprio la formula si riscrive come

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds. \quad (2.2)$$

Osservazione 2.1. La formula (2.1) è definita tramite il cosiddetto **valore principale** di un integrale improprio. Ricorderemo a questo proposito che il **valore principale** di un integrale improprio

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a g(t) dt \quad (2.3)$$

può esistere ed essere finito anche in casi in cui l'integrale improprio corrispondente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^0 g(t) dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b g(t) dt \quad (2.4)$$

non esiste. Ad esempio, se $g(t) = t^3$ avremo

$$\int_{-a}^0 t^3 dt = -\frac{a^4}{4}, \quad \int_0^b t^3 dt = \frac{b^4}{4}; \quad \int_{-a}^a t^3 dt = 0$$

sicché l'integrale improprio (2.4) non ha senso in quanto forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$, mentre il suo valore principale (2.3) è

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 dt = 0.$$

Naturalmente se l'integrale improprio (2.4) converge il suo valore coincide con quello del suo valore principale (2.3), ma è importante ricordare che quest'ultimo può esistere senza che l'integrale improprio esista.

2.2 Trasformazione di Fourier

L'espressione (2.1) presenta una certa analogia con le formule (1.5) ed (1.6); in particolare – modificando per comodità da s in t il nome della variabile di integrazione – il ruolo svolto dalla successione di coefficienti c_m viene qui giocato dalla funzione

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.5)$$

mentre allo sviluppo in serie (1.6) viene sostituita la formula integrale (2.1). Se ora supponiamo che la funzione $f(t) e^{-i\omega t}$ sia sempre integrabile rispetto a t per ogni valore di ω l'espressione (2.5) definisce una nuova funzione $\hat{f}(\omega)$. Resta così definita una trasformazione funzionale che associa $\hat{f}(\omega)$ ad $f(t)$ e che prende il nome di **Trasformazione di Fourier** mentre \hat{f} prende il nome di **Trasformata di Fourier** di f . Osserviamo che, se f è una funzione reale della variabile reale t , \hat{f} risulterà essere una funzione complessa di una variabile reale per la quale si ha in particolare

$$\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}. \quad (2.6)$$

Nel seguito indicheremo la trasformazione di Fourier anche con il simbolo \mathcal{F} e scriveremo simbolicamente

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f], \quad \text{ovvero} \quad f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega). \quad (2.7)$$

Inoltre, con la notazione introdotta in (1.13), si vede facilmente che risulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [a(\omega) - ib(\omega)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} r(\omega) e^{i\theta(\omega)}, \quad (2.8)$$

sicchè in particolare avremo anche

$$|\hat{f}(\omega)|^2 = \frac{\pi}{2} [a^2(\omega) + b^2(\omega)] = \frac{\pi}{2} r^2(\omega). \quad (2.9)$$

Pertanto $|\hat{f}(\omega)|$ assume il significato di ampiezza della componente di frequenza ω , mentre $\theta(\omega)$ rappresenta lo sfasamento della medesima componente.

Osservazione 2.2. *La formula esponenziale (2.1) estende l'integrazione sulla variabile ω della formula (1.12) a tutto l'asse reale e quindi introduce un concetto apparentemente paradossale: quello di frequenza negativa. Chiaramente da un punto di vista fisico tali frequenze non hanno alcun senso, ma (2.1) sembra dar loro un ruolo dal momento che la ricostruzione di f appare possibile in quella formula solo tenendo conto di tutte le frequenze, anche di quelle minori di zero. La soluzione del paradosso viene dalla relazione (2.6) la quale ci dice che è sufficiente conoscere $\hat{f}(\omega)$ per $\omega \geq 0$ per poterne poi calcolare i valori per $\omega < 0$. Pertanto tutti i calcoli possono essere sempre effettuati sulla base della conoscenza della trasformata di Fourier a frequenze positive. In sostanza l'introduzione delle frequenze negative deve essere considerata solo come un espediente che rende più suggestiva la scrittura della formula integrale di Fourier per ragioni di simmetria.*

La forma esponenziale (2.1) della formula integrale di Fourier può essere anche considerata come una **formula di inversione** della Trasformata di Fourier (2.5). Le condizioni di sviluppabilità in integrale di Fourier garantiscono infatti che

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.10)$$

e, se l'integrale improprio esiste,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.} \quad (2.11)$$

In forma simbolica analoga a (2.7) potremo dunque scrivere

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]. \quad (2.12)$$

D'altra parte con un semplice cambiamento di segno nella variabile d'integrazione si vede che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

per cui, tenendo anche conto di (2.6), avremo le cosiddette **formule di reciprocità**

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f], \quad f(t) = \mathcal{F}[\overline{\hat{f}}]. \quad (2.13)$$

Se $f(t)$ è una funzione pari la trasformata di Fourier (2.5) si riduce a

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \hat{f}_c(\omega),$$

dove $\hat{f}_c(\omega)$, detta **trasformata in coseno**, risulta essere anche essa una funzione pari a valori reali. Se invece $f(t)$ è una funzione dispari si ha

$$\hat{f}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = -i\hat{f}_s(\omega),$$

dove ora $\hat{f}_s(\omega)$ è dispari e a valori reali e si suole indicare con il nome di **trasformata in seno**. In pratica avremo quindi

$$\hat{f}_c(\omega) = \mathcal{F}_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (2.14)$$

$$\hat{f}_s(\omega) = \mathcal{F}_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (2.15)$$

Le formule integrali in seno (1.16) e coseno (1.15) ci consentono di scrivere le corrispondenti formule di inversione delle trasformate in seno e coseno. Infatti qualunque sia t risulta

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega; \quad (2.16)$$

e quindi le formule di reciprocità per le trasformate in coseno sono

$$\hat{f}_c = \mathcal{F}_c[f], \quad f = \mathcal{F}_c[\hat{f}_c]. \quad (2.17)$$

Con analogia notazione per le trasformate in seno avremo

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega, \quad (2.18)$$

e simbolicamente

$$\hat{f}_s = \mathcal{F}_s[f], \quad f = \mathcal{F}_s[\hat{f}_s]. \quad (2.19)$$

Queste formule di reciprocità mostrano la particolare simmetria delle trasformazioni in seno e coseno: in particolare si vede che tali trasformazioni coincidono con le loro inverse. Daremo ora alcuni risultati sull'esistenza delle Trasformate di Fourier.

Teorema 2.1. *Se $f(t)$ è integrabile, allora $\hat{f}(\omega)$ esiste per ogni ω reale ed è limitata e continua.*

Dimostrazione. Si verifica immediatamente che anche $f(t)e^{-i\omega t}$ è integrabile, e quindi che $\hat{f}(\omega)$ esiste per ogni ω ed è limitata:

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\omega t} f(t)| \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt < +\infty.$$

Per dimostrare che $\hat{f}(\omega)$ è anche continua si considera un arbitrario punto ω^* , una successione numerica $\{\omega_n\}$ tale che $\omega_n \xrightarrow{n} \omega^*$ e la successione di funzioni

$$f_n(t) = e^{-i\omega_n t} f(t).$$

Trascurando di verificare esplicitamente che sono soddisfatte le ipotesi che consentono di eseguire il limite sotto segno di integrale, siccome

$$\lim_n f_n(t) = e^{-i\omega^* t} f(t)$$

si ha anche che

$$\lim_n \hat{f}(\omega_n) = \lim_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \hat{f}(\omega^*).$$

Data l'arbitrarietà di ω^* e della successione che vi converge, potremo affermare quindi che $\hat{f}(\omega)$ è continua per ogni valore di ω . \square

Teorema 2.2. (Teorema di Parseval) *Se $f(t)$ è integrabile e di quadrato integrabile, allora anche $\hat{f}(\omega)$ è di quadrato integrabile e inoltre*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.20)$$

Osservazione 2.3. *Sebbene secondo il Teorema 2.1 l'integrabilità di f sia condizione sufficiente a garantire l'esistenza della trasformata (2.5), tale condizione non è viceversa necessaria: capita, cioè, che la trasformata di Fourier di una funzione f possa essere definita anche per funzioni non integrabili. In particolare, in base a risultati analoghi a quelli del Teorema 1.3, per poter calcolare le trasformate in seno e coseno basterà che f , definita in $[0, +\infty)$, sia positiva, non crescente e infinitesima all'infinito, sia definita da (1.4) nei suoi punti di discontinuità e sia integrabile su ogni intervallo finito del tipo $(0, a)$ con $a > 0$. Si noti inoltre che nessuno dei due teoremi precedenti garantisce che la trasformata $\hat{f}(\omega)$ sia a sua volta integrabile: infatti né le funzioni limitate e continue, né le funzioni di quadrato integrabile sono in generale anche integrabili.*

Il calcolo degli integrali (2.5) e (2.10) viene spesso effettuato scegliendo degli opportuni percorsi di integrazione in campo complesso. A questo scopo risulterà particolarmente utile il seguente risultato:

Lemma 2.3. *Sia $f(z)$ una funzione della variabile complessa z che presenta singolarità isolate solo in punti al finito del piano complesso \mathbb{C} , e sia Γ una semicirconferenza di centro $z = 0$ e di raggio R , presa nel semipiano $\text{Im}[z] > 0$ ed orientata in uno dei due versi possibili (vedi ad esempio Figura 2.1). Se risulta*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\max_{\Gamma} |f(z)| \right) = 0$$

allora avremo anche

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \alpha > 0.$$

Un risultato del tutto analogo sussiste per $\alpha < 0$ prendendo la semicirconferenza Γ nel semipiano $\text{Im}[z] < 0$ (vedi Figura 2.1).

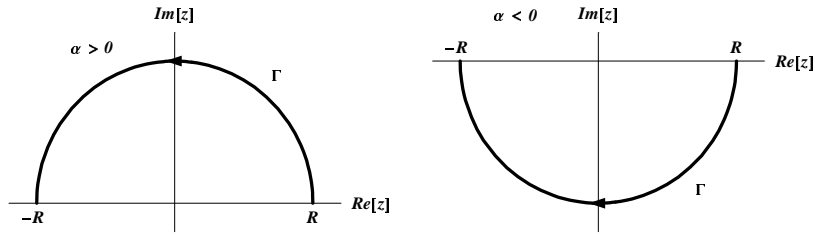


Figura 2.1: Percorsi di integrazione usati nel Lemma 2.3.

Dimostrazione. Considereremo solo il caso $\alpha > 0$, dato che nel caso $\alpha < 0$ la dimostrazione è perfettamente analoga. Innanzitutto, dato che sulla curva Γ si ha $z = R e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \pi$, potremo scrivere

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \int_0^{\pi} |f(z)| e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta.$$

Siccome $f(z)$ è olomorfa sulle semicirconferenze Γ da un certo raggio R in poi (con $R \rightarrow +\infty$) la funzione $|f(z)|$ sarà dotata di massimo su Γ per cui

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \max_{\Gamma} |f(z)| \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta.$$

D'altra parte, siccome dalle nostre ipotesi risulta che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\max_{\Gamma} |f(z)| \right) = 0,$$

per provare il Lemma sarà sufficiente mostrare che l'integrale

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta$$

rimane limitato per $R \rightarrow +\infty$. Infatti si ha

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta$$

e sostituendo θ con $\pi - \theta$ nel secondo integrale

$$\int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta.$$

D'altra parte si verifica facilmente che

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

e quindi in $[0, \pi/2]$ risulta $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$. Ne segue che, essendo $\alpha > 0$,

$$\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta \leq 2R \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R \theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}),$$

e pertanto

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R d\theta \leq \frac{\pi}{\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

risultato che completa la dimostrazione. \square

2.3 Esempi di Trasformate di Fourier

Esempio 2.1. Per calcolare la trasformata di Fourier della funzione ($a > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} 1/2a & \text{se } |t| < a \\ 1/4a & \text{se } t = \pm a \\ 0 & \text{se } |t| > a \end{cases} \quad (2.21)$$

possiamo osservare che, essendo la funzione pari, potremo equivalentemente calcolarne la trasformata in coseno (2.14) come

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega) = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos \omega t dt = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

La funzione f e la sua trasformata sono riportate in Figura 2.2. La trasformazione inversa si ottiene poi tramite la formula integrale di Fourier in coseno (2.16)

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{1}{a\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos \omega t d\omega, \quad (2.22)$$

dalla quale si possono anche ricavare alcuni interessanti risultati. Innanzitutto per $t = 0$ e con $a = 1$ la formula di inversione fornisce il valore di un integrale notevole calcolabile in campo complesso con altri metodi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}. \quad (2.23)$$

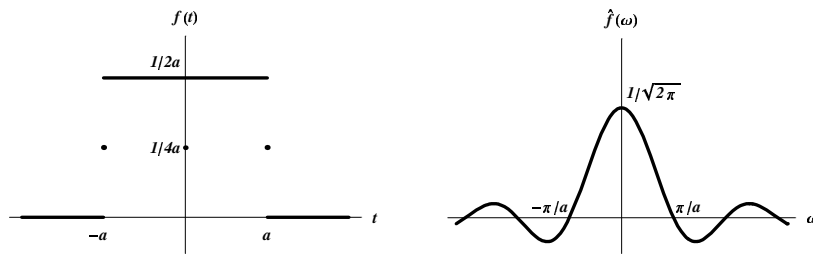


Figura 2.2: La funzione (2.21) e la sua trasformata di Fourier.



Figura 2.3: La funzione (2.24) e la sua trasformata di Fourier.

Inoltre (2.22) consente di dare un significato alla definizione dei valori di f nei punti $t = \pm 1$. Come è evidente, infatti, tali valori non giocano alcun ruolo nel calcolo della trasformata di Fourier \hat{f} . Viceversa (2.22) individua proprio $1/4a$ come valore da assegnare ad f nei punti $t = \pm a$ tramite la trasformazione inversa; infatti, ad esempio nel caso $a = 1$, si ha

$$f(\pm 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega \sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{4}.$$

Questo giustifica completamente la scelta fatta nei punti $t = \pm a$.

Esempio 2.2. Anche per determinare la trasformata di Fourier della funzione pari ($a > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} (2a - |t|)/4a^2 & \text{se } |t| < 2a \\ 0 & \text{se } |t| > 2a \end{cases} \quad (2.24)$$

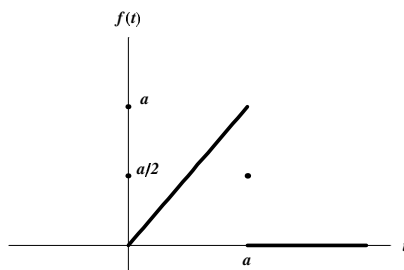


Figura 2.4: La funzione (2.25).

