Cinematica – I°

La cinematica si occupa della descrizione del moto. Affronteremo questo argomento nella cosiddetta *approssimazione di punto materiale*: i corpi saranno considerati senza dimensione ovvero equivalenti a dei punti matematici. Ciò equivale a dire che le dimensioni dei corpi sono trascurabili rispetto al fenomeno in studio. Ad esempio un satellite può essere considerato un punto materiale nel suo moto intorno alla terra.

1) Definizione di moto

Un punto materiale P è individuato rispetto all'origine di un sistema di riferimento da un vettore posizione $\vec{r}$ detto anche *raggio vettore*. Se il punto P (vedi fig. 1) si muove da una posizione A ad una posizione B, il suo vettore posizione $\vec{r}$ cambia con il tempo t $\Rightarrow$ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ovvero il punto P è in moto.

$$\boxed{\text{P in moto} \Leftrightarrow \vec{r}=\vec{r}(t)}$$

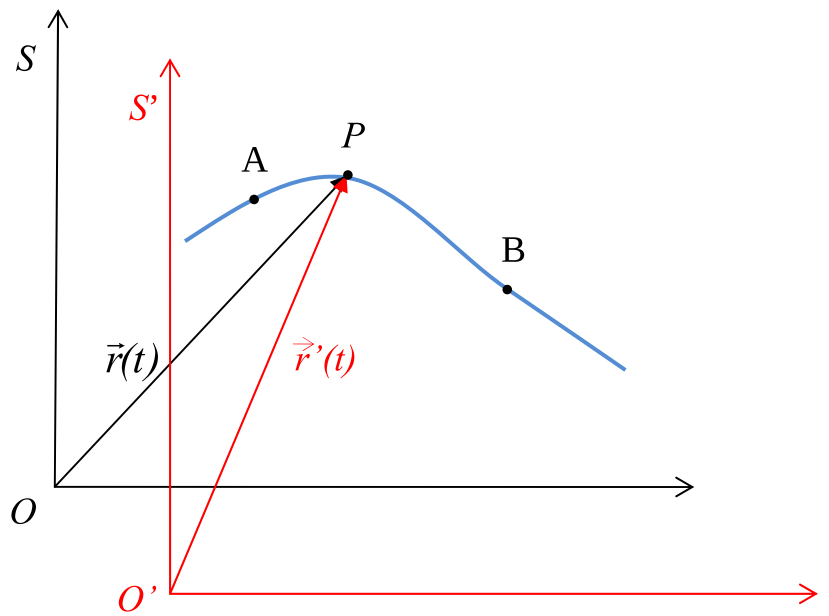


Fig. 1

Dalla fig. 1 è evidente, che in un sistema di riferimento *S'*, diverso da *S*, il punto *P* è individuato da un vettore $\vec{r}'$ (diverso da $\vec{r}$) e quindi l'equazione del moto dalla posizione *A* alla posizione *B* nel sistema *S'* sarà $\vec{r}'=\vec{r}'(t)$ (diverso da $\vec{r}=\vec{r}(t)$ nel sistema S) ovvero lo stesso moto ha una descrizione diversa: *la descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento*.

Mentre il punto *P* si muove, esso passa attraverso una successione di punti dello spazio; l'insieme dei punti (linea) via via occupati dal punto P durante il moto prende il nome di *traiettoria*.

Spesso il tipo di traiettoria è usato per caratterizzare il moto.

la traiettoria è una retta $\Rightarrow$ *moto rettilineo*

la traiettoria è una curva piana $\Rightarrow$ *moto curvilineo piano*

la traiettoria è una circonferenza $\Rightarrow$ *moto circolare*

la traiettoria è una ellisse $\Rightarrow$ *moto ellittico,*

ecc,ecc

2) Il modo in una dimensione: velocità ed accelerazione.

