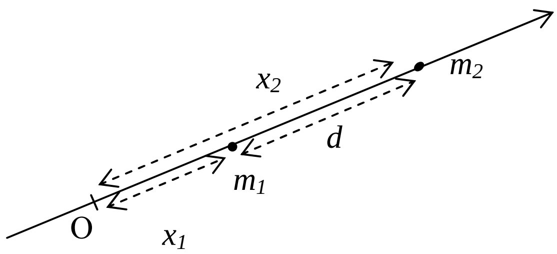
## Centro di massa di un sistema

Assumiamo un corpo complesso qualsiasi costituito da *n* punti elementari ciascuno di massa $m_i$ e lo chiameremo sistema di punti materiali. Partiamo da un sistema fatto da due masse $m_1$ ed $m_2$. Consideriamo come asse *x* del sistema di riferimento, la retta passante per le due masse.




Definiamo ***Centro di Massa (CM)*** del sistema il punto individuato dalla coordinata:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Osservazioni:

a) $x_{CM} - x_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_1 x_1 - m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$

la posizione del CM rispetto ad un'altra massa dipende solo dalle masse e dalla distanza *d* fra esse ossia il CM è un punto specifico del sistema.

b) $\frac{|x_{CM} - x_1|}{|x_{CM} - x_2|} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \right) \cdot \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 d} \right) = \frac{m_2}{m_1}$

la distanza del CM dalle masse è inversamente proporzionale alle masse; infatti:

c) se $m_1 >> m_2 \Rightarrow x_{CM} \approx \frac{m_1 x_1}{m_1} = x_1$

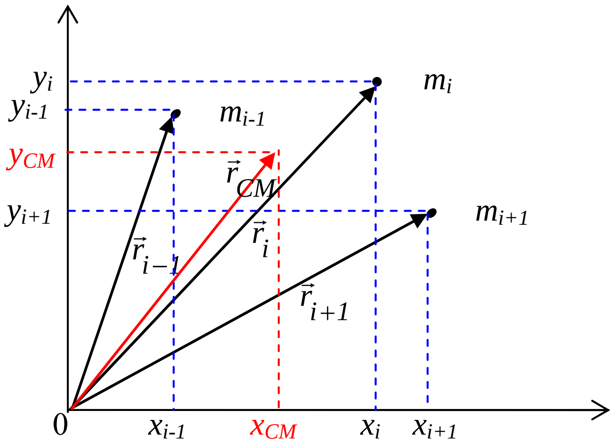
la posizione del CM coincide con quella della massa maggiore.

d) se $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_1} = \frac{m_1 (x_1 + x_2)}{2m_1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

la posizione del CM coincide con il punto medio fra le masse.

Se il sistema è costituito da *n* masse $m_i$ allineate fra loro la generalizzazione della definizione di coordinata del CM del sistema è ovvia: $x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$.

Consideriamo invece in caso generico di $n$ masse $m_i$ distribuite nello spazio e ciascuna individuata da un vettore posizione $\vec{r}_i$ in un dato sistema di riferimento.




*NB: Figura limitata a punti materiali in un piano*

Ricordiamo che : $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

Considerando le componenti cartesiane di ciascun vettore posizione, possiamo calcolare le seguenti coordinate: $x_{CM} = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$, $\quad y_{CM} = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$, $\quad z_{CM} = \dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$.

Definiamo CM il punto individuato dal vettore $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$.

Osserviamo che possiamo scrivere:

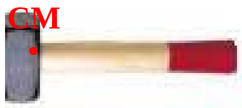
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\hat{i} + \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\hat{j} + \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}\hat{k} = \frac{\sum m_i x_i\hat{i} + \sum m_i y_i\hat{j} + \sum m_i z_i\hat{k}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i(x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k})}{\sum m_i} \Rightarrow$$

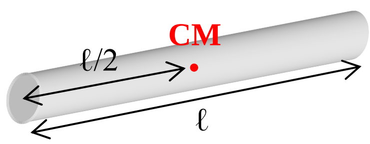
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$$

e quindi il centro di massa di un sistema di punti materiali è individuato dal vettore: $\vec{r}_{CM}$ .