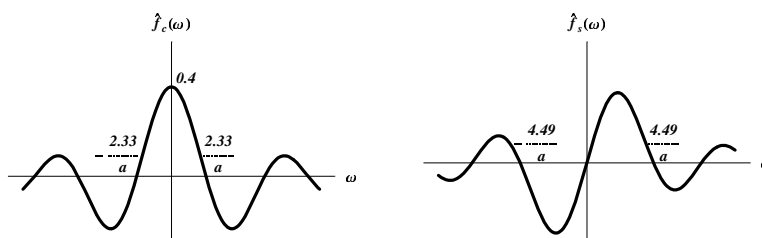


Figura 2.5: Trasformate di Fourier in coseno e seno della funzione (2.25).

sarà sufficiente calcolare la sua trasformata in coseno (2.14)

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{2a} \frac{2a-t}{4a^2} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin a\omega}{a\omega} \right)^2.$$

La funzione f e la sua trasformata sono riportate in Figura 2.3. La formula di inversione (2.16) si scrive quindi

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin a\omega}{a\omega} \right)^2 \cos \omega t \, d\omega$$

e da essa, per $a = 1$ e $t = 0$, si ottiene il risultato notevole

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 2.3. Prendiamo ora in considerazione la seguente funzione $f(t)$ definita,

con $a > 0$, solo per $t \geq 0$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 < t < a \\ a/2 & \text{se } t = a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases} \quad (2.25)$$

e riportata in Figura 2.4. Essendo f definita solo per $t \geq 0$ non avrebbe senso calcolare la trasformata di Fourier (2.5) che richiede di integrare una funzione definita per ogni valore reale t . Niente impedisce però di calcolare le trasformate in seno (2.15) e coseno (2.14) che utilizzano solo integrazioni per valori positivi di t . Anzi, a differenza dei due Esempi precedenti nei quali solo la trasformata in coseno era diversa da zero, in questo caso ambedue le trasformate sono calcolabili e diverse da zero. Si ha facilmente infatti mediante integrazioni elementari che

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos a\omega - 1 + a\omega \sin a\omega}{\omega^2} \quad \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega - a\omega \cos a\omega}{\omega^2} \quad (2.26)$$

Tali trasformate, i cui grafici sono riportati in Figura 2.5, sono ovviamente funzioni (rispettivamente pari e dispari) definite per ogni valore reale di ω . Pertanto le formule di inversione (2.16) e (2.18) forniscono i prolungamenti rispettivamente pari e dispari di $f(t)$ sul semiasse reale negativo. Più precisamente l'inversione della trasformata in coseno darà il prolungamento pari

$$f_p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos a\omega - 1 + a\omega \sin a\omega}{\omega^2} \cos \omega t \, d\omega = \begin{cases} |t| & \text{se } |t| < a \\ a/2 & \text{se } t = a \\ 0 & \text{se } |t| > a \end{cases}$$

mentre l'inversione della trasformata in seno darà il prolungamento dispari

$$f_d(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin a\omega - a\omega \cos a\omega}{\omega^2} \sin \omega t \, d\omega = \begin{cases} t & \text{se } |t| < a \\ \pm a/2 & \text{se } t = \pm a \\ 0 & \text{se } |t| > a \end{cases}$$

I due prolungamenti sono poi riportati in Figura 2.6. Varrà la pena osservare a questo punto che diversa sarebbe l'analisi di una funzione definita per ogni t nel modo seguente:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } 0 < t < a \\ a/2 & \text{se } t = a \\ 0 & \text{se } t > a \end{cases} \quad (2.27)$$

In questo caso la funzione, definita per ogni t , non è né pari né dispari e quindi non ha senso calcolarne la trasformata in seno o in coseno. Invece un calcolo

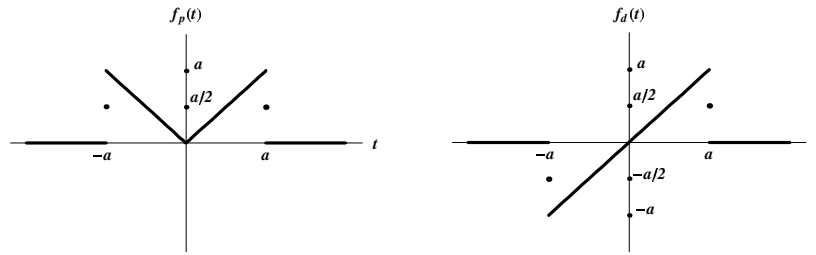


Figura 2.6: Prolungamenti pari e dispari della funzione (2.25) ottenuti dall'inversione delle trasformate rispettivamente in coseno e seno.

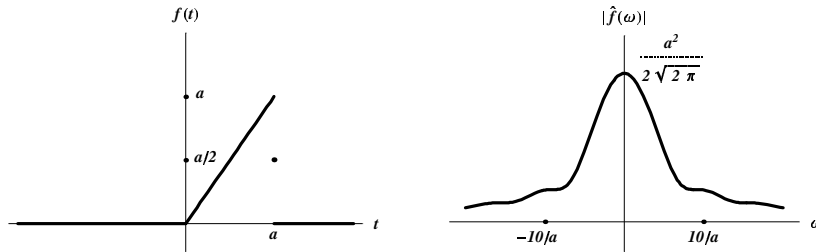


Figura 2.7: La funzione (2.27) con il modulo della sua trasformata.

elementare mostra che la trasformata di Fourier è

$$\hat{f}(\omega) = \frac{(1 - ia\omega)e^{-ia\omega} - 1}{\sqrt{2\pi}\omega^2}; \quad (2.28)$$

la funzione (2.27) e il modulo della sua trasformata (2.28) sono riportati nella Figura 2.7.

Esempio 2.4. A causa della sua parità la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 \quad (2.29)$$

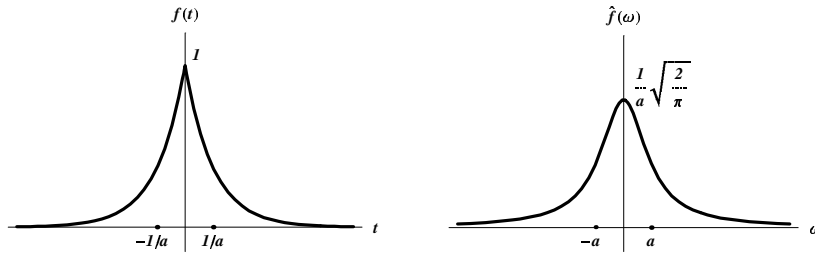


Figura 2.8: La funzione (2.29) e la sua trasformata di Fourier.

può essere calcolata come trasformata in coseno

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\omega) = \hat{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos \omega t e^{-at} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left[e^{(i\omega-a)t} + e^{-(i\omega+a)t} \right] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{i\omega - a} + \frac{1}{i\omega + a} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

La funzione f e la sua trasformata di Fourier sono riportate nella Figura 2.8. Mostriamo ora come l'inversione della trasformata (2.30) possa essere effettuata usando le convenzionali tecniche di integrazione in campo complesso. Supporremo pertanto che ci sia stata assegnata la funzione (2.30) e che si voglia conoscere la funzione della quale essa è la trasformata di Fourier. Dalla formula di inversione (2.11) avremo allora

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega.$$

Consideriamo la funzione ausiliaria della variabile complessa z

$$g(z) = \frac{e^{itz}}{a^2 + z^2}$$

e osserviamo che essa presenta due poli semplici in $\pm ia$ con residui

$$R[ia] = \frac{e^{-at}}{2ia}, \quad R[-ia] = -\frac{e^{at}}{2ia}.$$

La forma di $g(z)$ e il Lemma 2.3 ci suggeriscono di scegliere i percorsi di integrazione secondo il segno di t . Pertanto il calcolo si esegue separando due casi:

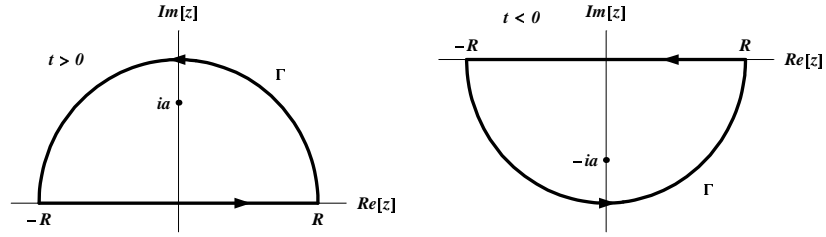


Figura 2.9: Cammini di integrazione C per l'inversione della trasformata di Fourier (2.30).

se $t \geq 0$ sceglieremo un cammino di integrazione C con $\text{Im}[z] \geq 0$ (vedi il primo cammino di Figura 2.9); avremo quindi per ogni $R > a$

$$\oint_C g(z) dz = 2\pi i R[ia] = \frac{\pi}{a} e^{-at},$$

e siccome in base al Lemma 2.3 risulta per $R \rightarrow +\infty$

$$\oint_C g(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega + \int_{\Gamma} g(z) dz \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

avremo in definitiva

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0. \quad (2.31)$$

Per $t \leq 0$ sceglieremo invece il secondo cammino di integrazione C di Figura 2.9 con $\text{Im}[z] \leq 0$; pertanto avremo ora per ogni $R > a$

$$\oint_C g(z) dz = 2\pi i R[-ia] = -\frac{\pi}{a} e^{at}.$$

Inoltre, tenendo conto del verso di integrazione e del Lemma 2.3, abbiamo che per $R \rightarrow +\infty$

$$\oint_C g(z) dz = - \int_{-R}^{+R} \frac{e^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega + \int_{\Gamma} g(z) dz \rightarrow - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a^2 + \omega^2} d\omega,$$

e quindi in definitiva

$$f(t) = e^{at}, \quad t \leq 0. \quad (2.32)$$

Riunendo i due risultati (2.31) e (2.32) otteniamo infine proprio la funzione originaria (2.29).

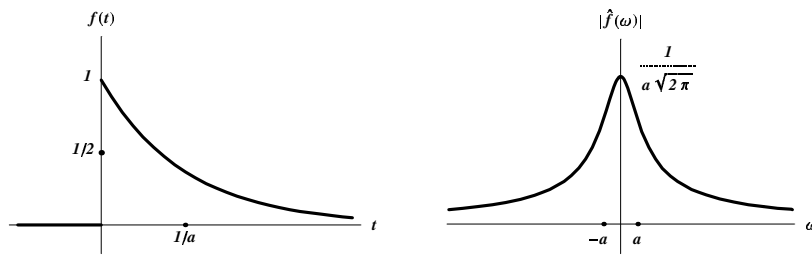


Figura 2.10: La funzione (2.33) e la sua trasformata di Fourier.

Esempio 2.5. Il calcolo della trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1/2 & \text{se } t = 0 \\ e^{-at} & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

si esegue con metodi elementari:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\omega}.$$

La funzione (2.33) e il modulo della sua trasformata sono mostrati in Figura 2.10. Più interessante risulta osservare che, in questo esempio, l'uso del valor principale nella formula di inversione (2.10) è inevitabile. Si ha infatti che

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{i\omega t}}{a+i\omega} d\omega,$$

ma per ottenere, ad esempio, il valore $f(0) = 1/2$ non possiamo semplicemente calcolare l'integrale improprio

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{a+i\omega}.$$

Infatti la primitiva risulta essere

$$\int \frac{d\omega}{a+i\omega} = \arctan \frac{\omega}{a} - \frac{i}{2} \ln(a^2 + \omega^2)$$

sicché il suddetto integrale improprio non avrebbe senso in quanto forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$, mentre il corrispondente valor principale è

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\arctan \frac{\omega}{a} - \frac{i}{2} \ln(a^2 + \omega^2) \right]_{-\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \arctan \frac{\lambda}{a} = \frac{1}{2}.$$

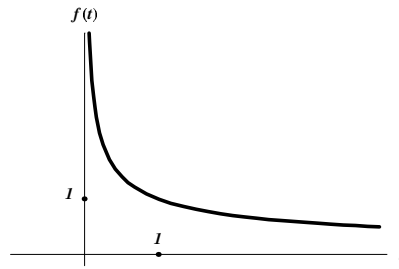


Figura 2.11: La funzione (2.34).

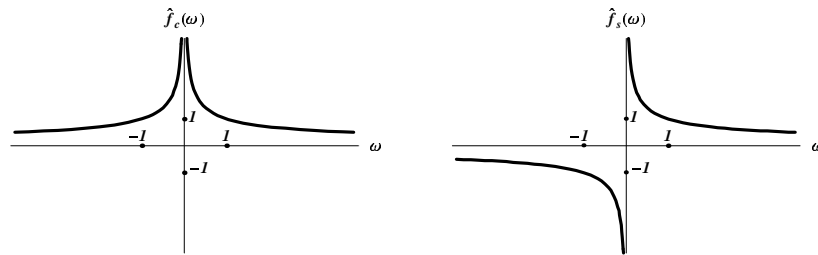


Figura 2.12: Trasformate di Fourier in coseno e seno della funzione (2.34).

Esempio 2.6. Si consideri ora la funzione definita solo per $t > 0$ e mostrata in Figura 2.11

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t > 0. \quad (2.34)$$

Essa costituisce un esempio di funzione non integrabile che non soddisfa le ipotesi del Teorema 1.2. Abbiamo già osservato, però, alla fine del Capitolo 1 che le condizioni del Teorema 1.2 sono solo sufficienti. È facile vedere inoltre che la nostra funzione (2.34) soddisfa invece le ipotesi del Teorema 1.3, e pertanto risulta possedere le trasformate in coseno e seno. In particolare, con i semplici cambiamenti di variabile

$$y = |\omega| t = x^2,$$

utilizzando le proprietà di simmetria dei seni e coseni per inversione del segno della variabile, e ricordando un ben noto risultato dovuto ad A.Fresnel, avremo per le trasformate in coseno e seno

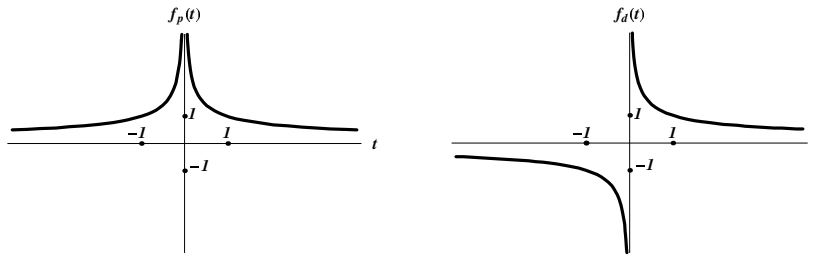


Figura 2.13: Prolungamenti pari e dispari della funzione (2.34) ottenuti dalle inversioni rispettivamente delle trasformate in coseno e seno.

