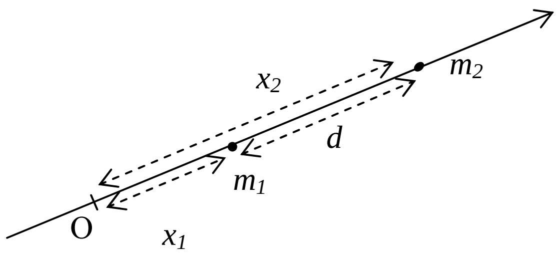
Centro di massa di un sistema

Assumiamo un corpo complesso qualsiasi costituito da *n* punti elementari ciascuno di massa m_i e lo chiameremo sistema di punti materiali. Partiamo da un sistema fatto da due masse m_1 ed m_2. Consideriamo come asse *x* del sistema di riferimento, la retta passante per le due masse.



Definiamo ***Centro di Massa (CM)*** del sistema il punto individuato dalla coordinata:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Osservazioni:

a) $$x_{CM} - x_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_1 x_1 - m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

la posizione del CM rispetto ad un'altra massa dipende solo dalle masse e dalla distanza *d* fra esse ossia il CM è un punto specifico del sistema.

b) $$\frac{|x_{CM} - x_1|}{|x_{CM} - x_2|} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} d \right) \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 d} \right) = \frac{m_2}{m_1}$$

la distanza del CM dalle masse è inversamente proporzionale alle masse; infatti:

c) se $m_1 >> m_2 \Rightarrow x_{CM} \approx \frac{m_1 x_1}{m_1} = x_1$

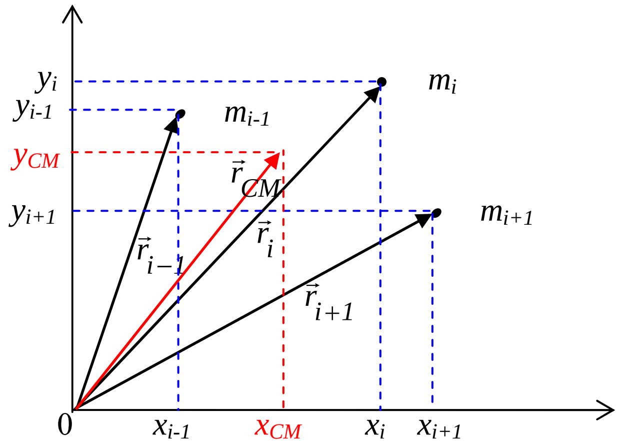
la posizione del CM coincide con quella della massa maggiore.

d) se $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_1} = \frac{m_1 (x_1 + x_2)}{2m_1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

la posizione del CM coincide con il punto medio fra le masse.

Se il sistema è costituito da *n* masse m_i allineate fra loro la generalizzazione della definizione di coordinata del CM del sistema è ovvia: $x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$.

Consideriamo invece in caso generico di n masse m_i distribuite nello spazio e ciascuna individuata da un vettore posizione $\vec{r}_i$ in un dato sistema di riferimento.



NB: Figura limitata a punti materiali in un piano

Ricordiamo che : $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

Considerando le componenti cartesiane di ciascun vettore posizione, possiamo calcolare le seguenti coordinate: $x_{CM} = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$, $\quad y_{CM} = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$, $\quad z_{CM} = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$.

Definiamo CM il punto individuato dal vettore $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$.

Osserviamo che possiamo scrivere:

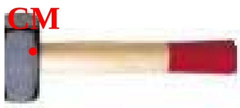
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\hat{i} + \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\hat{j} + \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}\hat{k} = \frac{\sum m_i x_i\hat{i} + \sum m_i y_i\hat{j} + \sum m_i z_i\hat{k}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i(x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k})}{\sum m_i} \Rightarrow$$

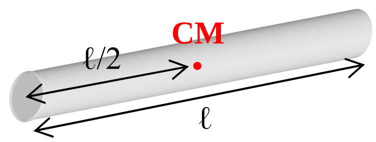
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

e quindi il centro di massa di un sistema di punti materiali è individuato dal vettore: $\vec{r}_{CM}$.

Estrapolando le osservazioni *a,d,c,d* precedenti possiamo dire:

a) il CM è un punto specifico del sistema
b) esso tende posizionarsi verso la zona con masse più grandi.
c) se un sistema è omogeneo il CM è nel punto di simmetria.

b) 

c) 

Equazione del moto del Centro di Massa.