Estrapolando le osservazioni *a,d,c,d* precedenti possiamo dire:

a) il CM è un punto specifico del sistema
b) esso tende posizionarsi verso la zona con masse più grandi.
c) se un sistema è omogeneo il CM è nel punto di simmetria.

b) 


c) 

## Equazione del moto del Centro di Massa.

Considerato un sistema di $n$ punti materiali ciascuno di massa $m_i$, posto $\sum m_i = M$ massa totale del sistema, la posizione del CM può essere riscritta come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad \Rightarrow \quad M\vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i .$$

Se tutti o alcuni dei punti materiali sono in moto, i corrispondenti $\vec{r}_i$ varieranno con il tempo e quindi anche $\vec{r}_{cm}$ varierà nel tempo. Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione $\Delta t$.

$$\Rightarrow M \frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \sum \frac{m_i \Delta\vec{r}_i}{\Delta t} \quad per\ \Delta t \to 0 \quad \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \vec{v}_i$$ velocità del punto materiale i-esimo

$$\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \vec{v}_{CM}$$ è definita come velocità del CM

$$(1) \Rightarrow M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Nel caso generico le $\vec{v}_i$ varieranno nel tempo e quindi anche $\vec{v}_{cm}$ varierà nel tempo. Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione $\Delta t$.

$$\Rightarrow M \frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \sum \frac{m_i \Delta\vec{v}_i}{\Delta t} \quad per\ \Delta t \to 0 \quad \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t} = \vec{a}_i$$ accelerazione del punto materiale i-esimo

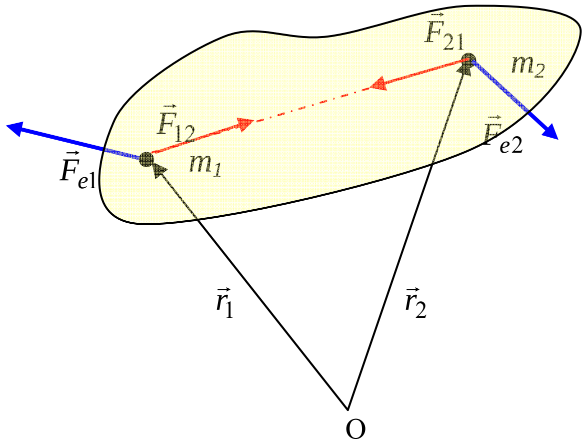
$$\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \vec{a}_{CM}$$ è definita come accelerazione del CM

$$(2) \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i$$

Per la seconda legge della dinamica sappiamo, posto $\vec{F}_i$ la risultante delle forze agenti sul i-esimo punto materiale, che $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ e quindi dalla (2)

$$(3)\, M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_i$$

Per continuare facciamo riferimento ad un sistema di soli due punti materiali di massa $m_1$ ed $m_2$ interagenti con il modo esterno con due forze rispettivamente $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$.




Le forze $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ (con $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ) sono forze di interazione fra i costituenti il sistema è sono dette **forze interne**.
Le forze $\vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_{e2}$ sono forze di interazione fra i costituenti del sistema ed il mondo esterno è sono dette **forze esterne**

Quindi $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1}$ e $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{e2}$ e dalla (3)

$$\Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{e2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e1} - \vec{F}_{12} + \vec{F}_{e2} = \vec{F}_e^R$$

dove si è indicato con $\vec{F}_e^R = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = \sum \vec{F}_{ei}$ la risultante delle forze esterne

In conclusione e generalizzando abbiamo: $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_e^R$

Il moto del centro di massa è determinato dalla risultante delle sole forze esterne, ovvero il centro di massa si muove sotto l'azione della risultante delle forze esterne come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.

## Quantità di moto del centro di massa

Ogni singolo punto materiale ha una quantità di moto $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, di conseguenza la quantità di moto totale di un sistema è semplicemente $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i$

Usando la (1) possiamo scrivere: $\vec{P}_T = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} \Rightarrow$
la quantità di moto di un sistema di punti materiali è pari alla massa totale per la velocità del centro di massa, ossia coincide con la quantità di moto del punto CM se associamo ad esso la massa totale del sistema. Ancora, il centro di massa si comporta come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in esso.

Nel caso generico, le $\vec{p}_i$ variano nel tempo e quindi anche $\vec{P}_t$ varierà nel tempo.
Possiamo studiarne le variazioni per un tempo di osservazione *Δt:*

$$\frac{\Delta \vec{P}_t}{\Delta t} = M \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_T}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_e^R \Rightarrow$$

solo le forze esterne possono cambiare la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali.