CdL in Informatica e Comunicazione Digitale

Statistica Matematica

anno accademico 2005/06

ulteriori esercizi di Statistica Inferenziale

1. Siano X e Y due quantità con valori aleatori distribuiti in maniera approssimativamente normale. Due campioni indipendenti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 16$ misure hanno medie $\overline{X} = 5$ e $\overline{Y} = 3$, e varianze (stimate a partire dai campioni) $S_X^2 = 5$ e $S_Y^2 = 3$.

   (a) Controllare con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ le due ipotesi
   $$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \,, \qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \,.$$

   (b) Controllare con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ le due ipotesi
   $$H_0 \,:\, \mu_X \leq \mu_Y \,, \qquad H_1 \,:\, \mu_X > \mu_Y \,.$$

   (c) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per le due attese μ_X e μ_Y.

2. $n = 300$ misure di una v.a. X che prende solo valori interi presentano le seguenti frequenze assolute

$j =$	0	1	2	3	4	5	6
$N_j =$	40	81	83	52	27	13	4

   Dopo aver controllato le condizioni di applicabilità, verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ se questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$.

3. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:

   $$X = \begin{array}{cccccccccc} 1.13 & 0.11 & 0.74 & 0.97 & 0.10 & 1.14 & 0.68 & 0.21 & 0.70 & 0.41 \\ 0.82 & 0.04 & 0.85 & 0.85 & 0.84 & 0.11 & 0.55 & 0.09 & 1.01 & 0.34 \\ 1.04 & & & & & & & & & \end{array}$$

   $$Y = \begin{array}{cccccccccc} 0.85 & 0.62 & 0.21 & 0.22 & 0.34 & 0.13 & 0.93 & 0.38 & 0.01 & 0.65 \\ 0.97 & 0.79 & 0.42 & 0.09 & 0.44 & 0.31 & & & & \end{array}$$

   (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2.

   (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2.

   (c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi
   $$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \,, \qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \,.$$

4. Il direttore di una scuola vuol sapere se l'opinione delle famiglie su un certo cambiamento di orario scolastico dipende dal fatto che la loro abitazione è situata in una zona urbana o in una zona rurale. Si chiede pertanto il parere di $n = 500$ famiglie ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	favorevoli	*contrari*	*indifferenti*	totali
urbana	123	36	41	
rurale	145	85	70	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ per l'ipotesi H_0: *l'opinione delle famiglie è indipendente dalla collocazione della loro abitazione.*

5. Due campioni indipendenti delle quantità X e Y con attese μ_X, μ_Y e varianze σ_X^2, σ_Y^2 sconosciute, sono composti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 31$ misure, e hanno medie empiriche $\overline{X} = 1.09$ e $\overline{Y} = 2.22$ e varianze empiriche (corrette) $S_X^2 = 2.34$ e $S_Y^2 = 3.11$.

   - Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ fra le due ipotesi

   $$H_0 \ : \ \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \, , \qquad\qquad H_1 \ : \ \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \, .$$

   - Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$ fra le le due ipotesi

   $$H_0 \ : \ \mu_X = \mu_Y \, , \qquad\qquad H_1 \ : \ \mu_X \neq \mu_Y \, .$$

6. Le misure in *cm* dell'altezza X di $n = 100$ persone si distribuiscono con le seguenti frequenze assolute

altezza	N_j
≤ 168	10
$[168\,,\,169]$	17
$[169\,,\,170]$	24
$[170\,,\,171]$	27
$[171\,,\,172]$	17
≥ 172	5

   Eseguire un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per verificare se questi dati si adattano ad una distribuzione normale con media $\mu = 170$ e varianza $\sigma^2 = 2$.

7. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:

$$X \;=\; \begin{array}{ccccccccccc} 5.49 & 4.37 & 4.42 & 3.79 & 5.57 & 3.37 & 4.30 & 3.14 & 4.55 & 4.23 & \\ 3.44 & 2.51 & 4.46 & 2.54 & 3.59 & 4.20 & 3.14 & 3.50 & 2.26 & 4.01 & 4.06 \end{array}$$

$$Y \;=\; \begin{array}{ccccccccccc} 5.84 & 2.29 & 3.71 & 5.09 & 7.07 & 5.61 & 4.83 & 3.29 & 5.55 & 6.78 & \\ 5.74 & 5.58 & 5.28 & 4.89 & 4.21 & 2.54 & 3.71 & 3.81 & 4.60 & 6.81 & \\ 4.60 & 5.10 & 4.72 & 6.33 & 5.76 & 4.86 & 3.50 & 5.18 & 6.60 & 5.47 & 3.49 \end{array}$$

   (a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2.