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\sqrt{t}} dt = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi|\omega|}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{\frac{2}{\pi|\omega|}} \int_0^{+\infty} \cos x^2 dt = \frac{1}{\sqrt{|\omega|}}, \\
 \hat{f}_s(\omega) &= \frac{|\omega|}{\omega} \frac{1}{\sqrt{|\omega|}}.
 \end{aligned}$$

Le due trasformate, che in questo caso coincidono con la funzione originaria sul semiasse reale positivo, sono mostrate nella Figura 2.12. Data la particolare simmetria di questo Esempio le inversioni in coseno e seno si calcolano esattamente nello stesso modo delle trasformate e forniscono, come ci si attende, i prolungamenti rispettivamente pari e dispari di (2.34):

$$f_p(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \quad f_d(t) = \frac{|t|}{t} \frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

Tali prolungamenti sono mostrati nella Figura 2.13. Si osservi infine che le funzioni $f_p(t)$ ed $f_d(t)$, definite su tutto l'asse reale tranne che nell'origine, possiedono anche loro delle trasformate di Fourier per le quali si verifica facilmente che

$$\hat{f}_p(\omega) = \hat{f}_c(\omega), \quad \hat{f}_d(\omega) = \hat{f}_s(\omega).$$

Esempio 2.7. Per la funzione gaussiana

$$f(t) = e^{-t^2/2T^2} \tag{2.35}$$

è possibile calcolare la trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t - t^2/2T^2} dt$$

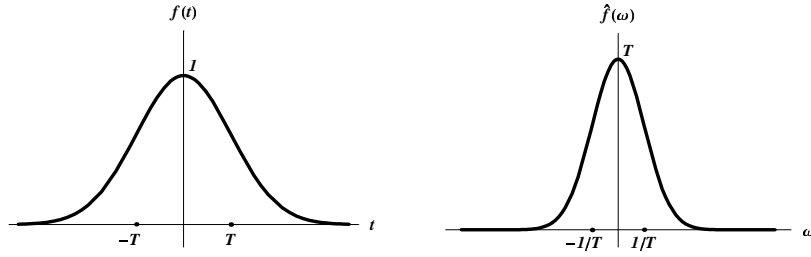


Figura 2.14: La funzione gaussiana (2.35) e la sua trasformata di Fourier.

osservando che

$$i\omega t + \frac{t^2}{2T^2} = \left(\frac{t}{T\sqrt{2}} + \frac{i\omega T}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\omega^2 T^2}{2},$$

e che ponendo

$$x = \frac{t}{T\sqrt{2}}, \quad y_0 = \frac{\omega T}{\sqrt{2}}$$

il nostro integrale diviene

$$\hat{f}(\omega) = T e^{-\omega^2 T^2/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy_0)^2} dx.$$

Si può ora mostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy_0)^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (2.36)$$

sicché in definitiva

$$\hat{f}(\omega) = T e^{-\omega^2 T^2/2}. \quad (2.37)$$

La funzione (2.35) e la sua trasformata (2.37) sono mostrate in Figura 2.14. Per provare (2.36) è conveniente eseguire il calcolo nel campo complesso. In effetti si vede subito che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy_0)^2} dx = \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz$$

dove il cammino di integrazione Γ è disegnato in Figura 2.15 nel caso $\omega > 0$ (nel caso $\omega < 0$ il calcolo si esegue in maniera del tutto analoga). L'integrale al secondo membro può ora essere facilmente calcolato ricorrendo a cammini chiusi C mostrati sempre in Figura 2.15 con L ed M positivi ed arbitrari. Infatti dal

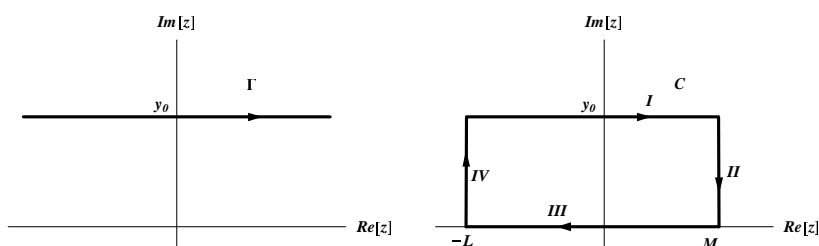


Figura 2.15: Cammini di integrazione per il calcolo di (2.36).

Teorema di Cauchy avremo in questo caso che

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_C e^{-z^2} dz \\
 &= \int_I e^{-z^2} dz + \int_{II} e^{-z^2} dz + \int_{III} e^{-z^2} dz + \int_{IV} e^{-z^2} dz \\
 &= \int_{-L}^M e^{-(x+iy_0)^2} dx - \int_{-L}^M e^{-x^2} dx \\
 &\quad + i \int_0^{y_0} e^{-(L-iy)^2} dy - i \int_0^{y_0} e^{-(M+iy)^2} dy,
 \end{aligned}$$

e siccome si controlla anche facilmente che

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{y_0} e^{-(L-iy)^2} dy \right| &\leq e^{-L^2} \int_0^{y_0} e^{y^2} dy \\
 \left| \int_0^{y_0} e^{-(M+iy)^2} dy \right| &\leq e^{-M^2} \int_0^{y_0} e^{y^2} dy,
 \end{aligned}$$

al limite per $L, M \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy_0)^2} dx = \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

sicchè la relazione (2.36) segue dal ben noto risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Capitolo 3

Risoluzione di equazioni differenziali

3.1 Trasformazione di Fourier e Derivazione

Teorema 3.1. *Se $f(t)$ ed $f_1(t) = -itf(t)$ sono integrabili, allora $\hat{f}(\omega)$ è derivabile e si ha*

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}[f_1]. \quad (3.1)$$

Il risultato può anche essere espresso mediante l'associazione

$$-itf(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}'(\omega) \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Si tratta di un teorema di derivazione sotto segno d'integrale: osserviamo infatti che

$$\frac{\hat{f}(\omega + \Delta\omega) - \hat{f}(\omega)}{\Delta\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-it\Delta\omega} - 1}{\Delta\omega} dt \quad (3.3)$$

e che come è noto

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{e^{-it\Delta\omega} - 1}{\Delta\omega} = \left[\frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} \right]_{\omega=0} = -it.$$

Trascurando di verificare esplicitamente che sono soddisfatte le condizioni

per passare al limite sotto segno di integrale, per $\Delta\omega \rightarrow 0$ in (3.3) avremo

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} \right]_{\omega=0} e^{-i\omega t} dt \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[f_1]\end{aligned}$$

il che completa la dimostrazione del nostro Teorema. \square

Teorema 3.2. *Se $f(t)$ ed $f'(t)$ sono integrabili, allora*

$$\widehat{f}'(\omega) = \mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \widehat{f}(\omega). \quad (3.4)$$

Il risultato può anche essere espresso mediante la seguente associazione

$$f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \widehat{f}(\omega) \quad (3.5)$$

Dimostrazione. In questo caso si tratta di un teorema di integrazione per parti. Infatti per dimostrarlo basterà osservare che integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a,b \rightarrow +\infty} \int_{-a}^b e^{-i\omega t} f'(t) dt \\ &= \lim_{a,b \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-i\omega t} f(t)}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-a}^b + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a,b \rightarrow +\infty} \int_{-a}^b e^{-i\omega t} f(t) dt.\end{aligned}$$

D'altra parte, siccome per ipotesi f è integrabile, avremo anche che $|f(t)|$ sarà infinitesima per $t \rightarrow \pm\infty$. Pertanto il termine finito dell'integrazione per parti sarà nullo e quindi avremo

$$\mathcal{F}[f'] = i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

come richiesto in (3.4). \square

Osservazione 3.1. *Bisogna evitare di confondere i due simboli \widehat{f}' e \widehat{f}' dato che essi rappresentano due oggetti molto diversi:*

$$\begin{aligned}\widehat{f}'(\omega) &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f], \\ \widehat{f}'(\omega) &= \mathcal{F}[f'] = \mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}\right].\end{aligned}$$

Corollario 3.3. Se $f(t)$ e $f_k(t) = (-it)^k f(t)$ con $k = 1, \dots, n$ sono integrabili, allora $\hat{f}(\omega)$ è derivabile n volte e si ha

$$\hat{f}^{(n)}(\omega) = \frac{d^n \hat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}[f_n],$$

ovvero si ha

$$\boxed{(-it)^n f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}^{(n)}(\omega)} \quad (3.6)$$

Inoltre se $f(t)$ è integrabile e se le sue derivate $f^{(k)}(t)$ con $k = 1, \dots, n$ esistono e sono integrabili, allora

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = \mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \hat{f}(\omega),$$

ovvero si ha

$$\boxed{f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega)} \quad (3.7)$$

Esempio 3.1. Questi Teoremi consentono di calcolare in un altro modo la Trasformata di Fourier (2.37) della funzione gaussiana (2.35)

$$f(t) = e^{-t^2/2T^2}$$

discussa nell'Esempio 2.7. Il calcolo parte osservando che, siccome ovviamente in questo caso sia $f(t)$ che $tf(t)$ sono integrabili, la derivata $\hat{f}'(\omega)$ della richiesta trasformata di Fourier soddisferà la relazione (3.1). D'altra parte si vede subito che

$$f_1(t) = -itf(t) = -ite^{-t^2/2T^2} = iT^2 f'(t)$$

per cui anche $f'(t)$ è integrabile e quindi tenendo conto di (3.4) si avrà

$$\hat{f}'(\omega) = \mathcal{F}[f_1] = iT^2 \mathcal{F}[f'] = -\omega T^2 \hat{f}(\omega).$$

Ora questa relazione rappresenta per la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ che vogliamo calcolare una semplice equazione differenziale con valore iniziale (ponendo $x = t/T$)

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2T^2} dt = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = T.$$

La soluzione, come si verifica immediatamente, è proprio

$$\hat{f}(\omega) = T e^{-\omega^2 T^2/2},$$

un risultato esattamente coincidente con quello ottenuto nell'Esempio 2.7 con un metodo differente.

Esempio 3.2. Si voglia calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$g(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}, \quad a > 0.$$

Per far questo ricorderemo che con calcoli analoghi a quelli sviluppati nell'Esempio 2.4 è possibile stabilire la seguente associazione fra funzione e trasformata:

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\omega|}.$$

Inoltre si vede subito che $-ig(t) = -itf(t) = f_1(t)$, per cui dal Teorema 3.1 avremo che

$$-i\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[f_1] = \hat{f}'(\omega) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\omega|}{\omega} e^{-a|\omega|}$$

da cui ricaviamo senza altri calcoli la richiesta trasformata di Fourier

$$g(t) = \frac{t}{a^2 + t^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{g}(\omega) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|\omega|}{\omega} e^{-a|\omega|}.$$

3.2 Trasformata di Fourier e Convoluzione

Nelle applicazioni riveste una particolare importanza il concetto di **prodotto di convoluzione**. Assegnate due funzioni integrabili $f(t)$ e $g(t)$ si chiama prodotto di convoluzione la funzione

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds. \quad (3.8)$$

Nonostante l'apparente asimmetria dei ruoli di f e g in questa definizione, un semplice cambiamento di variabile ($\tau = t - s$) consente di mostrare che tale prodotto è anche commutativo nel senso che

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) \star g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds \\ &= g(t) \star f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)f(s) ds. \end{aligned}$$

Il prodotto di convoluzione resta però un'operazione non elementare molto diversa dal prodotto ordinario di due funzioni: basterà osservare, infatti, che mentre per determinare il valore in un punto t del prodotto ordinario $f(t)g(t)$

è sufficiente conoscere il valore di f e g nel solo punto t , per calcolare il valore in t del prodotto di convoluzione $f(t) \star g(t)$ è necessario conoscere tutti i valori di f e g per poter eseguire l'integrale (3.8). Questa osservazione mette in evidenza la rilevanza del successivo Teorema secondo il quale la trasformazione di Fourier converte i prodotti di convoluzione in prodotti ordinari con una conseguente radicale semplificazione dei calcoli.

Teorema 3.4. *Se $f(t)$ e $g(t)$ sono integrabili, allora anche la funzione $h(t) = f(t) \star g(t)$ è integrabile ed inoltre $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$. Il risultato può anche essere espresso mediante l'associazione*

$$\boxed{f(t) \star g(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).} \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Tralasciando di dimostrare che h è integrabile e quindi è dotata di trasformata di Fourier, con un semplice cambiamento di variabile ($u = t - s$) si ha

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds \right] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s} g(s) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-s)} f(t-s) dt \right] ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega s} g(s) ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u} f(u) du \\ &= \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

il che prova che la trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione è il prodotto ordinario delle trasformate di Fourier dei fattori della convoluzione. \square

Il risultato del Teorema 3.4 è utile innanzitutto per le operazioni di anti-trasformazione: può succedere infatti di non saper calcolare la trasformata inversa $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$ di una funzione $\hat{f}(\omega)$, ma di sapere che questa è fattorizzabile nel prodotto $\hat{f}(\omega) = \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$ di due funzioni \hat{f}_1 ed \hat{f}_2 delle quali conosciamo le antitrasformate $f_1 = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1]$ ed $f_2 = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_2]$. In questo caso il Teorema appena dimostrato ci consente di affermare che $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f_1 \star f_2$.

Esempio 3.3. *Si voglia calcolare l'antitrasformata di Fourier della funzione*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-\omega^2 T^2/2}}{1 + \omega^2 T^2} \quad (T > 0)$$

evitando il calcolo esplicito di integrali con fattori gaussiani. Si vede subito allora che $\hat{f}(\omega) = \hat{f}_1(\omega) \hat{f}_2(\omega)$ con

$$\hat{f}_1(\omega) = e^{-\omega^2 T^2/2}, \quad \hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2},$$

e che dagli Esempi 2.4 e 2.7 risulta

$$f_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_1] = \frac{1}{T} e^{-t^2/2T^2}, \quad f_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}_2] = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|/T}.$$

Il Teorema 3.4 ci garantisce allora che la nostra antitrasformata è

$$f(t) = f_1(t) \star f_2(t) = \frac{1}{2T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|/T} e^{-s^2/2T^2} ds.$$

In questo caso è conveniente lasciare la soluzione del nostro problema indicata come un integrale di convoluzione dato che questo non è ulteriormente esprimibile mediante semplici combinazioni di funzioni elementari.

Esempio 3.4. Si voglia calcolare la trasformata di Fourier della funzione definita per ogni t dall'integrale

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t-s) e^{-s}}{[1+(t-s)^2]^2} ds.$$

Osserviamo innanzitutto che la nostra funzione si presenta sotto forma di un integrale di convoluzione $h(t) = f(t) \star g(t)$ delle funzioni

$$f(t) = \frac{\cos t}{(1+t^2)^2}, \quad g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

e pertanto il Teorema 3.4 ci dice che la richiesta trasformata di Fourier avrà la forma $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$. Ora è già noto dall'Esempio 2.5 che

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\omega}$$

per cui non ci resta che calcolare $\hat{f}(\omega)$ dalla definizione

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t e^{-i\omega t}}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(1-\omega)t}}{(1+t^2)^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(1+\omega)t}}{(1+t^2)^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Per far questo conviene calcolare preventivamente l'integrale

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{(1+t^2)^2} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

usando il Teorema dei residui e introducendo la funzione ausiliaria

$$F(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2}.$$

Questa presenta due poli del secondo ordine nei punti $z = \pm i$ con residui

$$\text{Res}[i] = \frac{\alpha + 1}{4i} e^{-\alpha}, \quad \text{Res}[-i] = \frac{\alpha - 1}{4i} e^{\alpha}.$$

Scegliendo allora opportunamente i cammini di integrazione in base al segno di α e usando il Lemma 2.3 si ottiene

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + |\alpha|) e^{-|\alpha|}$$

per cui in definitiva

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{I(1-\omega) + I(-1-\omega)}{2\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2\pi}} \left[(1 + |1-\omega|) e^{-|1-\omega|} + (1 + |1+\omega|) e^{-|1+\omega|} \right]. \end{aligned}$$

3.3 Equazioni differenziali

Consideriamo una generica equazione differenziale, lineare, di n -mo ordine, non omogenea e a coefficienti costanti

$$\sum_{k=0}^n c_k f^{(k)}(t) = u(t), \quad (3.10)$$

e supponiamo di imporre ad f e u delle condizioni ai limiti (per $t \rightarrow \pm\infty$) tali da consentire di calcolare le trasformate di Fourier \hat{f} e \hat{u} . Se trasformiamo ambedue i membri dell'equazione (3.10), dalla linearità dell'operazione di trasformazione di Fourier e dalla relazione (3.7) otterremo

$$\hat{q}(\omega) \hat{f}(\omega) = \hat{u}(\omega), \quad \hat{q}(\omega) = \sum_{k=0}^n c_k (i\omega)^k.$$

Pertanto potremo scrivere

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{u}(\omega), \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{\hat{q}(\omega)},$$

e la soluzione di (3.10) sarà ottenuta invertendo la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ così determinata. La soluzione può anche essere determinata calcolando prima la trasformata inversa

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{g}(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\hat{q}(\omega)} d\omega;$$

e usando poi il Teorema di convoluzione 3.4 che ci consentirà di calcolare anche la soluzione di (3.10) come

$$f(t) = g(t) \star u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)u(s) ds. \quad (3.11)$$

Esempio 3.5. Consideriamo l'equazione differenziale per la corrente $I(t)$ di un circuito elettrico R - L controllato da un segnale esterno $E(t)$ dato ($a > 0$):

$$LI'(t) + RI(t) = E(t) = E_0 e^{-a|t|}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3.12)$$

e supponiamo di richiedere come condizione ai limiti che $I(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$ in modo tale che esista $\hat{I}(\omega)$ e che si possa calcolare la trasformata di Fourier dei due membri di (3.12). Ricordando allora il risultato (2.30) dell'Esempio 2.4 si ottiene

$$\hat{I}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{aE_0}{(R + i\omega L)(a^2 + \omega^2)}$$

e quindi

$$I(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{I}] = \frac{aE_0}{i\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - iR/L)(\omega - ia)(\omega + ia)} d\omega.$$

Tale trasformata inversa può essere facilmente calcolata con una integrazione in campo complesso secondo lo schema dell'Esempio 2.4: osservando che la funzione integranda presenta tre poli semplici nei punti

$$\omega_1 = iR/L, \quad \omega_2 = ia, \quad \omega_3 = -ia$$

dei quali i primi due ω_1 ed ω_2 si trovano sul semiasse immaginario positivo mentre il terzo ω_3 si trova sul semiasse immaginario negativo, e che i tre residui sono

$$\text{Res}[iR/L] = \frac{L^2 e^{-Rt/L}}{R^2 - a^2 L^2}, \quad \text{Res}[ia] = \frac{L e^{-at}}{2a(R - aL)}, \quad \text{Res}[-ia] = \frac{L e^{-at}}{2a(R + aL)}$$

si ha in definitiva che

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{E_0 e^{at}}{R + aL}, & \text{se } t \leq 0 \\ &= \frac{E_0 e^{-at}}{R - aL} + \frac{2E_0 aL e^{-Rt/L}}{R^2 - a^2 L^2}, & \text{se } t > 0 \end{aligned}$$

della quale si verifica anche facilmente la continuità in $t = 0$.

