CdL in INFORMATICA E COMUNICAZIONE DIGITALE

Statistica Matematica

anno accademico 2005/06

ulteriori esercizi di Calcolo delle Probabilità

1. Sia $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ la somma di $n = 192$ numeri aleatori indipendenti X_k tutti compresi fra 0 e 1, e ciascuno con attesa $\mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{2}$ e varianza $Var(X_k) = \frac{1}{12}$. Facendo uso dell'approssimazione normale calcolare la probabilità
$$\mathbf{P}\{95 \leq S_n \leq 100\}$$

2. Si sa che una v.a. X ha varianza $\sigma^2 = 4$; si eseguono $n = 64$ misure di X e se ne calcola la media $\overline{X}$. Quale è la probabilità $\mathbf{P}\{|\overline{X} - \mu| > 0.5\}$ che il valore assoluto della differenza fra $\overline{X}$ e il suo valore d'attesa μ superi 0.5? (*Suggerimento:* fare uso dell'approssimazione normale)

3. Sia X una v.a. della quale non si conosce la distribuzione, ma della quale si sa che $\mu = \mathbf{E}(X) = 1$ e $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X) = \frac{1}{3}$; sia inoltre $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ la somma di $n = 300$ v.a. indipendenti e tutte distribuite come X (quindi tutte con la stessa attesa e la stessa varianza di X):
   - determinare l'attesa $\mathbf{E}(S_n)$ e la varianza $\mathbf{Var}(S_n)$ di tale somma;
   - calcolare la probabilità $\mathbf{P}\{296 \leq S_n \leq 302\}$ facendo uso dell'approssimazione normale.

4. Un computer genera $n = 192$ numeri aleatori indipendenti $X_1, \ldots, X_n$ tutti distribuiti in maniera uniforme fra 0 e 1 $\left(\text{con } \mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{2}\text{, e } \mathbf{Var}(X_k) = \frac{1}{12}\right)$. Facendo uso dell'approssimazione normale e delle Tavole della distribuzione normale standard, calcolare la probabilità $\mathbf{P}\{92 \leq S_n \leq 100\}$ che la somma $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ cada fra 92 e 100.

5. Si sa che il valore di un segnale all'istante t_0 è $\mu = 100$; si sa però anche che a tale valore si sovrappone un rumore casuale con media nulla e varianza $\sigma^2 = 4$. Si eseguono $n = 64$ misure del segnale a t_0 e se ne calcola la somma S_n che, a causa del rumore, è una variabile aleatoria.
   - Quali sono il valore d'attesa e la varianza di S_n ?
   - Quale è la probabilità che il valore assoluto della differenza fra S_n e il suo valore d'attesa superi la soglia $\Delta = 24$? (*Suggerimento:* fare uso dell'approssimazione normale)

6. La probabilità di vincere in una determinata lotteria settimanale è $p = 0.00025$; quale è la probabilità di vincere 1 o 2 volte giocando regolarmente per venti anni?

   Suggerimento: Usare l'*approssimazione di Poisson.*

7. La v.a. S è la somma di $n = 64$ numeri aleatori indipendenti, identicamente distribuiti, ciascuno con attesa $\mu = \frac{1}{2}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{1}{16}$. Calcolare la probabilità che il valore di S si trovi fra 34 e 36.

   Suggerimento: Usare l'*approssimazione normale*.

8. La probabilità che si verifichi un particolare evento A è

$$p = 0.001$$

   Supponendo di eseguire 2 000 tentativi di verifica di A, calcolare la probabilità che A si verifichi almeno 4 volte.

   Suggerimento: utilizzare l'approssimazione di Poisson.

9. $n = 100$ urne, esternamente identiche e contenenti ciascuna 20 palline bianche e nere, sono ripartite in quattro categorie secondo la loro composizione interna:

30	contengono solo palline bianche (categoria 1)
40	contengono 16 palline bianche e 4 nere (categoria 2)
20	contengono 10 palline bianche e 10 nere (categoria 3)
10	contengono 5 palline bianche e 15 nere (categoria 4)

   Si sceglie un'urna e si estraggono – con rimessa – tre palline:

   - quale è la probabilità dell'evento $A =$ *le palline estratte sono tutte e tre bianche*? (*Suggerimento: formula della probabilità totale*)
   - supponendo che A si verifichi, quali sono le probabiità che l'urna scelta appartenga rispettivamente alle categorie 1, 2, 3 e 4?
     (*Suggerimento: formula di Bayes*)

10. La probabilità che esca un particolare ambo in una estrazione di 5 numeri al lotto è

$$p = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89} \simeq 0.0025$$

   Supponendo che ci siano 2 estrazioni alla settimana (cioè $2 \times 52 = 104$ estrazioni all'anno), calcolare la probabilità che in 5 anni quell'ambo esca almeno 3 volte.

   Suggerimento: utilizzare l'approssimazione di Poisson.