   (b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2.

(c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \,, \qquad\qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \,.$$

8. In un paese si vuol sapere se le risposte (*favorevole* o *contrario*) dei cittadini ad una determinata questione sono o meno influenzate dall'età . Si chiede pertanto il parere di $n = 600$ persone ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	giovani	*maturi*	*anziani*	totali
favorevoli	100	150	30	
contrari	126	120	74	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per l'ipotesi H_0: *l'opinione dei cittadini è indipendente dall'età.*

9. Per verificare l'efficacia di un medicinale si misura la temperatura di $n = 30$ pazienti prima (X) e dopo (Y) l'assunzione del farmaco. I campioni accoppiati così ricavati sono i seguenti:

$$X = \begin{array}{cccccccccc} 36.8 & 37.9 & 38.3 & 38.1 & 38.3 & 38.8 & 36.3 & 37.7 & 37.1 & 36.9 \\ 37.7 & 37.5 & 37.4 & 39.0 & 38.6 & 41.4 & 37.9 & 37.5 & 39.9 & 38.2 \\ 38.4 & 37.7 & 37.5 & 36.6 & 38.0 & 38.6 & 39.0 & 37.6 & 38.0 & 39.5 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccccccc} 37.1 & 36.1 & 38.2 & 39.0 & 38.4 & 36.4 & 36.8 & 39.3 & 37.3 & 37.9 \\ 37.6 & 38.4 & 38.6 & 37.4 & 38.3 & 37.0 & 35.9 & 36.0 & 37.2 & 39.3 \\ 36.0 & 36.6 & 38.0 & 38.0 & 38.7 & 39.4 & 37.6 & 36.1 & 39.0 & 36.4 \end{array}$$

Eseguire un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 \,:\, \mu_X \leq \mu_Y \,, \qquad\qquad H_1 \,:\, \mu_X > \mu_Y \,.$$

10. Una ditta che vende automobili vuol sapere se l'età degli acquirenti (*giovani*, *maturi* e *anziani*) influenza la scelta del colore (*bianco*, *rosso* o *nero*) delle vetture vendute. Si esaminano i dati relativi a $n = 500$ contratti di vendita ottenendo i risultati riportati nella Tabella:

	giovani	*maturi*	*anziani*	totali
bianco	56	60	40	
rosso	47	87	38	
nero	23	64	85	
totali				

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ per l'ipotesi H_0: *il colore scelto è indipendente dall'età degli acquirenti.*

11. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:

$$X = \begin{array}{cccccccccc} 1.13 & 0.11 & 0.74 & 0.97 & 0.10 & 1.14 & 0.68 & 0.21 & 0.70 & 0.41 \\ 0.82 & 0.04 & 0.85 & 0.85 & 0.84 & 0.11 & 0.55 & 0.09 & 1.01 & 0.34 \\ 1.04 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccccccc} 0.85 & 0.62 & 0.21 & 0.22 & 0.34 & 0.13 & 0.93 & 0.38 & 0.01 & 0.65 \\ 0.97 & 0.79 & 0.42 & 0.09 & 0.44 & 0.31 \end{array}$$

(a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2.

(b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2.

(c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi
$$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\,, \qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\,.$$

12. Due campioni indipendenti delle quantità X e Y con attese μ_X, μ_Y e varianze σ_X^2, σ_Y^2 sconosciute, sono composti rispettivamente di $n = 21$ e $m = 31$ misure, e hanno medie empiriche $\overline{X} = 1.09$ e $\overline{Y} = 2.22$ e varianze empiriche (corrette) $S_X^2 = 2.34$ e $S_Y^2 = 3.11$.

- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ fra le due ipotesi
$$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\,, \qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\,.$$
- Scegliere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.01$ fra le le due ipotesi
$$H_0 \,:\, \mu_X = \mu_Y\,, \qquad H_1 \,:\, \mu_X \neq \mu_Y\,.$$

13. Siano dati i due seguenti campioni indipendenti delle quantità aleatorie X e Y:

$$X = \begin{array}{ccccccccccc} 5.49 & 4.37 & 4.42 & 3.79 & 5.57 & 3.37 & 4.30 & 3.14 & 4.55 & 4.23 \\ 3.44 & 2.51 & 4.46 & 2.54 & 3.59 & 4.20 & 3.14 & 3.50 & 2.26 & 4.01 & 4.06 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{ccccccccccc} 5.84 & 2.29 & 3.71 & 5.09 & 7.07 & 5.61 & 4.83 & 3.29 & 5.55 & 6.78 \\ 5.74 & 5.58 & 5.28 & 4.89 & 4.21 & 2.54 & 3.71 & 3.81 & 4.60 & 6.81 \\ 4.60 & 5.10 & 4.72 & 6.33 & 5.76 & 4.86 & 3.50 & 5.18 & 6.60 & 5.47 & 3.49 \end{array}$$

(a) Calcolare le varianze corrette S_X^2 ed S_Y^2.

(b) Determinate gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.05$ per σ_X^2 e σ_Y^2.

(c) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare fra le due ipotesi
$$H_0 \,:\, \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\,, \qquad H_1 \,:\, \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\,.$$

14. Per verificare l'efficacia di un medicinale si misura la temperatura di $n = 30$ pazienti prima (X) e dopo (Y) l'assunzione del farmaco. I campioni accoppiati così ricavati sono i seguenti:

$$X = \begin{array}{cccccccccc} 36.8 & 37.9 & 38.3 & 38.1 & 38.3 & 38.8 & 36.3 & 37.7 & 37.1 & 36.9 \\ 37.7 & 37.5 & 37.4 & 39.0 & 38.6 & 41.4 & 37.9 & 37.5 & 39.9 & 38.2 \\ 38.4 & 37.7 & 37.5 & 36.6 & 38.0 & 38.6 & 39.0 & 37.6 & 38.0 & 39.5 \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{cccccccccc} 37.1 & 36.1 & 38.2 & 39.0 & 38.4 & 36.4 & 36.8 & 39.3 & 37.3 & 37.9 \\ 37.6 & 38.4 & 38.6 & 37.4 & 38.3 & 37.0 & 35.9 & 36.0 & 37.2 & 39.3 \\ 36.0 & 36.6 & 38.0 & 38.0 & 38.7 & 39.4 & 37.6 & 36.1 & 39.0 & 36.4 \end{array}$$

Eseguire un test unilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare quale accettare fra le due ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y , \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y .$$

15. Due serie indipendenti di $n = 10$ ed $m = 9$ misure rispettivamente di due quantità aleatorie X ed Y danno i seguenti risultati

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrrr} X & = & -1.34 & 1.32 & -0.96 & 0.29 & -1.41 & 0.23 & -0.56 & -0.32 & 0.66 & 1.27 \\ Y & = & 4.83 & -2.52 & -1.79 & -2.85 & 1.45 & 1.09 & 1.87 & 2.03 & -2.60 & \end{array}$$

   (a) Calcolare le due medie $\overline{X}, \overline{Y}$, e le due varianze empiriche S_X^2, S_Y^2.
   (b) Eseguire un test di Fisher bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ per verificare l'ipotesi $\{H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\}$ contro l'ipotesi $\{H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\}$.

16. Per giudicare il rendimento di due classi di $n = 31$ e $m = 21$ studenti si paragonano le medie dei voti (espressi in *trentesimi*) con i quali è stato superato un certo esame. I due campioni indipendenti sono i seguenti:

$$X = \begin{array}{cccccccccccccccc} 25 & 27 & 27 & 26 & 27 & 25 & 23 & 25 & 22 & 26 & 25 & 21 & 24 & 22 & 24 & 24 \\ 23 & 22 & 29 & 26 & 21 & 26 & 23 & 24 & 24 & 20 & 29 & 22 & 23 & 18 & 27 & \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{ccccccccccc} 21 & 19 & 19 & 22 & 25 & 20 & 25 & 23 & 26 & 27 & 22 \\ 25 & 27 & 20 & 19 & 23 & 28 & 22 & 25 & 23 & 28 & \end{array}$$

   (a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 , \qquad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 .$$

   (b) Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \mu_X \leq \mu_Y , \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y .$$