Si può anche considerare poi l'equazione (sempre con $a > 0$):

$$LI'(t) + RI(t) = E(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ E_0 e^{-at} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3.13)$$

con condizioni iniziali del tipo

$$I(t) = 0, \quad t < 0; \quad I(0) = 0.$$

(Condizioni iniziali $I(0) = I_0 \neq 0$ comporterebbero una discontinuità nell'origine e saranno trattate più appropriatamente con una trasformazione di Laplace nella Sezione 7.2). In questo caso la trasformata di Fourier dell'equazione (3.13) conduce alla relazione

$$\hat{I}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{aE_0}{(R + i\omega L)(a + i\omega)}$$

e la soluzione del problema si ottiene con la trasformazione inversa

$$I(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{I}] = -\frac{aE_0}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - iR/L)(\omega - ia)} dt.$$

Eseguendo l'integrazione in campo complesso osserveremo che questa volta ci sono solo due poli semplici

$$\omega_1 = iR/L, \quad \omega_2 = ia,$$

che si trovano ambedue sul semiasse immaginario positivo. Pertanto, siccome per $t < 0$ saremo costretti a chiudere il cammino di integrazione nel semipiano immaginario negativo dove non vi sono poli, avremo prima di tutto $I(t) = 0$ per $t < 0$. Per $t > 0$ invece il risultato si ottiene facilmente dal teorema dei residui ricordando che

$$\text{Res}[iR/L] = \frac{iL e^{-Rt/L}}{aL - R}, \quad \text{Res}[ia] = \frac{-iL e^{-at}}{aL - R}.$$

In conclusione otterremo

$$\begin{aligned} I(t) &= 0, & \text{se } t \leq 0 \\ &= E_0 \frac{e^{-Rt/L} - e^{-at}}{aL - R}. & \text{se } t > 0 \end{aligned}$$

Parte II

Trasformata di Laplace

Capitolo 4

Trasformata di Laplace

4.1 Integrale di Laplace

Diremo che $f(t)$ è una **funzione di classe \mathcal{C}** se essa è una funzione a valori reali o complessi definita e generalmente continua per $t \geq 0$, e integrabile in ogni intervallo limitato del tipo $[0, a]$. Si osservi che, diversamente dal caso delle trasformate di Fourier, non è richiesto che $f(t)$ sia integrabile su tutto $[0, +\infty)$ per cui non è necessario che le nostre funzioni siano infinitesime per $t \rightarrow +\infty$. Ciò posto, ed indicato con $p = x + iy$ un generico numero complesso, chiameremo **integrale di Laplace** l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4.1)$$

Non è detto che, assegnato un generico valore di p , l'integrale di Laplace appena definito sia convergente: supponendo però che vi siano dei valori di p in cui esso converge, chiameremo **Trasformata di Laplace** la funzione

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \mathcal{L}[f] \quad (4.2)$$

definita nei punti $p \in \mathbb{C}$ in cui l'integrale converge. Se esiste almeno un punto $p \in \mathbb{C}$ in cui $F(p)$ è definita si dice anche che $f(t)$ è **L-trasformabile**. In questo caso per indicare l'associazione fra una funzione $f(t)$ e la sua trasformata di Laplace si usa anche la seguente notazione

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p).$$

Richiameremo ora, senza dimostrazione, alcuni risultati che permettono di stabilire la forma del dominio di convergenza di (4.1) nel piano complesso \mathbb{C} :

Teorema 4.1. *Se l'integrale di Laplace (4.1) converge in $p_0 \in \mathbb{C}$, allora esso converge anche in tutto il semipiano $\operatorname{Re}[p] > \operatorname{Re}[p_0]$; inoltre, se l'integrale di Laplace (4.1) non converge in $p_1 \in \mathbb{C}$, allora esso non converge in tutto il semipiano $\operatorname{Re}[p] < \operatorname{Re}[p_1]$.*

Si noti comunque che, se (4.1) converge in p_0 , è possibile che esso converga anche per $\operatorname{Re}[p] \leq \operatorname{Re}[p_0]$, e viceversa che, se (4.1) non converge in p_1 , è possibile che esso non converga anche per $\operatorname{Re}[p] \leq \operatorname{Re}[p_0]$. Il seguente Teorema stabilisce però che per una data $f(t)$ il dominio di convergenza può sempre sempre essere determinato in maniera precisa:

Teorema 4.2. *Il dominio di convergenza dell'integrale di Laplace di una funzione $f(t)$ L -trasformabile o esaurisce l'intero piano complesso, o consiste nel semipiano $\operatorname{Re}[p] > \alpha$, dove α è un opportuno numero reale il cui valore dipende solo da f e che prende il nome di **ascissa di convergenza**.*

Va comunque precisato che, se α è l'ascissa di convergenza, mentre è certo che l'integrale (4.1) converge per $\operatorname{Re}[p] > \alpha$ e non converge per $\operatorname{Re}[p] < \alpha$, nulla si può dire in generale per $\operatorname{Re}[p] = \alpha$. Infine osserveremo che per determinare α basterà considerare l'integrale di Laplace (4.1) solo per i valori reali x del parametro p .

Osservazione 4.1. *La trasformata di Laplace (4.2) può essere considerata come una **rappresentazione integrale** della funzione $F(p)$ valida nel semipiano di convergenza. Si tratta di un punto di vista opposto rispetto a quello fin qui adottato: invece di partire dalla funzione $f(t)$ per calcolarne la trasformata di Laplace (4.2) chiedendoci di determinare anche il dominio di convergenza del corrispondente integrale, si parte dalla funzione di variabile complessa $F(p)$ e ci si chiede in quale dominio di \mathbb{C} è possibile rappresentarla mediante l'integrale (4.1).*

4.2 Esempi

Spesso negli esempi che seguono le funzioni $f(t)$ considerate sono naturalmente definite anche per $t < 0$: ciononostante, e fino ad indicazione del contrario, noi ne considereremo solo la restrizione al semiasse $t > 0$. Inoltre adotteremo la notazione $p = x + iy$ per indicare le parti reale ed immaginaria

del numero complesso p . Infine, per semplificare le notazioni, faremo spesso uso della cosiddetta funzione di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Esempio 4.1. *L'integrale di Laplace (4.1) di*

$$f(t) = c e^{qt}; \quad q \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad t \geq 0$$

si calcola in maniera elementare:

$$\int_0^{+\infty} c e^{(q-p)t} dt = \frac{c}{q-p} \lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{(q-p)a} - 1];$$

questa espressione evidentemente converge ad un valore finito solo se $\operatorname{Re}[p] > \operatorname{Re}[q]$ osservando che

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{(q-p)a} = 0, \quad \text{se} \quad \operatorname{Re}[p] > \operatorname{Re}[q].$$

Se invece $\operatorname{Re}[p] \leq \operatorname{Re}[q]$ l'integrale di Laplace diverge o non esiste: ad esempio sulla retta $\operatorname{Re}[p] = \alpha$ l'integrale di Laplace ha un comportamento oscillante e quindi non converge. Pertanto l'ascissa di convergenza è $\alpha = \operatorname{Re}[q]$ e noi potremo scrivere

$$f(t) = c e^{qt} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{c}{p-q} \quad \alpha = \operatorname{Re}[q].$$

Infine con $q = 0$ si ottiene anche la seguente associazione

$$f(t) = c \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{c}{p} \quad \alpha = 0.$$

Esempio 4.2. *Utilizzando le ben note formule di Euler l'integrale di Laplace di $f(t) = \cos qt$ con $q \in \mathbb{C}$ si decompone nella somma di due integrali del tipo trattato nell'Esempio precedente e si ha*

$$\int_0^{+\infty} \cos qt e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-iq} + \frac{1}{p+iq} \right) = \frac{p}{p^2 + q^2}$$

sempre che siano rispettate contemporaneamente le condizioni di convergenza dei due integrali: $\operatorname{Re}[p] > \operatorname{Re}[iq]$ e $\operatorname{Re}[p] > \operatorname{Re}[-iq]$. Pertanto l'ascissa di convergenza sarà $\alpha = |\operatorname{Im}[q]|$. Trattando gli altri casi in maniera perfettamente analoga

otterremo le associazioni

$$\begin{aligned} f(t) = \cos qt & \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{p}{p^2 + q^2} & \alpha = |\operatorname{Im}[q]| \\ f(t) = \sin qt & \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{q}{p^2 + q^2} & \alpha = |\operatorname{Im}[q]| \\ f(t) = \cosh qt & \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{p}{p^2 - q^2} & \alpha = |\operatorname{Re}[q]| \\ f(t) = \sinh qt & \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{q}{p^2 - q^2} & \alpha = |\operatorname{Re}[q]| \end{aligned}$$

Esempio 4.3. La restrizione a $t > 0$ della funzione di Heaviside $H(t)$ definita in (4.3) coincide con la costante 1 per cui la trasformata di Laplace di $cH(t)$ è stata già calcolata nell'Esempio 4.1. Viceversa per la funzione di Heaviside ritardata $cH(t-a)$ con $a > 0$ si ha ponendo $\tau = t - a$

$$\int_a^{+\infty} c e^{-pt} dt = c e^{-pa} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} d\tau = \frac{c e^{-ap}}{p}$$

se $\operatorname{Re}[p] > 0$. Pertanto otteniamo l'associazione

$$f(t) = cH(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = c \frac{e^{-ap}}{p} \quad \alpha = 0$$

In maniera analoga per la funzione impulso rettangolare $f(t) = c[H(t-a) - H(t-b)]$ con $0 < a < b$ si ha l'associazione

$$f(t) = c[H(t-a) - H(t-b)] \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = c \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p} \quad \alpha = 0$$

Esempio 4.4. Il cambiamento di variabile $\tau = pt$ e un'integrazione per parti mostrano che

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} \tau^n e^{-\tau} d\tau = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

se si verifica che $\operatorname{Re}[p] > 0$. Pertanto otteniamo

$$f(t) = c t^n \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = c \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \alpha = 0$$

Esempio 4.5. La funzione parte intera di t definita da

$$f(t) = [t] = n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, \dots$$

ha un integrale di Laplace che converge per $\operatorname{Re}[p] > 0$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} [t] e^{-pt} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} n e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[e^{-np} - e^{-(n+1)p} \right] = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} \end{aligned}$$

e la serie geometrica di ragione e^{-p} converge se $|e^{-p}| < 1$, cioè se $\operatorname{Re}[p] > 0$. Se ne ottiene quindi il risultato

$$f(t) = [t] \quad \xleftarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})} \quad \alpha = 0$$

Esempio 4.6. Ci sono ovviamente anche funzioni che non sono L -trasformabili: ad esempio

$$f(t) = e^{t^2}$$

ha un integrale di Laplace che non converge per nessun valore di p . Infatti, limitandoci per semplicità e senza perdere di generalità a $p = x$ reale, l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2 - xt} dt$$

non converge per nessun valore di x : se $x \leq 0$, essendo $t \geq 0$ si ha

$$e^{t^2 - xt} \geq e^{t^2}$$

con e^{t^2} non integrabile. Se invece $x > 0$, fissato $a > x + 1$ si ha

$$\int_0^a e^{t^2 - xt} dt = \int_0^{x+1} e^{t^2 - xt} dt + \int_{x+1}^a e^{t^2 - xt} dt > \int_{x+1}^a e^{t^2 - xt} dt;$$

ma per $t > x + 1$ si ha anche $t^2 - xt = t(t - x) > t$ per cui

$$\int_0^a e^{t^2 - xt} dt > \int_{x+1}^a e^t dt$$

con l'integrale a secondo membro divergente per $a \rightarrow +\infty$.

4.3 Trasformata bilatera di Laplace

Supporremo ora di considerare una funzione $f(t)$ definita per $-\infty < t < +\infty$ che sia generalmente continua ed integrabile in ogni intervallo limitato

del tipo $[a, b]$: potremo allora considerare l'**integrale di Laplace bilatero** definito da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (4.4)$$

che, nei punti $p \in \mathbb{C}$ in cui converge, definisce la **Trasformata bilatera di Laplace**

$$F(p) = \overleftrightarrow{\mathcal{L}} [f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (4.5)$$

per la quale useremo anche la notazione

$$f(t) \xleftrightarrow{\overleftrightarrow{\mathcal{L}}} F(p).$$

Osserviamo ora che se $f(t) = 0$ per $t < 0$ l'integrale (4.4) coinciderà con l'integrale (4.1), per cui la trasformata di Laplace *unilatera*, cioè quella definita nella Sezione 4.1, risulta coincidere con la trasformata bilatera di funzioni identicamente nulle sul semiasse negativo delle t . Inoltre è possibile caratterizzare anche i domini di convergenza degli integrali bilateri: consideriamo le seguenti funzioni definite solo per $t > 0$

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \text{restrizione di } f(t) \text{ a } t > 0, \\ f_-(t) &= \text{restrizione di } f(-t) \text{ a } t > 0, \end{aligned}$$

e supponiamo che i loro integrali (unilateri) di Laplace

$$F_+(p) = \int_0^{+\infty} f_+(t) e^{-pt} dt, \quad F_-(p) = \int_0^{+\infty} f_-(t) e^{-pt} dt$$

abbiano rispettivamente come ascisse di convergenza α e $-\beta$. Si vede allora facilmente per la trasformata bilatera, dove essa esiste, che

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(-t) e^{pt} dt + \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_-(t) e^{pt} dt + \int_0^{+\infty} f_+(t) e^{-pt} dt = F_+(p) + F_-(-p) \end{aligned}$$

e quindi che il suo dominio di convergenza è l'intersezione fra i due semipiani di convergenza di $F_+(p)$ ed $F_-(p)$ ossia

$$\operatorname{Re}[p] > \alpha, \quad \operatorname{Re}[-p] > -\beta.$$

Ne segue che il dominio di convergenza è costituito dalla **striscia di convergenza**

$$\alpha < \operatorname{Re}[p] < \beta$$

e che pertanto la trasformata bilatera esiste soltanto se $\alpha < \beta$. Nel caso in cui $\alpha = \beta$ la trasformata bilatera può esistere solo sull'asse $\operatorname{Re}[p] = \alpha = \beta$. Naturalmente nel caso in cui $f_-(t) = 0$ per ogni $t > 0$ (caso in cui le trasformate unilatera e bilatera di $f(t)$ coincidono) il semipiano di convergenza di $F_-(p)$ coincide con tutto il piano complesso e quindi $\beta = +\infty$ per cui la striscia di convergenza è tutto il semipiano $\operatorname{Re}[p] > \alpha$.

Osservazione 4.2. *Nello spirito dell'Osservazione 4.1 possiamo dire che la trasformata bilatera di Laplace (4.5) può essere considerata come una **rappresentazione integrale** della funzione $F(p)$ valida nella striscia di convergenza. Adottando questo punto di vista una medesima funzione $F(p)$ potrà essere suscettibile di rappresentazioni integrali diverse – cioè a partire da funzioni $f(t)$ diverse – in varie strisce o semipiani di convergenza.*

Esempio 4.7. *L'integrale di Laplace bilatero della funzione $e^{-q|t|}$ con $q \in \mathbb{C}$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt-q|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(p-q)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(p+q)t} dt$$

converge se contemporaneamente risultano verificate le disuguaglianze $\operatorname{Re}[p-q] < 0$ e $\operatorname{Re}[p+q] > 0$. Pertanto, posto $\alpha = \operatorname{Re}[q]$ e supponendo che sia $\alpha > 0$, la striscia di convergenza del nostro integrale sarà $-\alpha < \operatorname{Re}[p] < \alpha$ e in tale striscia risulterà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt-q|t|} dt = \frac{1}{p+q} - \frac{1}{p-q} = \frac{-2q}{p^2 - q^2}.$$

Conseguentemente potremo scrivere la seguente relazione

$$f(t) = -\frac{e^{-q|t|}}{2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{q}{p^2 - q^2} \quad -\alpha < \operatorname{Re}[p] < \alpha$$

Sarà utile ricordare a questo punto che dall'Esempio 4.2 si hanno anche le seguenti associazioni

$$\begin{aligned} f(t) = H(t) \sinh q|t| & \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{q}{p^2 - q^2} & \quad \alpha < \operatorname{Re}[p] \\ f(t) = H(-t) \sinh q|t| & \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{q}{p^2 - q^2} & \quad \operatorname{Re}[p] < -\alpha \end{aligned}$$

Ne segue che la medesima funzione $F(p)$ può essere considerata, in differenti domini del piano complesso p , trasformata di Laplace di differenti funzioni: in pratica $F(p)$ risulta suscettibile, in diversi domini, di diverse rappresentazioni in termini di integrale (in generale bilatero) di Laplace. Si osservi infine che della medesima funzione di partenza $e^{-q|t|}$ può essere calcolata la trasformata unilatera di Laplace e questo, come sappiamo dall'Esempio 4.1 conduce all'associazione

$$f(t) = -\frac{e^{-q|t|}}{2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = -\frac{1}{2(p+q)} \quad -\alpha < \operatorname{Re}[p]$$

la quale costituisce, nell'appropriato semipiano di convergenza, una rappresentazione integrale della funzione $-1/2(p+q)$.

Capitolo 5

Proprietà della Trasformata di Laplace

5.1 Olomorfia della Trasformata di Laplace

Sarà utile definire preliminarmente i cosiddetti domini angolari:

$$\Omega(p_0, \psi) = \{p \in \mathbb{C} : -\psi \leq \arg(p - p_0) \leq \psi\}, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (5.1)$$

Ciò posto possiamo ad enunciare senza dimostrazione alcuni importanti risultati relativi alla olomorfia delle trasformate di Laplace: fino ad esplicita menzione del contrario gli integrali di Laplace considerati qui sono quelli unilateri.

Teorema 5.1. *Se l'integrale di Laplace di $f(t)$ converge in p_0 , allora esso converge uniformemente rispetto a p in ogni dominio angolare $\Omega(p_0, \psi)$ con $0 < \psi < \pi/2$. Inoltre, se l'integrale di Laplace di $f(t)$ converge in p_0 , allora la sua trasformata di Laplace $F(p)$ è limitata in ogni $\Omega(p_0, \psi)$ con $0 < \psi < \pi/2$.*

Teorema 5.2. *La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$ L -trasformabile è funzione olomorfa di p all'interno del semipiano di convergenza dell'integrale di Laplace, e le sue derivate si calcolano derivando sotto segno di integrale:*

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt. \quad (5.2)$$

Avremo pertanto l'associazione

$$\boxed{(-t)^n f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F^{(n)}(p), \quad \operatorname{Re}[p] > \alpha} \quad (5.3)$$

Da questi due Teoremi si ricava che la trasformata di Laplace unilatera è sempre una funzione olomorfa e limitata in tutto il semipiano di convergenza. Tale semipiano, comunque, deve essere in generale privato del bordo $\text{Re}[p] = \alpha$. Risultati analoghi sussistono per le trasformate bilateri che risultano olomorfe e limitate nelle rispettive strisce – aperte – di convergenza.

Osservazione 5.1. *Una conseguenza del Teorema 5.2 è che una funzione $F(p)$ per poter essere considerata trasformata di Laplace (unilatera) di qualche funzione $f(t)$ di classe \mathcal{C} – ossia per essere rappresentabile in integrale di Laplace unilatero – deve necessariamente essere una funzione olomorfa della variabile p in tutto un semipiano di \mathbb{C} . Ad ogni modo questa rimane solo una condizione necessaria, ma non sufficiente: vedremo infatti più oltre che molte funzioni olomorfe (o addirittura intere) non sono rappresentabili come integrali di Laplace unilateri di funzioni di classe \mathcal{C} . D'altra parte questa osservazione mette in evidenza un metodo pratico per determinare il semipiano di \mathbb{C} nel quale una data funzione $F(p)$ può essere rappresentabile come integrale di Laplace unilatero di una funzione $f(t)$: siccome nel semipiano di convergenza la $F(p)$ deve essere olomorfa, tale semipiano sarà il più grande possibile che non contenga nessuna delle eventuali singolarità di $F(p)$. In sostanza, se $F(p)$ è rappresentabile come integrale di Laplace, l'ascissa di convergenza coincide con il più grande fra i numeri reali $\text{Re}[p_j]$ dove p_j sono le singolarità di $F(p)$.*

Considerazioni analoghe si applicano al problema della rappresentabilità di $F(p)$ in integrale di Laplace bilatero in opportune strisce di \mathbb{C} : siccome nelle strisce di convergenza la $F(p)$ deve essere olomorfa, tali strisce non potranno contenere singolarità e quindi saranno determinate dalla collocazione delle singolarità di $F(p)$.

Esempio 5.1. *Il Teorema 5.2 consente di calcolare nuove trasformate di Laplace a partire da quelle già note. Così dall'Esempio 4.1*

$$f(t) = e^{qt} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{1}{p - q} \quad \alpha = \text{Re}[q]$$

si ricava subito

$$f(t) = t^n e^{qt} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p - q} \right) = \frac{n!}{(p - q)^{n+1}} \quad \alpha = \text{Re}[q];$$

e analogamente dall'Esempio 4.5

$$f(t) = [t] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{1}{p(e^p - 1)} \quad \alpha = 0$$

si ricava

$$f(t) = t [t] \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = -\frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p(e^p - 1)} \right] = \frac{(1 + p^2)e^p - 1}{p^2(e^p - 1)^2} \quad \alpha = 0.$$

Esempio 5.2. Il Teorema 5.2 fornisce anche un nuovo metodo per il calcolo delle trasformate di Laplace: consideriamo ad esempio la funzione gaussiana

$$f(t) = e^{-t^2}, \quad t \geq 0.$$

A causa della rapidità con cui essa si annulla per $t \rightarrow +\infty$, il suo integrale di Laplace converge per ogni valore di p , sicché la sua ascissa di convergenza è $\alpha = -\infty$. Per calcolare la corrispondente $F(p)$ osserveremo che con un'integrazione per parti si ha

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} t e^{-pt-t^2} dt = -\frac{1}{2} + \frac{p}{2} F(p)$$

e inoltre che per un ben noto risultato

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pertanto $F(p)$ verifica una semplice equazione differenziale lineare, del primo ordine con una ben determinata condizione iniziale. Ci vuol poco a mostrare che la soluzione di questa equazione è

$$F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p^2/4} \left[1 - \Psi\left(\frac{p}{2}\right) \right]$$

dove la funzione $\Psi(p)$ è il prolungamento analitico della cosiddetta funzione errore definita da

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt;$$

una funzione perfettamente regolare, ma che non può essere altrimenti espressa come una combinazione finita di altre funzioni elementari. Possiamo esprimere questo risultato anche con l'associazione

$$f(t) = e^{-t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p^2/4} \left[1 - \Psi\left(\frac{p}{2}\right) \right] \quad \alpha = -\infty.$$

Va infine osservato che per la nostra funzione gaussiana potremo anche calcolare la trasformata bilaterale di Laplace in una striscia di convergenza coincidente con tutto \mathbb{C} . Infatti in questo caso, usando le notazioni della Sezione 4.3, dato che

$f_+(t) = f_-(t) = f(t)$ per $t \geq 0$, e dato che $\Psi(-x) = -\Psi(x)$, avremo per la trasformata bilatera

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt-t^2} dt = F_+(p) + F_-(-p) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p^2/4} \left[1 + \Psi\left(\frac{p}{2}\right) \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{p^2/4} \left[1 - \Psi\left(\frac{p}{2}\right) \right] = \sqrt{\pi} e^{p^2/4} \end{aligned}$$

ossia anche

$$f(t) = e^{-t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \sqrt{\pi} e^{p^2/4} \quad p \in \mathbb{C}.$$

5.2 Regole di trasformazione

Proposizione 5.3. Sia $f(t)$ una funzione L -trasformabile con ascissa di convergenza α e sia $F(p)$ la sua trasformata di Laplace; se a è un numero reale e positivo, e se s è un generico numero complesso, avremo le seguenti relazioni

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aF(ap) \quad \frac{\alpha}{a} < \operatorname{Re}[p] \quad (5.4)$$

$$e^{st} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p-s) \quad \alpha + \operatorname{Re}[s] < \operatorname{Re}[p] \quad (5.5)$$

$$H(t-a)f(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-ap} F(p) \quad \alpha < \operatorname{Re}[p] \quad (5.6)$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (5.4) è basata sulla semplice osservazione che ponendo $\tau = at$ si ha

$$F(ap) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-apt} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau.$$

Anche (5.5) si ottiene immediatamente da

$$F(p-s) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{st} f(t) dt.$$

Quanto a (5.6) bisogna osservare che $f(t)$ è in generale definita solo per $t \geq 0$, per cui $f(t-a)$ sarebbe definita solo per $t \geq a$. Per evitare questo problema si suppone che $f(t)$ sia in qualche modo prolungata per $t < 0$, ma sia poi identicamente resa nulla in tale zona considerando la funzione $H(t)f(t)$ per

ogni t , dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside (4.3). Ponendo allora $\tau = t + a$ si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} H(t) f(t) dt \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-p(\tau-a)} H(\tau-a) f(\tau-a) d\tau \\ &= e^{ap} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} H(\tau-a) f(\tau-a) d\tau \end{aligned}$$

che dimostra la (5.6). □

Esempio 5.3. *I risultati della Proposizione 5.3 consentono di estendere le associazioni fra funzioni e trasformate di Laplace già note. Così ad esempio, con s, q numeri complessi e a reale e positivo*

$$\begin{aligned} f(t) = \left[\frac{t}{a} \right] &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{1}{p(e^{ap} - 1)} && 0 < \operatorname{Re}[p] \\ f(t) = e^{st} \cos qt &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{p-s}{(p-s)^2 + q^2} && |\operatorname{Im}[q]| + \operatorname{Re}[s] < \operatorname{Re}[p] \\ f(t) = e^{st} \sin qt &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{q}{(p-s)^2 + q^2} && |\operatorname{Im}[q]| + \operatorname{Re}[s] < \operatorname{Re}[p] \\ f(t) = e^{st} [t] &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{1}{(p-s)(e^{p-s} - 1)} && \operatorname{Re}[s] < \operatorname{Re}[p] \\ f(t) = H(t-a)(t-a)^n &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = e^{-ap} \frac{n!}{p^{n+1}} && 0 < \operatorname{Re}[p] \end{aligned}$$

Proposizione 5.4. *Sia $f(t)$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, L -trasformabile con trasformata di Laplace $F(p)$, e sia*

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{se } T < t \end{cases}$$

Se con $\Phi(p)$ indichiamo la trasformata di Laplace di $\varphi(t)$, allora avremo

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}} \quad \alpha = 0 \quad (5.7)$$

Dimostrazione. Ponendo $\tau = t - nT$ e usando la periodicità di $f(t)$ si ha

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} \int_0^T e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}} \end{aligned}$$

se sono garantite le condizioni per la convergenza della serie geometrica, cioè se $|e^{-pT}| < 1$. Questo avviene se $\operatorname{Re}[p] > 0$, il che implica anche che l'ascissa di convergenza è $\alpha = 0$. \square

Esempio 5.4. Consideriamo la funzione, periodica di periodo $T = 1$, $f(t) = t - [t]$. In questo caso si ha

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t \end{cases}$$

e facilmente si verifica, mediante un'integrazione per parti, che

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = \int_0^1 t e^{-pt} dt = \frac{1 - (1+p)e^{-p}}{p^2}.$$

Ne segue allora che

$$f(t) = t - [t] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = \frac{1 - (1+p)e^{-p}}{p^2(1 - e^{-p})} \quad \alpha = 0$$

Proposizione 5.5. Se $f(t)$ definita per $t \geq 0$ è derivabile n volte ed è L -trasformabile assieme a tutte le sue derivate, detta $F(p)$ la trasformata di $f(t)$, allora per ogni punto p per il quale convergono gli integrali di Laplace di f e delle sue derivate risulta

$$\boxed{f^{(n)}(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0^+).} \quad (5.8)$$

Inoltre, preso $a > 0$, risulterà anche

$$\boxed{\int_a^t f(\tau) d\tau \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{F(p)}{p} - \frac{1}{p} \int_0^a f(\tau) d\tau.} \quad (5.9)$$

Osservazione 5.2. Ovviamente, se $f(0^+) = f'(0^+) = \dots = f^{(n-k-1)}(0^+) = 0$ la relazione (5.8) si semplifica in

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} p^n F(p). \quad (5.10)$$

Analogamente se $a = 0$ la (5.9) diviene

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}. \quad (5.11)$$

Dimostrazione. Discuteremo (5.8) solo nel caso $n = 1$ osservando che la formula generale si ricava iterando la dimostrazione. Se p è un punto in cui convergono gli integrali di Laplace di f e di f' , scelti due numeri $0 < a < b$ avremo da un'integrazione per parti

$$\int_a^b e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pb} f(b) - e^{-pa} f(a) + p \int_a^b e^{-pt} f(t) dt.$$

Siccome per ipotesi ambedue gli integrali presenti in questa relazione convergono separatamente per $a \rightarrow 0^+$ e per $b \rightarrow +\infty$, esisteranno anche separatamente i due analoghi limiti rispettivamente di $e^{-pa} f(a)$ e $e^{-pb} f(b)$ e in particolare, dato che $e^{-pt} f(t)$ deve essere integrabile e quindi infinitesima per $t \rightarrow +\infty$, avremo

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-pa} f(a) = f(0^+), \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-pb} f(b) = 0.$$

Ne segue immediatamente che

$$f'(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0^+).$$

Quanto alla formula (5.9) basterà dimostrarla nella versione (5.11) dato che, preso poi un $a > 0$, la (5.9) deriva dalla trasformazione della relazione

$$\int_a^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^a f(\tau) d\tau$$

tenendo conto di (5.11) e del fatto che il secondo integrale è una costante rispetto a t . D'altra parte per dimostrare (5.11) osserviamo che la funzione

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

è tale che $\varphi'(t) = f(t)$ con $\varphi(0) = 0$. Pertanto, detta $\Phi(p)$ la richiesta trasformata di Laplace di $\varphi(t)$ e usando (5.10), avremo

$$f(t) = \varphi'(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) = p\Phi(p)$$

da cui deriva immediatamente la (5.11). \square

A causa del fatto che due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ di classe \mathcal{C} sono definite solo per $t \geq 0$, la funzione di τ con t assegnato $f(\tau)g(t - \tau)$ è definita solo per $0 \leq \tau \leq t$. Pertanto il **prodotto di convoluzione** sarà qui ridefinito in maniera diversa da (3.8) come

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \\ &= g(t) \star f(t) = \int_0^t g(t - \tau)f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Peraltro questa definizione coincide (a parte il fattore moltiplicativo $1/\sqrt{2\pi}$) con la definizione (3.8) se f e g vengono supposte estese e identicamente nulle per $t < 0$.