Considerato un sistema di *n* punti materiali ciascuno di massa m_i, posto $\sum m_i = M$ massa totale del sistema, la posizione del CM può essere riscritta come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow M\vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i .$$

Se tutti o alcuni dei punti materiali sono in moto, i corrispondenti $\vec{r}_i$ varieranno con il tempo e quindi anche $\vec{r}_{cm}$ varierà nel tempo. Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione Δt.

$$\Rightarrow M\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \sum \frac{m_i \Delta\vec{r}_i}{\Delta t} \quad per\ \Delta t \to 0 \quad \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \vec{v}_i$$ velocità del punto materiale i-esimo

$$\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \vec{v}_{CM}$$ è definita come velocità del CM

$$(1) \Rightarrow M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Nel caso generico le $\vec{v}_i$ varieranno nel tempo e quindi anche $\vec{v}_{cm}$ varierà nel tempo. Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione Δt.

$$\Rightarrow M\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \sum \frac{m_i \Delta\vec{v}_i}{\Delta t} \quad per\ \Delta t \to 0 \quad \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t} = \vec{a}_i$$ accelerazione del punto materiale i-esimo

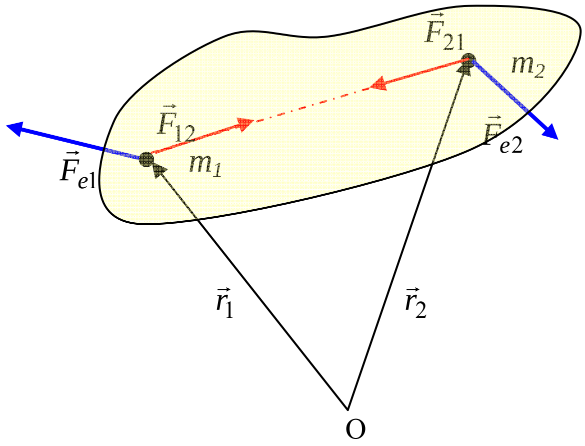
$$\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \vec{a}_{CM}$$ è definita come accelerazione del CM

$$(2) \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i$$

Per la seconda legge della dinamica sappiamo, posto $\vec{F}_i$ la risultante delle forze agenti sul i-esimo punto materiale, che $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ e quindi dalla (2)

$$(3)\ M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_i$$

Per continuare facciamo riferimento ad un sistema di soli due punti materiali di massa m_1 ed m_2 interagenti con il modo esterno con due forze rispettivamente $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$.



Le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ (con $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$) sono forze di interazione fra i costituenti il sistema è sono dette **forze interne**.
Le forze $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$ sono forze di interazione fra i costituenti del sistema ed il mondo esterno è sono dette **forze esterne**

Quindi $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{e2}$ e dalla (3)

$$\Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{e2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1} - \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e2} = \vec{F}_e^R$$

dove si è indicato con $\vec{F}_e^R = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = \sum \vec{F}_{ei}$ la risultante delle forze esterne

In conclusione e generalizzando abbiamo: $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_e^R$

Il moto del centro di massa è determinato dalla risultante delle sole forze esterne, ovvero il centro di massa si muove sotto l'azione della risultante delle forze esterne come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.

Quantità di moto del centro di massa

Ogni singolo punto materiale ha una quantità di moto $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$, di conseguenza la quantità di moto totale di un sistema è semplicemente $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i$

Usando la (1) possiamo scrivere: $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i = \sum m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} \Rightarrow$
la quantità di moto di un sistema di punti materiali è pari alla massa totale per la velocità del centro di massa, ossia coincide con la quantità di moto del punto CM se associamo ad esso la massa totale del sistema. Ancora, il centro di massa si comporta come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.

Nel caso generico, le $\vec{p}_i$ variano nel tempo e quindi anche $\vec{P}_t$ varierà nel tempo.
Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione *Δt:*

$$\frac{\Delta\vec{P}_t}{\Delta t} = M\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_T}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_e^R \Rightarrow$$

solo le forze esterne possono cambiare la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali.

Conservazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali.

Se su un sistema non agiscono forze esterne ovvero se la risultante delle forze esterne che agiscono è nulla $\vec{F}_e^R = 0$ (e diremo il **sistema isolato**) abbiamo:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}_e^R = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}_T}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_T = cost$$

In un sistema isolato la quantità di moto totale deve restare costante (**Principio di conservazione della quantità di moto**)

Sottolineiamo che dire $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i = cost$ non significa che il sistema non evolve ma solo che le singole $\vec{p}_i$ possono variare in modo che le variazioni di alcune $\vec{p}_i$ debbano essere compensate dalle variazioni di altre, in modo che la somma resti costante.

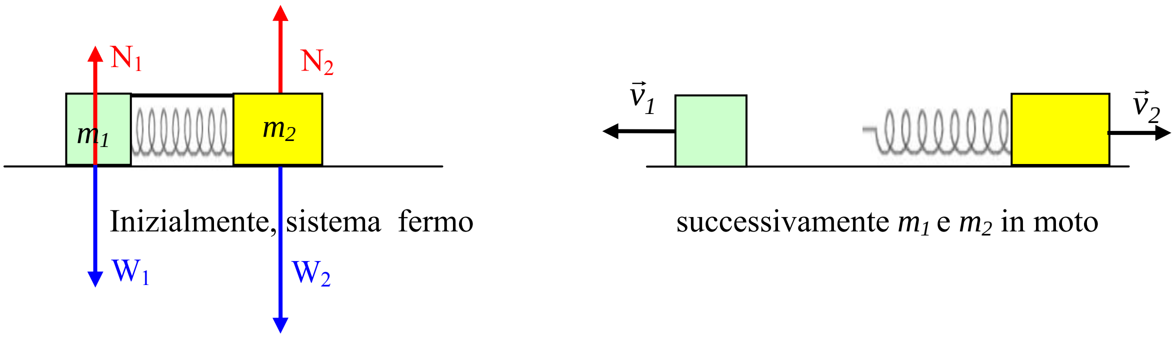
Ricordiamo che:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \vec{F}_e^R \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dP_{T,x}}{dt} = F_{e,x}^R \\ \dfrac{dP_{T,y}}{dt} = F_{e,y}^R \\ \dfrac{dP_{T,z}}{dt} = F_{e,z}^R \end{cases}$$

Queste relazioni permettono di applicare la conservazione della quantità di moto separatamente per le singole componenti ovvero anche ad una singola componente.
Ad esempio, se solo la componete *x* di $\vec{F}_e^R$ è nulla, $\left(F_{e,x}^R = 0\right)$, solo la componente *x* di $\vec{P}_T$ si conserverà: $\dfrac{dP_{T,x}}{dt} = F_{e,x}^R = 0 \Rightarrow \dfrac{dP_{T,x}}{dt} = 0 \Rightarrow P_{T,x} = cost$

Conseguenza della conservazione di quantità di moto.

Consideriamo un sistema costituito da due masse (m_1 e m_2) tenute da una fune ideale e recante fra esse una molla ideale compressa. Le masse sono poggiate su un piano orizzontale senza attrito. Il sistema è fermo e quindi $\vec{P}_{T,iniziale} = 0$. Le forze generate dalla molla e dalla fune sono interne, mentre le forze esterne ($\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{W}_1, \vec{W}_2$) hanno risultante nulla: $\vec{F}_e^R = \vec{W}_1 + \vec{N}_1 + \vec{W}_2 + \vec{N}_2 = 0$.



Supponiamo che la fune si rompa; le masse spinte dalla forza elastica si muovono ma essendo $\vec{F}_e^R = 0$ la quantità di moto totale del sistema non può cambiare: $\vec{P}_{T,iniziale} = \vec{P}_{T,finale} = 0$.

Ma: $\vec{P}_{T,finale} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$

1) Le masse acquistano velocità nella stessa direzione ma verso opposto.
2) La massa più leggera acquista una velocità maggiore

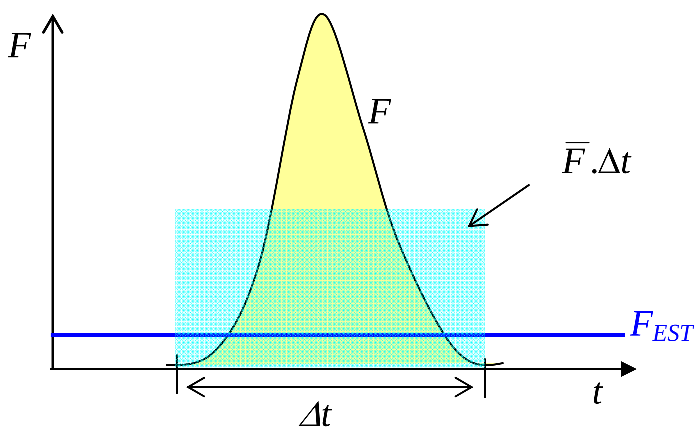
Conclusione: è impossibile in un sistema isolato imprimere una quantità di moto in un verso ad un corpo senza che un altro corpo acquisti una stessa quantità di moto in verso opposto.

Forze impulsive ed urti

La conservazione della quantità di moto può essere applicata, con buona approssimazione, quando si verifica che le forze interne $\vec{F}_{INT}$ sono molto più intense delle forze esterne $\vec{F}_{EST}$ nell'intervallo Δt in cui avviene l'interazione.

Le forze $\vec{F}$ caratterizzate da essere molto intense e di agire solo in un breve intervallo $\Delta t = t_f - t_{fi}$ sono dette **forze impulsive.**

Ricordiamo che $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow$ nella direzione di $\vec{F}$ $\quad \Delta p = \int_i^f Fdt \approx \overline{F} \cdot \Delta t$ con $\overline{F}$ valore medio di F in Δt.



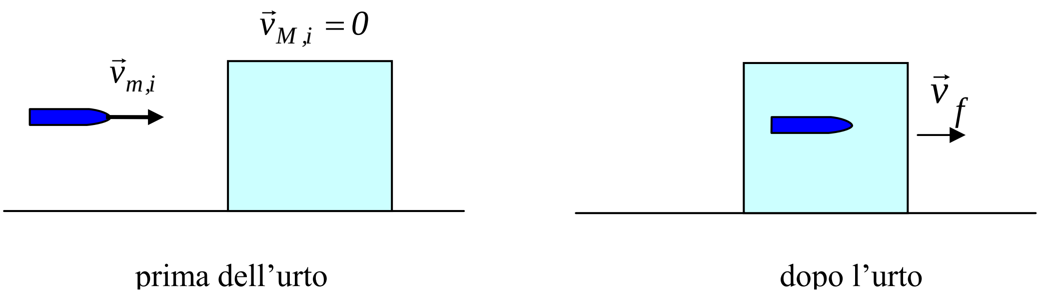
Spesso F e Δt per le forze impulsive non sono misurabili separatamente, ma essendo la variazione della quantità di moto collegata ad entrambe, se definiamo **impulso** ***I*** la quantità $I = \int_i^f F dt \approx \overline{F} \cdot \Delta t$, (si misura in Ns), abbiamo che $\Delta p = I$ nella direzione in cui agisce la forza, ovvero: L'impulso è uguale alla variazione di quantità di moto prodotta dalla forza.

Se nelle interazioni fra punti materiali, le forze interne che agiscono sono impulsive avviene facilmente che $F_{INT} >> F_{EST}$ nell'intervallo dell'interazione $\Delta t = t_f - t_{fi}$ .Ignorando gli effetti delle forze esterne avvero assumendo $\vec{F}^R_{EST} \cong 0$ nell'intervallo di interazione si può applicare il principio di conservazione della quantità di moto fra gli istanti di tempo t_f e t_i $\Rightarrow \vec{P}_{T,iniziale} = \vec{P}_{T,finale}$

I fenomeni che verificano queste condizioni sono detti **urti** e le forze in gioco, generalmente di natura elastica in meccanica, hanno un andamento temporale come quello in figura.

Gli urti sono fenomeni di interazione fra corpi dominati da forze interne molto intense ma attive per tempi molto brevi per i quali la quantità di moto del sistema immediatamente prima dell'interazione è pari a quella immediatamente dopo.

Esempio 1) Urto fra una massa m in moto con velocità $\vec{v}$ ed una di massa M ferma. In seguito all'urto le masse restano unite.

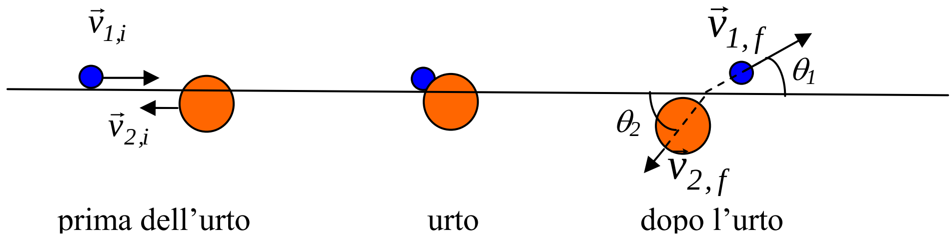


quantità di moto iniziale: $\vec{P}_i = m\vec{v}_{m,i}$, quantità di moto finale: $\vec{P}_f = (M+m)\vec{v}_f$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m\vec{v}_{m,i} = (M+m)\vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_f = \frac{m}{m+M}\vec{v}_{m,i}$$

Velocità finale ha la stessa direzione e verso di quella iniziale ma in modulo minore.

Esempio 2) Urto fra due masse m_1 e m_2 in moto con velocità $\vec{v}_{1,i}$ e $\vec{v}_{2,i}$ che proseguono separatamente dopo l'urto.



quantità di moto iniziale: $\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}$, quantità di moto finale: $\vec{P}_f = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$

a) $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$

Se negli urti si conserva anche l'energia cinetica essi sono detti **urti elastici**, altrimenti sono detti anelatici.

Se urto dell'esempio precedente è elastico, vale anche che:

b) $K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,f}^2$

Le equazioni *a* e *b* permettono, nel caso l'urto avvenga con le velocità delle masse, sia prima che dopo l'urto, lungo la stessa direzione, di calcolare le velocità finali conoscendo quelle iniziali. Nel caso più generale di urto nello spazio per poter calcolare le velocità finali servono anche gli angoli di deviazione θ_1 e θ_2.