17. Siano dati i seguenti due campioni aleatori di $n = 16$ ed $m = 21$ misure:

$$X = \begin{array}{ccccccccccc} 9.08 & 9.80 & 10.76 & 9.58 & 10.56 & 9.99 & 10.61 & 8.86 & 10.41 & 10.27 & 7.94 \\ 8.61 & 10.38 & 9.77 & 11.30 & 10.09 & & & & & & \end{array}$$

$$Y = \begin{array}{ccccccccccc} 3.99 & 4.04 & 4.20 & 6.11 & 7.26 & 6.43 & 5.23 & 5.93 & 3.71 & 4.53 & 4.91 \\ 5.33 & 3.95 & 4.60 & 3.87 & 5.25 & 4.09 & 5.21 & 5.85 & 4.10 & 4.26 & \end{array}$$

   (a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 , \qquad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 .$$

   (b) Calcolare gli intervalli di fiducia di livello $\alpha = 0.01$ per le varianze σ_X^2 e σ_Y^2.

18. Quattro dadi vengono lanciati assieme per $n = 10\,000$ volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I valori $j = 0, 1, 2, 3, 4$ del *numero dei "6" in ogni lancio* si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute

$$\begin{array}{rccccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ N_j = & 4\,775 & 3\,919 & 1\,143 & 156 & 7 \end{array}$$

- Controllare che le condizioni per l'applicabilità di un test del χ^2 sono soddisfatte.
- Verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ che questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B\left(4\,,\,\frac{1}{6}\right)$.

19. Tre dadi vengono lanciati assieme per $n = 8\,000$ volte, e in ogni lancio si osserva quante volte esce "6". I quattro valori $j = 0, 1, 2, 3$ del *numero dei "6" in ogni lancio* si presentano con le seguenti frequenze empiriche assolute

$$\begin{array}{rcccc} j = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ N_j = & 4\,481 & 2\,868 & 603 & 48 \end{array}$$

- Controllare che le condizioni per l'applicabilità di un test del χ^2 sono soddisfatte.
- Verificare con un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.05$ che questi dati si adattano ad una distribuzione Binomiale $B\left(3\,,\,\frac{1}{6}\right)$.

20. Per confrontare le attività di due materiali radioattivi si rilevano i numeri di particelle emesse in un intervallo di 10 minuti. Si misurano pertanto, rispettivamente per i due materiali, $n = 31$ e $m = 31$ valori di tale conteggio ottenendo i seguenti risultati:

$$X \;=\; \begin{array}{cccccccccccccccc} 15 & 20 & 21 & 26 & 20 & 14 & 13 & 17 & 22 & 21 & 24 & 19 & 18 & 22 & 17 & 17 \\ 19 & 23 & 21 & 22 & 31 & 14 & 14 & 24 & 24 & 21 & 20 & 25 & 17 & 20 & 20 & \end{array}$$

$$Y \;=\; \begin{array}{cccccccccccccccc} 18 & 18 & 23 & 19 & 14 & 14 & 14 & 16 & 23 & 21 & 17 & 21 & 14 & 22 & 17 & 19 \\ 16 & 9 & 22 & 13 & 17 & 19 & 16 & 19 & 22 & 11 & 16 & 9 & 19 & 21 & 13 & \end{array}$$

(a) Decidere con un test bilaterale di livello $\alpha = 0.05$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 \;:\; \sigma_X^2 = \sigma_Y^2\,, \qquad\qquad H_1 \;:\; \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2\,.$$

(b) Decidere con un test unilaterale di livello $\alpha = 0.01$ quale accettare tra le ipotesi

$$H_0 \;:\; \mu_X \leq \mu_Y\,, \qquad\qquad H_1 \;:\; \mu_X > \mu_Y\,.$$

21. Un professore vuol sapere se i voti registrati per il suo esame dipendono o meno dall'anno di immatricolazione degli studenti. Egli esamina i voti $n = 378$ studenti immatricolati in diversi anni accademici e ottiene i risultati riportati nella Tabella:

	18 – 20	*21 – 23*	*24 – 26*	*27 – 30*	totali
2000/01	17	30	50	15	
2001/02	15	26	34	10	
2002/03	11	25	38	19	
2003/04	9	40	29	10	
totali					

Si esegua un test del χ^2 di livello $\alpha = 0.01$ per controllare l'ipotesi H_0: *il voto è indipendente dall'anno di immatricolazione.*