Teorema 5.6. *Se $f(t)$ e $g(t)$ sono L -trasformabili e se $F(p)$ e $G(p)$ sono rispettivamente le loro trasformate di Laplace, allora*

$$\boxed{f(t) \star g(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(p) G(p)}$$

nel semipiano di convergenza più piccolo fra i due semipiani di f e g .

Dimostrazione. Si vede subito che

$$\mathcal{L}[f \star g] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \iint_T e^{-pt} f(\tau)g(t - \tau) dt d\tau$$

dove T è il dominio illimitato

$$T = \{(t, \tau) : 0 \leq t, 0 \leq \tau \leq t\}.$$

Il cambiamento di variabili $u = t - \tau$, $v = \tau$ ha come determinante Jacobiano $|J| = 1$ e trasforma T nel nuovo dominio

$$D = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0\}$$

per cui avremo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f \star g] &= \iint_D e^{-p(u+v)} f(v)g(u) \, du \, dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v) \, dv \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u) \, du = F(p)G(p)\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. \square

Capitolo 6

Inversione della Trasformata di Laplace

6.1 Teorema di unicità

Come vedremo nel successivo Capitolo 7 molti problemi differenziali o integrali si possono risolvere passando alle trasformate di Laplace: le regole di trasformazione discusse nella sezione 5.2 consentono infatti di ottenere delle equazioni più semplici che forniscono le trasformate di Laplace $F(p)$ delle soluzioni $f(t)$ cercate. Risulta importante allora avere delle tecniche che consentano di risalire da $F(p)$ ad $f(t)$. In alcuni casi questa operazione di **anti-trasformazione di Laplace** è semplice perchè consiste solo nell'andare a consultare qualcuna delle associazioni fra $f(t)$ e $F(p)$ già studiate come quelle della Sezione 4.2 o quelle esposte nei diversi Esempi dei Capitoli precedenti. In altri casi però l'individuazione dell'anti-trasformata, se essa esiste, è meno immediata. Ad esempio sappiamo dal Teorema 5.2 che una $F(p)$ per essere la Trasformata di Laplace di una qualche funzione $f(t)$ deve essere olomorfa in tutto un semipiano $\operatorname{Re}[p] > \alpha$, ma questa è solo una condizione necessaria e non sufficiente. Infatti la $F(p)$ deve anche godere di tutte le altre proprietà delle trasformate. Cominceremo allora stabilendo innanzitutto che il problema dell'inversione della trasformata di Laplace unilatera è ben posto: data una $F(p)$ non può che esistere al più una $f(t)$ di cui $F(p)$ è trasformata di Laplace. Considerazioni analoghe valgono per le trasformate bilatere.

Teorema 6.1. *Se $f(t)$ è L -trasformabile con ascissa di convergenza α e*

trasformata $F(p)$, e se $F(p) = 0$ identicamente nel semipiano di convergenza, allora $f(t) = 0$ q.o.

Corollario 6.2. *Se due funzioni L -trasformabili $f(t)$ e $g(t)$ hanno la medesima Trasformata di Laplace, allora esse coincidono q.o.*

Dimostrazione. Questo risultato è immediata conseguenza del Teorema 6.1: infatti la funzione $f(t) - g(t)$ risulterà avere trasformata di Laplace identicamente nulla e quindi risulterà essa stessa q.o. nulla. \square

Osservazione 6.1. *Questi Teoremi consentono in alcuni casi di riconoscere se una $F(p)$ non è anti-trasformabile. Ad esempio i polinomi (non identicamente nulli) non sono trasformate di Laplace di qualche funzione $f(t)$. Infatti se $P_n(p)$ è un polinomio di grado $n \geq 1$ avremo lungo ogni retta parallela al semiasse reale positivo che*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |P_n(p)| = +\infty$$

il che contraddice il Teorema 5.1. Se però $P_n(p)$ è un polinomio di grado zero, cioè è una costante c diversa da zero, esso resta ovviamente limitato in tutto \mathbb{C} . Ciononostante una costante $c \neq 0$ non può essere una trasformata di Laplace: se infatti esistesse una funzione $f(t)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = c \neq 0$$

il Teorema 5.2 di derivazione implicherebbe che

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt = 0$$

ma allora dal Teorema 6.1 di unicità si ricaverebbe che $t f(t) = 0$ q.o., ovvero anche $f(t) = 0$ q.o., e quindi la trasformata di Laplace non potrebbe essere, come ipotizzato, diversa da zero. Analoghe considerazioni conducono alla conclusione che anche gli esponenziali del tipo e^{ap} non possono essere trasformate di Laplace.

6.2 Formula di Riemann

La cosiddetta **Formula di Riemann** consente, nei casi in cui ciò è possibile, di risalire da $F(p)$ ad $f(t)$ con un metodo molto generale. Essa si applica prima di tutto alle trasformate di Laplace bilatere definite nella Sezione 4.3.

Supponiamo di considerare $p = x + iy$ appartenente alla striscia di convergenza $\alpha < \operatorname{Re}[p] < \beta$ di una trasformata di Laplace bilatera $F(p)$ e osserviamo che

$$\begin{aligned} F(p) = F(x + iy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} \left[\sqrt{2\pi} e^{-xt} f(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Quindi, fissato $x \in (\alpha, \beta)$, $F(p)$ come funzione di y risulta essere la trasformata di Fourier della funzione $\sqrt{2\pi} e^{-xt} f(t)$: se allora $f(t)$ soddisfa le condizioni per l'inversione della trasformata di Fourier e se è stata preliminarmente ridefinita nelle eventuali discontinuità come in (1.4), dalla (2.10) si ha

$$\sqrt{2\pi} e^{-xt} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iyt} F(x + iy) dy.$$

Eseguendo allora l'integrazione lungo una retta parallela all'asse immaginario e passante per x (con $dp = i dy$) otteniamo la formula di Riemann

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{x-i\lambda}^{x+i\lambda} e^{(x+iy)t} F(x + iy) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Si osservi che siccome il primo membro di (6.1) non dipende da x , la formula deve valere con qualunque scelta del valore di x in (α, β) . Inoltre bisogna ricordare che la formula è stata dimostrata per le trasformate bilatere, ma questo non ci impedisce di usarla anche nel caso delle trasformate unilateri. Infatti se $F(p)$ è trasformata unilatera con ascissa di convergenza α , e se si applica (6.1) lungo la retta parallela all'asse immaginario e passante per $x > \alpha$, si ottiene una $f(t)$ definita per ogni t , ma identicamente nulla per $t < 0$. La discussione svolta nella Sezione 4.3 mostra allora che la nostra anti-trasformata non è altro che la restrizione di questa $f(t)$ al semiasse $t \geq 0$. Sarà utile a questo punto discutere un Lemma, analogo al Lemma 2.3, utile per rendere più agevole l'uso della formula di Riemann

Lemma 6.3. *Data una funzione $F(p)$ olomorfa in \mathbb{C} tranne che in un numero finito di singolarità isolate p_1, \dots, p_n ; preso un numero reale x_0 , e una*

circonferenza Γ di centro in $p = 0$ e raggio $R > \max_k \{|p_k|\}$; detti Γ_- e Γ_+ gli archi tagliati su Γ dalla retta $\operatorname{Re}[p] = x_0$ rispettivamente con $\operatorname{Re}[p] \leq x_0$ e $\operatorname{Re}[p] \geq x_0$; se

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{\Gamma} |F(p)| = 0$$

allora si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_-} e^{pt} F(p) dp = 0 \quad t \geq 0 \quad (6.2)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_+} e^{pt} F(p) dp = 0 \quad t \leq 0 \quad (6.3)$$

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto il caso $t \geq 0$ e per fissare le idee supponiamo $x_0 > 0$: se scegliessimo $x_0 < 0$, la dimostrazione subirebbe solo delle modifiche inessenziali. Avremo dunque

$$\left| \int_{\Gamma_-} e^{pt} F(p) dp \right| \leq \max_{\Gamma_-} |F(p)| \int_{\beta}^{2\pi-\beta} e^{tR \cos \theta} R d\theta.$$

dove abbiamo posto

$$\beta(R) = \arccos \frac{x_0}{R}, \quad 0 < \beta(R) < \frac{\pi}{2}. \quad (6.4)$$

Siccome per ipotesi

$$\max_{\Gamma_-} |F(p)| \leq \max_{\Gamma} |F(p)| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty$$

la (6.2) sarà dimostrata se riusciremo a provare che l'integrale

$$I_-(R) = \int_{\beta}^{2\pi-\beta} e^{tR \cos \theta} R d\theta$$

si mantiene limitato per $R \rightarrow +\infty$. A questo scopo osserviamo che

$$\int_{\beta}^{2\pi-\beta} e^{tR \cos \theta} R d\theta = \int_{\beta}^{\pi} e^{tR \cos \theta} R d\theta + \int_{\pi}^{2\pi-\beta} e^{tR \cos \theta} R d\theta$$

e che con la trasformazione di variabili $\phi = 2\pi - \theta$ si ha

$$\int_{\pi}^{2\pi-\beta} e^{tR \cos \theta} R d\theta = \int_{\beta}^{\pi} e^{tR \cos \phi} R d\phi;$$

per cui avremo

$$I_-(R) = 2 \int_{\beta}^{\pi} e^{tR \cos \theta} R d\theta.$$

Inoltre un semplice esame dei grafici mostra che

$$\begin{aligned} \cos \theta &\leq \frac{\pi}{2} - \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \cos \theta &\leq 1 - \frac{2\theta}{\pi}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; \end{aligned}$$

e quindi, essendo $tR > 0$ ed e^x crescente,

$$\begin{aligned} I_-(R) &\leq 2 \int_{\beta}^{\pi/2} e^{tR(\pi-2\theta)/2} R d\theta + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR(\pi-2\theta)/\pi} R d\theta \\ &= \frac{2}{t} [e^{tR(\pi-2\beta)/2} - 1] + \frac{\pi}{t} (1 - e^{-tR}) \end{aligned}$$

Ma da (6.4) si vede che $\beta(R) \rightarrow \pi/2$ per $R \rightarrow +\infty$, per cui dall'uso della regola di l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} R \frac{\pi - 2\beta(R)}{2} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\beta(R)}{2/R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^2 \beta'(R) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{Rx_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}} = x_0 \end{aligned}$$

e quindi in definitiva

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_-(R) \leq \frac{2(e^{x_0 t} - 1) + \pi}{t}.$$

Questo completa la dimostrazione. Il caso $t < 0$ per l'arco Γ_+ si tratta in maniera analoga. Se infine x_0 fosse un numero reale negativo si modificherebbe solo in maniera inessenziale il valore degli estremi di integrazione degli integrali I_+ ed I_- . \square

Questo Lemma consente di utilizzare la Formula di Riemann con una relativa facilità. Supponiamo di avere una funzione $F(p)$ che soddisfa le ipotesi del Lemma 6.3: posto innanzitutto $\alpha = \max_k \{\operatorname{Re}[p_k]\}$, la $F(p)$ risulterà rappresentabile in integrale (unilatero) di Laplace di una $f(t)$ di classe \mathcal{C} in tutto il semipiano $\operatorname{Re}[p] > \alpha$. Per determinare tale anti-trasformata $f(t)$ prenderemo un arbitrario $x_0 > \alpha$ ed applicheremo la formula di Riemann (6.1) lungo

la retta $\operatorname{Re}[p] = x_0$. Risulta conveniente eseguire l'integrazione nel campo complesso mediante il Teorema dei residui: basterà infatti considerare una circonferenza Γ , di centro in $p = 0$ e raggio $R > x_0$, che contenga al suo interno tutte le singolarità di $F(p)$, ed eseguire l'integrazione lungo i cammini chiusi costituiti dalla corda tagliata da Γ sulla retta $\operatorname{Re}[p] = x_0$ e da uno dei due archi Γ_- o Γ_+ , rispettivamente nei casi in cui $t > 0$ o $t < 0$. I limiti per $R \rightarrow +\infty$ degli integrali lungo Γ_- e Γ_+ sono sempre nulli in virtù del nostro Lemma, e la differenza principale fra i due casi consiste nel fatto che tutte le singolarità di $e^{pt}F(p)$ – che ovviamente coincidono con quelle di $F(p)$ – cadono per costruzione solo all'interno del cammino chiuso con Γ_- (per $t > 0$), mentre all'interno dell'altro cammino chiuso con Γ_+ (per $t < 0$) la $F(p)$ è olomorfa. Conseguentemente $f(t)$ risulta identicamente nulla per $t < 0$, mentre per $t > 0$ – tenendo conto dell'orientazione antioraria del cammino chiuso – la Formula di Riemann ci dice che essa consiste nella somma dei residui di tutte le singolarità di $e^{pt}F(p)$. Naturalmente questo corrisponde ad identificare la trasformata unilatera di $f(t)$ con la trasformata bilatera della stessa $f(t)$ prolungata e identicamente nulla per $t < 0$.

D'altra parte in qualunque striscia parallela all'asse immaginario che non contenga singolarità la $F(p)$ sarà rappresentabile in integrale (bilatero) di Laplace di un'altra funzione, diciamo $g(t)$, che si calcola in maniera analoga: si prende x_0 nella striscia considerata e Γ come nel caso precedente, e si vede che il Teorema dei residui implica ora che $g(t)$ vale la somma cambiata di segno – a causa dell'orientamento orario del cammino chiuso – dei residui delle singolarità di $e^{pt}F(p)$ con $\operatorname{Re}[p_k] < x_0$ per $t > 0$, e la somma dei residui delle singolarità $e^{pt}F(p)$ con $\operatorname{Re}[p_k] > x_0$ per $t < 0$.

Esempio 6.1. *Facendo riferimento all'Esempio 4.7, consideriamo la funzione*

$$F(p) = \frac{q}{p^2 - q^2}, \quad \alpha = \operatorname{Re}[q] > 0$$

ed osserviamo che essa è olomorfa dovunque tranne che nei due poli semplici $p = \pm q$ e che soddisfa le ipotesi del Lemma 6.3. I residui della funzione $e^{pt}F(p)$ si calcolano facilmente:

$$\operatorname{Res}[q] = \frac{e^{qt}}{2}, \quad \operatorname{Res}[-q] = -\frac{e^{-qt}}{2}.$$

Avremo allora

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \begin{cases} \operatorname{Res}[q] + \operatorname{Res}[-q] = \sinh qt & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} & \alpha < \operatorname{Re}[p] \\
 f(t) &= \begin{cases} \operatorname{Res}[-q] = -e^{-qt}/2 & \text{se } t \geq 0 \\ -\operatorname{Res}[q] = -e^{qt}/2 & \text{se } t < 0 \end{cases} & -\alpha < \operatorname{Re}[p] < \alpha \\
 f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0 \\ -\operatorname{Res}[q] - \operatorname{Res}[-q] = -\sinh qt & \text{se } t < 0 \end{cases} & \operatorname{Re}[p] < -\alpha
 \end{aligned}$$

risultati coincidenti con quelli dell'Esempio 4.7.

6.3 Regole di antitrasformazione

Tipiche funzioni delle quali si calcolano le anti-trasformate sono le funzioni razionali del tipo

$$F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$$

dove P_m e Q_n sono polinomi di grado rispettivamente m ed n . Si vede subito che funzioni razionali di questo genere sono anti-trasformabili (cioè sono trasformate di Laplace di qualche $f(t)$) solo se $m < n$. Infatti se $m > n$ sarà sempre possibile dividere fra loro i due polinomi sicché, indicando con $S(p)$ e $R(p)$ rispettivamente i polinomi quoziente e resto, potremo scrivere

$$F(p) = S(p) + \frac{R(p)}{Q_n(p)};$$

ma abbiamo già mostrato nell'Osservazione 6.1 che il polinomio $S(p)$ non può essere una trasformata di Laplace, e quindi neanche la nostra $F(p)$ può esserlo. Anche nel caso $m = n$ i due polinomi P_m e Q_n possono essere divisi e il quoziente $S(p)$ risulta essere una costante c non nulla: la discussione dell'Osservazione 6.1 ci obbliga allora ad escludere anche questo caso. Se invece $m < n$ la $F(p)$ può essere anti-trasformata e in particolare si vede che sono anche soddisfatte le ipotesi del Lemma 6.3 per cui l'anti-trasformata (unilatera o bilatera, secondo le regioni del piano complesso nelle quali ci poniamo) può essere calcolata con la Formula di Riemann. A volte però può non essere conveniente usare questa formula e può essere più semplice fare le seguenti osservazioni: se a_1, \dots, a_r sono gli zeri distinti di $Q_n(p)$ con

molteplicità k_1, \dots, k_r (con $k_1 + \dots + k_r = n$), potremo sempre decomporre la nostra funzione razionale nel modo seguente:

$$F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \sum_{j=1}^r \left[\frac{C_{j,1}}{p-a_j} + \frac{C_{j,2}}{(p-a_j)^2} + \dots + \frac{C_{j,k_j}}{(p-a_j)^{k_j}} \right];$$

ricordando allora l'Esempio 5.1 e ponendo $\alpha = \max_j \{\operatorname{Re}[a_j]\}$ avremo che l'anti-trasformata unilatera associata alla funzione razionale per $\operatorname{Re}[p] > \alpha$ sarà

$$f(t) = \sum_{j=1}^r e^{a_j t} \left[C_{j,1} + C_{j,2}t + \dots + \frac{C_{j,k_j}}{(k_j-1)!} t^{k_j-1} \right].$$

Come vedremo negli Esempi ci sono anche dei metodi pratici piuttosto semplici per calcolare i coefficienti $C_{j,l}$.

Per finire va anche menzionato il fatto che il Teorema di derivazione 5.2 consente di calcolare l'anti-trasformata di una $F(p)$ ricorrendo, se questo dovesse risultare più comodo, all'anti-trasformata di una sua derivata $F^{(n)}(p)$. Infatti in questo caso avremmo

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = \frac{(-1)^n}{t^n} \mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}].$$

Bisogna però fare attenzione al fatto che l'esistenza dell'anti-trasformata di una derivata di $F(p)$ non implica necessariamente l'esistenza dell'anti-trasformata di $F(p)$ stessa. Così ad esempio $F'(p) = -1/p^2$ è sicuramente anti-trasformabile e come si vede dall'Esempio 4.4 si ha $f(t) = -t$; ma potremmo avere $F(p) = 1 + 1/p$ che non è anti-trasformabile dato che le costanti non sono tali.

Esempio 6.2. *La funzione razionale*

$$F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3}$$

ha due poli semplici in $p=3$ e $p=-1$, e può facilmente essere decomposta nella forma

$$\frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{3p+7}{(p-3)(p+1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+1};$$

i coefficienti A e B si calcolano uguagliando i numeratori

$$3p+7 = A(p+1) + B(p-3) = (A+B)p + (A-3B)$$

e risolvendo il semplice sistema lineare

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A - 3B = 7 \end{cases}$$

Si ottiene allora $A = 4$ e $B = -1$ per cui per $\operatorname{Re}[p] > 3$ la $F(p)$ è la trasformata di Laplace unilatera di

$$f(t) = 4e^{3t} - e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Il medesimo risultato può essere ottenuto con la Formula di Riemann sommando i residui dei due poli semplici di $e^{pt}F(p)$. Osserviamo inoltre che il calcolo di A e B può essere effettuato anche con

$$\begin{aligned} A &= \lim_{p \rightarrow 3} (p - 3)F(p) = \lim_{p \rightarrow 3} \frac{3p + 7}{p + 1} = 4 \\ B &= \lim_{p \rightarrow -1} (p + 1)F(p) = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{3p + 7}{p - 3} = -1 \end{aligned}$$

Esempio 6.3. Sia ora

$$F(p) = \frac{5p^2 - 15p - 11}{(p + 1)(p - 2)^3}.$$

Questa funzione razionale presenta due poli: uno semplice in $p = -1$, ed uno triplo in $p = 2$. In questo caso l'ordine elevato del secondo polo rende malagevole l'uso della Formula di Riemann. Inoltre anche la determinazione canonica dei quattro coefficienti della decomposizione

$$\frac{5p^2 - 15p - 11}{(p + 1)(p - 2)^3} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p - 2)^3} + \frac{C}{(p - 2)^2} + \frac{D}{p - 2}$$

risulterebbe scomoda visto che essa darebbe luogo ad un sistema di quattro equazioni lineari in quattro incognite. Per questo motivo è comodo cominciare ad applicare il metodo mostrato alla fine dell'Esempio precedente per determinare A e B :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{p \rightarrow -1} (p + 1)F(p) = -\frac{1}{3} \\ B &= \lim_{p \rightarrow 2} (p - 2)^3 F(p) = -7 \end{aligned}$$

Questo metodo, però, non consente di determinare tutti i coefficienti: infatti $(p - 2)^2 F(p)$ e $(p - 1)F(p)$ sarebbero singolari in $p = 2$. Dalla conoscenza di A e B possiamo però ricavare un semplice sistema di due equazioni per i due coefficienti restanti. Ad esempio calcolando $F(p)$ in due arbitrari valori di p otterremo:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{11}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{C}{4} - \frac{D}{2} \\ F(1) &= \frac{21}{2} = -\frac{1}{6} + 7 + C - D \end{aligned}$$

e risolvendo il sistema $C = 4$ e $D = 1/3$. In conclusione l'anti-trasformata unilatera è (per $t > 0$)

$$f(t) = -\frac{e^{-t}}{3} - \frac{7t^2 e^{2t}}{2} + 4t e^{2t} + \frac{e^{2t}}{3}$$

Esempio 6.4. Per la funzione

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$$

risulta conveniente osservare che essa è il prodotto di due funzioni

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + a^2} \cdot \frac{1}{p^2 + a^2}$$

le cui anti-trasformate sono già note dall'Esempio 4.2. Il Teorema di convoluzione 5.12 consente allora di calcolare l'anti-trasformata di $F(p)$ nel modo seguente:

$$f(t) = \cos at \star \frac{\sin at}{a} = \frac{1}{a} \int_0^t \cos a\tau \sin a(t - \tau) d\tau = \frac{t}{2a} \sin at$$

Allo stesso modo si riconosce che

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2}$$

è il prodotto di funzioni anti-trasformabili note, per cui

$$f(t) = t \star t e^{-t} = \int_0^t \tau e^{-\tau} (t - \tau) d\tau = (t+2)e^{-t} + (t-2)$$

Esempio 6.5. L'anti-trasformata della funzione

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)^2}$$

può essere calcolata con uno qualsiasi dei metodi precedenti che conducono sempre al fatto che essa risulta trasformata di Laplace unilatera di

$$f(t) = \frac{(3t-1)e^{2t} + e^{-t}}{9}, \quad t \geq 0$$

nel semipiano $\text{Re}[p] > 2$.

Esempio 6.6. Per calcolare l'anti-trasformata di

$$F(p) = \arctan p$$

è conveniente osservare che

$$F'(p) = \frac{1}{1+p^2}$$

ha come anti-trasformata $\sin t$ in $\operatorname{Re}[p] > 0$. Ne segue che la richiesta anti-trasformata è

$$f(t) = -\frac{\sin t}{t}, \quad t \geq 0.$$

Analogamente se

$$F(p) = \ln(p^2 + p + 1)$$

si vede che

$$F'(p) = \frac{2p+1}{p^2+p+1}$$

è una funzione razionale della quale è possibile calcolare l'anti-trasformata in uno qualsiasi dei modi descritti negli esempi precedenti. Un semplice calcolo mostra allora che

$$f(t) = -\frac{2e^{-t/2}}{t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

Capitolo 7

Risoluzione di equazioni differenziali e integrali

7.1 Equazioni differenziali e integrali

Riprendiamo in considerazione l'equazione differenziale lineare, di n -mo ordine, non omogenea e a coefficienti costanti

$$\sum_{k=0}^n c_k f^{(k)}(t) = u(t), \quad c_n \neq 0 \quad (7.1)$$

già trattata nella Sezione 3.3, ma diversamente da quanto fatto in quell'occasione supponiamo ora che le nostre funzioni siano definite solo per $t \geq 0$ e che ad $f(t)$ siano imposte delle condizioni iniziali del tipo

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \dots, f^{(n-1)}(0) = a_{n-1}.$$

Se tutte le funzioni in questione (comprese le loro derivate, ove necessario) sono L-trasformabili, e se per le trasformate unilatera adottiamo la notazione

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p), \quad u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} U(p),$$

la Proposizione 5.5 ci consentirà di trasformare (7.1) nella seguente equazione algebrica per $F(p)$

$$Q_n(p)F(p) = U(p) + P_{n-1}(p)$$

dove abbiamo posto

$$Q_n(p) = \sum_{k=0}^n c_k p^k, \quad P_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k a_l p^{k-l}.$$

per cui Q_n e P_{n-1} risultano essere polinomi rispettivamente di grado n ed al più $n-1$. Ne segue dunque che la trasformata di Laplace della richiesta soluzione sarà

$$F(p) = \frac{U(p)}{Q_n(p)} + \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

Questa $F(p)$ è peraltro sicuramente anti-trasformabile: infatti P_{n-1}/Q_n è una funzione razionale con il denominatore di grado superiore al numeratore (vedi la discussione di Sezione 6.3); mentre U/Q_n è sicuramente antitrasformabile in quanto prodotto delle funzioni F e $1/Q_n$ che sono antitrasformabili (vedi Teorema 5.6). Se allora adottiamo la notazione

$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{Q_n(p)}, \quad \varphi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

la soluzione dell'equazione (7.1) assumerà la forma

$$f(t) = g(t) \star u(t) + \varphi(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau + \varphi(t).$$

L'analogia formale con la soluzione (3.11) ottenuta in Sezione 3.3 con il metodo delle trasformate di Fourier è evidente, anche se bisogna notare che vi sono importanti differenze: innanzitutto l'operazione di convoluzione nei due casi ha un significato diverso; inoltre, a causa delle diverse condizioni imposte all'equazione, la funzione $g(t)$ è qui calcolata in maniera differente e quindi in genere non coincide con la $g(t)$ di (3.11); infine in questo caso compare un ulteriore termine $\varphi(t)$ la cui presenza è dovuta alle condizioni iniziali che non erano imposte nella Sezione 3.3. Naturalmente se le condizioni iniziali fossero tutte nulle ($a_0 = \dots = a_n = 0$) avremmo anche $\varphi(t) = 0$ e la soluzione sarebbe

$$f(t) = g(t) \star u(t) = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau;$$

se invece l'equazione differenziale (7.1) fosse omogenea ($u(t) = 0$) la soluzione sarebbe semplicemente $f(t) = \varphi(t)$ ed ovviamente in questo caso delle condizioni iniziali nulle produrrebbero solo la soluzione identicamente nulla.

Il metodo delle trasformate di Laplace può essere applicato anche a sistemi di n equazioni differenziali lineari, del primo ordine, a coefficienti costanti del tipo

$$f'_j(t) = \sum_{k=1}^n b_{jk} f_k(t) + u_j(t), \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$f_j(0) = a_j.$$

Supponendo infatti che tutte le funzioni in questione siano L-trasformabili e ponendo come al solito

$$f_j(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_j(p), \quad u_j(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} U_j(p),$$

le note regole sulle trasformazioni delle derivate ci condurranno al seguente sistema di n equazioni algebriche

$$(\mathbb{B} - p\mathbb{I}) \mathbf{F}(p) = -[\mathbf{a} + \mathbf{U}(p)]$$

dove \mathbb{B} e \mathbb{I} sono le matrici di elementi rispettivamente b_{jk} e δ_{jk} , mentre $\mathbf{F}(p)$, $\mathbf{U}(p)$ ed \mathbf{a} sono i vettori di componenti rispettivamente $F_j(p)$, $U_j(p)$ e a_j . Se il determinante dei coefficienti $D(p) = |\mathbb{B} - p\mathbb{I}|$ non si annulla il sistema si risolve con la regola di Cramer, ed indicato con $D_{jk}(p)$ il determinante aggiunto dell'elemento di posto j, k nella matrice $\mathbb{B} - p\mathbb{I}$ le soluzioni sono

$$F_k(p) = - \sum_{j=1}^n [a_j + U_j(p)] \frac{D_{jk}(p)}{D(p)}.$$

D'altra parte, siccome i $D_{jk}(p)$ sono polinomi di ordine al più $n-1$, le funzioni razionali D_{jk}/D sono sicuramente antitrasformabili e posto

$$g_{jk}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} - \frac{D_{jk}(p)}{D(p)}$$

le soluzioni del nostro sistema di equazioni differenziali saranno

$$f_k(t) = \sum_{j=1}^n [u_j(t) \star g_{jk}(t) + a_j g_{jk}(t)].$$

Infine le trasformate di Laplace trovano utile applicazione anche nel caso delle equazioni integrali (o dei sistemi di equazioni integrali) di tipo convolutivo

$$f(t) = g(t) \star f(t) + u(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau + u(t).$$

In questo caso, se tutte le funzioni sono L-trasformabili, posto

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p), \quad g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} G(p), \quad u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} U(p),$$

il Teorema di convoluzione 5.6 ci consente di ricavare l'equazione algebrica

$$F(p) = G(p) F(p) + U(p)$$

da cui

$$F(p) = \frac{U(p)}{1 - G(p)}.$$

Se allora $1/(1 - G)$ risulta essere antitrasformabile e se poniamo

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - G(p)}$$

otteniamo la soluzione

$$f(t) = h(t) \star u(t).$$

7.2 Esempi

Esempio 7.1. *Riprendiamo innanzitutto la discussione dell'equazione differenziale (3.13) dell'Esempio 3.5 che ora, in considerazione del fatto che le nostre funzioni sono considerate definite solo per $t \geq 0$, possiamo riscrivere come*

$$LI'(t) + RI(t) = E_0 e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Se a quest'equazione associamo una generica condizione iniziale $I(0) = I_0$ potremo calcolarne la trasformata di Laplace unilatera e posto

$$I(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$$

otterremo l'equazione

$$L[pF(p) - I_0] + RF(p) = \frac{E_0}{p + a},$$

ossia anche

$$F(p) = \frac{I_0 L}{Lp + R} + \frac{E_0}{(p + a)(Lp + R)}.$$

Una semplice operazione di antitrasformazione conduce allora al risultato richiesto

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L} + E_0 \frac{e^{-Rt/L} - e^{-at}}{aL - R}.$$

Si noti che nel caso $I_0 = 0$ questo risultato coincide esattamente (per $t \geq 0$) con quello ricavato mediante una trasformazione di Fourier alla fine dell'Esempio 3.5, ma la trasformazione di Laplace ci ha consentito di trattare in maniera estremamente semplice anche il caso $I_0 \neq 0$ che avrebbe posto problemi di discontinuità per le trasformate di Fourier.

Esempio 7.2. Consideriamo ora il problema delle oscillazioni forzate di un oscillatore armonico descritte dall'equazione

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \cos \omega t, \quad t \geq 0$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Se con $Y(p)$ indichiamo la trasformata di Laplace di $y(t)$, la trasformata dell'equazione sarà

$$p^2 Y(p) - py_0 - v_0 + \omega_0^2 Y(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

da cui si ricava

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \omega_0^2)} + \frac{py_0 + v_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Osserviamo allora innanzitutto che

$$\frac{py_0 + v_0}{p^2 + \omega_0^2} = y_0 \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Inoltre per $\omega \neq \omega_0$ avremo anche

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \left[\frac{p}{p^2 + \omega_0^2} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right] \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega t}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Questa espressione chiaramente non è definita per $\omega = \omega_0$ in quanto forma indeterminata del tipo $0/0$. Si vede però subito con una trasformazione diretta e facendo uso del Teorema 5.2 che risulta

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{t}{2\omega} \sin \omega t.$$

Il medesimo risultato può anche essere ottenuto dal caso $\omega \neq \omega_0$ mediante l'uso della regola di l'Hôpital. In definitiva otterremo quindi

$$y(t) = \frac{\cos \omega_0 t - \cos \omega t}{\omega^2 - \omega_0^2} + y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \text{se } \omega \neq \omega_0$$

$$y(t) = \frac{t}{2\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \text{se } \omega = \omega_0$$

Esempio 7.3. Si voglia risolvere l'equazione

$$y''(t) + y(t) = t$$

con le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$. La trasformazione di Laplace conduce all'equazione

$$p^2 Y(p) - [py(0) + y'(0)] + Y(p) = (p^2 + 1)Y(p) + 2 - p = \frac{1}{p^2}$$

e quindi si ottiene facilmente

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} + \frac{p - 2}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1}.$$

In definitiva la soluzione è

$$y(t) = t + \cos t - 3 \sin t$$

che evidentemente rispetta le condizioni iniziali in maniera automatica. Analogamente l'equazione

$$x''(t) + x(t) = 2 \cos t$$

con le condizioni $x(0) = 0$ e $x'(0) = -1$ viene trasformata nell'equazione

$$p^2 F(p) + 1 + F(p) = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

e dalla trasformata

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$$

si ricava la soluzione richiesta

$$x(t) = (t - 1) \sin t.$$

Infine, mediante la funzione di Heaviside (4.3) possiamo scrivere l'equazione

$$f''(t) + f(t) = 1 - 2H(t - 1) + H(t - 2)$$

associata alle condizioni $f(0) = f'(0) = 0$. L'equazione trasformata è allora

$$(1 + p^2)F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p},$$

sicché dalla trasformata

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2 + 1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)}$$

e dall'uso della formula (5.6) si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \cos t - 2[1 - \cos(t-1)]H(t-1) + [1 - \cos(t-2)]H(t-2) \\ &= 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 4H(t-1)\sin^2\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2H(t-2)\sin^2\left(\frac{t-2}{2}\right). \end{aligned}$$

Esempio 7.4. Si voglia determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del terzo ordine

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t.$$

Possiamo supporre in questo caso che le condizioni iniziali siano

$$y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad y''(0) = C.$$

La trasformazione di Laplace conduce allora all'equazione

$$\begin{aligned} [p^3Y(p) - (Ap^2 + Bp + C)] - 3[p^2Y(p) - (Ap + B)] + 3[pY(p) - A] - Y(p) \\ = (p-1)^3Y(p) - [Ap^2 + (B-3A)p + (3A-3B+C)] \\ = \frac{2}{(p-1)^3} \end{aligned}$$

e quindi, data l'arbitrarietà delle costanti iniziali, si ha

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{Ap^2 + (B-3A)p + (3A-3B+C)}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6} \\ &= \frac{a}{(p-1)^3} + \frac{b}{(p-1)^2} + \frac{c}{p-1} + \frac{2}{(p-1)^6} \end{aligned}$$

dove a , b e c sono delle nuove costanti combinazioni lineari delle vecchie costanti A , B e C ; la relazione fra le vecchie e le nuove costanti qui non è rilevante: sarà importante renderla esplicita solo se si vuol mettere in evidenza la dipendenza della

soluzione generale dalle condizioni iniziali. In definitiva la soluzione generale, dipendente da tre costanti arbitrarie, sarà

$$y(t) = a \frac{t^2 e^t}{2} + b t e^t + c e^t + \frac{t^5 e^t}{60}.$$

Sarà facile esercizio verificare che condizioni iniziali esplicite, ad esempio $A = 1$, $B = 0$ e $C = -2$, conducono a soluzioni particolari:

$$y(t) = -\frac{t^2 e^t}{2} - t e^t + e^t + \frac{t^5 e^t}{60}.$$

Esempio 7.5. A volte le condizioni da imporre alla soluzione non vengono assegnate come condizioni iniziali, ma a tempi successivi. Ad esempio si vogliono determinare le soluzioni dell'equazione

$$y''(t) + 9y(t) = \cos 2t$$

soggetta alle condizioni

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Per usare il metodo delle trasformate di Laplace introdurremo una condizione iniziale fittizia sulla derivata $y'(0) = c$, dove c è una costante arbitraria che verrà determinata alla fine imponendo le condizioni richieste. Una trasformazione dell'equazione fornisce allora

$$(p^2 + 9)Y(p) - (p + c) = \frac{p}{p^2 + 4}$$

e quindi

$$Y(p) = \frac{p + c}{p^2 + 9} + \frac{p}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)} = \frac{4p}{5(p^2 + 9)} + \frac{c}{p^2 + 9} + \frac{p}{5(p^2 + 4)}.$$

La soluzione dipendente dal parametro c è allora

$$y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{c}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t$$

e il valore di c si ottiene imponendo che

$$-1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{c}{3} - \frac{1}{5}$$

da cui si ricava che $c = 12/5$ sicché la richiesta soluzione è

$$y(t) = \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \sin 3t + \frac{1}{5} \cos 2t.$$

Esempio 7.6. Per l'equazione differenziale

$$x''(t) + x'(t) = t$$

siano assegnate delle condizioni ad un istante diverso da $t = 0$, ad esempio

$$x(1) = 1, \quad x'(1) = 0.$$

In questo caso conviene operare una traslazione dell'origine dei tempi introducendo una nuova variabile $s = t - 1$ e una nuova incognita $y(s) = x(s + 1) = x(t)$. L'equazione diventa allora

$$y''(s) + y'(s) = s + 1$$

mentre le condizioni sono

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Il problema si risolve ora nel modo usuale trasformando l'equazione in

$$p^2 F(p) - p + pF(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

e ricavando la trasformata di Laplace

$$F(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

La soluzione a tempi traslati è allora

$$y(s) = 1 + \frac{s^2}{2}$$

e ritornando all'iniziale coordinata temporale si ottiene la soluzione

$$x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Esempio 7.7. Consideriamo ora il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 8$ e $y(0) = 3$, ed eseguiamone la trasformata di Laplace: se con $X(p)$ ed $Y(p)$ indichiamo le trasformate rispettivamente di $x(t)$ ed $y(t)$, otterremo il sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} (p-2)X(p) + 3Y(p) = 8 \\ 2X(p) + (p-1)Y(p) = 3 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{8p-17}{p^2-3p-4} = \frac{5}{p+1} + \frac{3}{p-4} \\ Y(p) &= \frac{3p-22}{p^2-3p-4} = \frac{5}{p+1} - \frac{2}{p-4} \end{aligned}$$

per cui facilmente si ottengono le richieste soluzioni del sistema di equazioni differenziali:

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}, \quad y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}.$$

Esempio 7.8. Ovviamente sarà anche possibile applicare il metodo delle trasformate a sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Sia dato ad esempio un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} x''(t) = 3[y(t) - x(t) + z(t)] \\ y''(t) = x(t) - y(t) \\ z''(t) = -z(t) \end{cases}$$

con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1; \\ x'(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad z'(0) = 0. \end{aligned}$$

Una trasformazione conduce allora al seguente sistema di equazioni algebriche per le corrispondenti trasformate di Laplace

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3[Y(p) - X(p) + Z(p)] \\ p^2 Y(p) = -1 + X(p) - Y(p) \\ p^2 Z(p) = p - Z(p) \end{cases}$$

e quindi alle trasformate

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)} \\ Y(p) &= \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1} \\ Z(p) &= \frac{p}{p^2+1} \end{aligned}$$

in modo che la soluzione del nostro problema è

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t \\ y(t) &= \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t \\ z(t) &= \cos t \end{aligned}$$

Esempio 7.9. *Si voglia determinare la soluzione generale dell'equazione*

$$ty''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0.$$

Come in altri casi simili fisseremo innanzitutto delle condizioni iniziali generiche del tipo

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Bisogna però subito osservare che questa equazione è diversa da quelle trattate finora per il fatto rilevante che i suoi coefficienti non sono costanti. In alcuni casi di questo genere la trasformazione di Laplace può ugualmente essere molto utile: se con $F(p)$ indichiamo la trasformata di Laplace di una generica funzione L -trasformabile $f(t)$, unificando i risultati del Teorema 5.2 e della Proposizione 5.5 si ottiene

$$t^m f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^m \frac{d^m}{dp^m} \left[p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0) \right]. \quad (7.2)$$

Come vedremo subito questo consente di trasformare equazioni differenziali che contengono termini del tipo $t^m f^{(n)}(t)$ in altre equazioni differenziali (ma non più solo algebriche) per $F(p)$ che possono risultare più semplici. Nel caso del nostro esempio, supponendo di indicare con $Y(p)$ la trasformata di $y(t)$, si vede facilmente che con l'uso di (7.2) si ricava la nuova equazione differenziale lineare del primo ordine

$$(1 + p^2)Y'(p) = -y_0$$

la cui soluzione generale è presto trovata:

$$Y(p) = -y_0 \arctan p + a.$$

Siccome però una costante a non può essere considerata come trasformata di Laplace di qualcosa, siamo costretti a considerare solo la soluzione con $a = 0$, cioè $Y(p) = -y_0 \arctan p$, e dall'Esempio 6.6 sappiamo che la sua antitrasformata è

$$y(t) = y_0 \frac{\sin t}{t}. \quad (7.3)$$

Se da un lato questo risolve il nostro problema, dall'altro ci pone una domanda interessante: come mai questa soluzione generale dipende solo da una costante arbitraria (il valore iniziale y_0) e non da due, come sarebbe da attendersi visto che abbiamo a che fare con un'equazione differenziale e lineare del secondo ordine? Dove è finita l'altra costante arbitraria legata al valore iniziale v_0 della derivata? Una prima osservazione è che, diversamente dagli altri Esempi fin qui trattati, in questo caso la costante v_0 scompare dall'equazione per $Y(p)$ a causa della derivazione

rispetto a p . Questa perdita viene però recuperata nella soluzione generale dell'equazione differenziale per $Y(p)$ che, essendo del primo ordine, dipende a sua volta da una costante arbitraria a . Ma abbiamo visto nella discussione che, se vogliamo interpretare $Y(p)$ come una trasformata di Laplace, questa costante deve essere nulla, per cui alla fine dei conti la nostra soluzione generale $y(t)$ risulta dipendente da una sola costante arbitraria. La spiegazione di questo paradosso risiede nel fatto che l'altra soluzione linearmente indipendente da (7.3) (perché quest'altra soluzione evidentemente esiste) è, come si verifica facilmente per sostituzione,

$$y(t) = \frac{\cos t}{t}, \quad (7.4)$$

per cui la soluzione generale della nostra equazione è

$$y(t) = \frac{A \sin t + B \cos t}{t}.$$

Ma come si vede anche immediatamente la soluzione (7.4) non è L -trasformabile (la sua ascissa di convergenza è $+\infty$), anzi essa non è neanche di classe C , a causa della sua singolarità non integrabile in $t = 0$. Non sarebbe quindi ragionevole pensare di poter ricavare questa seconda soluzione con il metodo delle trasformate di Laplace.

Esempio 7.10. Determiniamo ora la soluzione generale dell'equazione

$$tx''(t) - 2x'(t) = 0.$$

Introducendo delle generiche condizioni iniziali

$$x(0) = a, \quad x'(0) = b,$$

possiamo trasformare l'equazione data usando la relazione (7.2):

$$-p^2 X'(p) - 2pX(p) + a - 2pX(p) + 2a = 0$$

ricavando un'equazione differenziale del primo ordine per $X(p)$:

$$X'(p) + \frac{4}{p}X(p) = \frac{3a}{p^2}.$$

Questa equazione, come nell'Esempio precedente, non dipende dal valore di b ; peraltro la forma stessa dell'equazione iniziale impone che sia $b = 0$. L'equazione per $X(p)$ è comunque facilmente risolta con metodi standard e si ottiene

$$X(p) = \frac{a}{p} + \frac{c}{p^4}$$

dove c è un'arbitraria costante di integrazione. Conseguentemente la soluzione generale della nostra equazione iniziale è

$$x(t) = a + c \frac{t^3}{6}$$

che questa volta dipende da due costanti arbitrarie, come è lecito attendersi per le soluzioni generali di un'equazione differenziale del secondo ordine.

Esempio 7.11. Un esempio di equazione integrale di tipo convolutivo è

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = t^2 + y(t) \star \sin t$$

la cui trasformata di Laplace è

$$Y(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{Y(p)}{1 + p^2}.$$

Ne segue che

$$Y(p) = \frac{2(1 + p^2)}{p^5} = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}$$

e quindi si ottiene subito che

$$y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}.$$

Analogamente l'equazione

$$f(t) = \cos t + \int_0^t (t - s)f(s) ds = \cos t + t \star f(t)$$

conduce all'equazione algebrica per la trasformata

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{F(p)}{p^2}$$

cioè alla trasformata

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}$$

e quindi alla soluzione

$$f(t) = \frac{\cos t + \cosh t}{2}.$$

Esempio 7.12. *Il metodo delle trasformate di Laplace permette anche di risolvere dei sistemi di equazioni integrali del tipo*

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t + \int_0^t e^{-(t-s)} f_1(s) ds + \int_0^t (t-s) f_2(s) ds \\ &= t + e^{-t} \star f_1(t) + t \star f_2(t) \\ f_2(t) &= 1 + \int_0^t \sinh(t-s) f_1(s) ds - \int_0^t e^{(t-s)} f_2(s) ds \\ &= 1 + \sinh t \star f_1(t) + e^t \star f_2(t) \end{aligned}$$

che possono facilmente essere trasformati nel seguente sistema di equazioni algebriche per le trasformate $F_1(p)$ ed $F_2(p)$ rispettivamente di $f_1(t)$ ed $f_2(t)$:

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{1}{p^2} + \frac{F_1(p)}{p+1} + \frac{F_2(p)}{p^2} \\ F_2(p) &= \frac{1}{p} + \frac{F_1(p)}{p^2-1} - \frac{F_2(p)}{p-1} \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è

$$F_1(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad F_2(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{p(p-1)(p^2+1)}$$

e pertanto la soluzione del sistema di equazioni integrali è

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{2 + e^t + \sin t - 3 \cos t}{2} \\ f_2(t) &= \frac{\cos t - 2 \sin t + \cosh t}{2}. \end{aligned}$$