Il moto di un punto materiale lungo una retta può essere descritto scegliendo l'asse del sistema di riferimento (l'asse x ad esempio) coincidente con la retta lungo la quale avviene il moto. La posizione (vedi fig. 2a) del punto è individuata dalla coordinata x e il moto descritto dalla relazione $x = x(t)$ *(moto unidimensionale).*

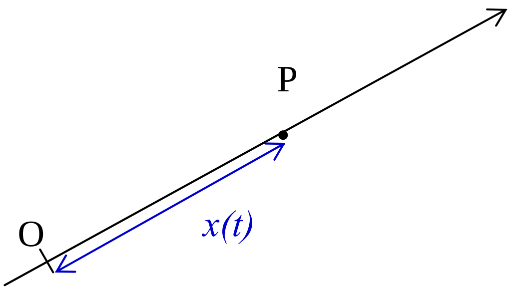


Fig. 2a

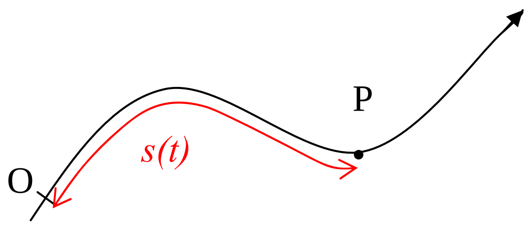


Fig. 2b

In effetti anche il moto lungo una curva può essere considerato ad una dimensione se si usa la *coordinata curvilinea s,* con curva coincidente con la traiettoria (fig. 2b). La coordinata curvilinea si intende la posizione misurata lungo la curva (ovvero seguendone la forma, come è possibile fare con un metro da sarta). Il moto è descritto dalla relazione $s = s(t)$ (*moto unidimensionale*).

Supponiamo che il punto P sia in moto e sia x_0 (s_0) la posizione spaziale all'istante di tempo t_0 e x_1 (s_1) la posizione spaziale a un istante di tempo t_1 successivo ($t_1 > t_0$). In corrispondenza dell'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ riscontriamo una variazione di posizione $\Delta x = x_1 - x_0$ ($\Delta s = s_1 - s_0$) (fig. 3).

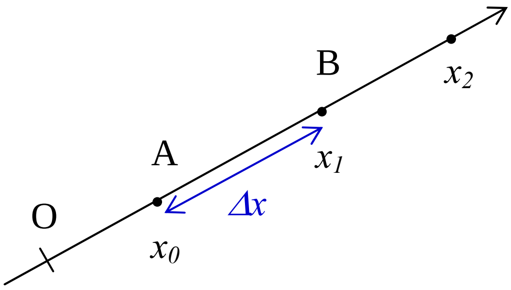


Fig. 3a

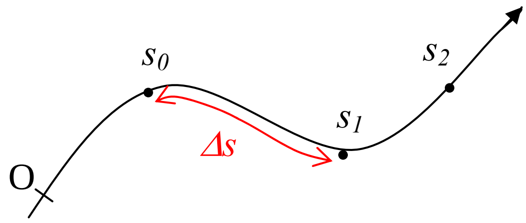


Fig. 3b

Osservazioni:

1) la variazione di posizione Δx (Δs) non è da confondere con il cammino percorso dal punto P nel tempo Δt infatti si ha lo stesso Δx (Δs) sia se, nell'intervallo Δt, il punto P va direttamente da x_0 (s_0) a x_1 (s_1) sia se, ad esempio, raggiunge un punto di coordinata $x_2 > x_1$ $(s_2 > s_1)$ e poi torna indietro al punto x_1 (s_1).

2) Δx (Δs) può essere maggiore, minore (o uguale) di zero e ciò dipende dall'orientazione dell'asse di riferimento rispetto al moto. Se il moto avviene dal punto A al punto B, con l'asse orientato come in fig 3, abbiamo Δx $(\Delta s) > 0$ ma se orientiamo l'asse come in fig. 4, Δx $(\Delta s) < 0$.

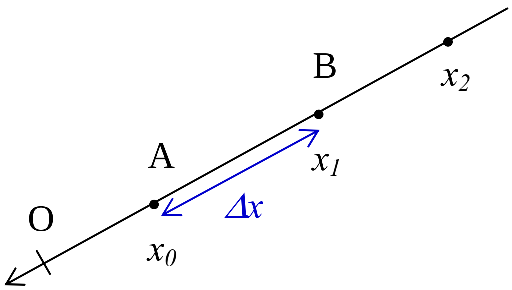


Fig. 4a

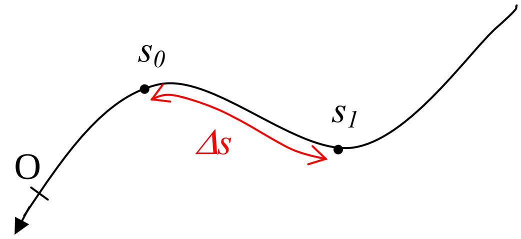


Fig. 4b

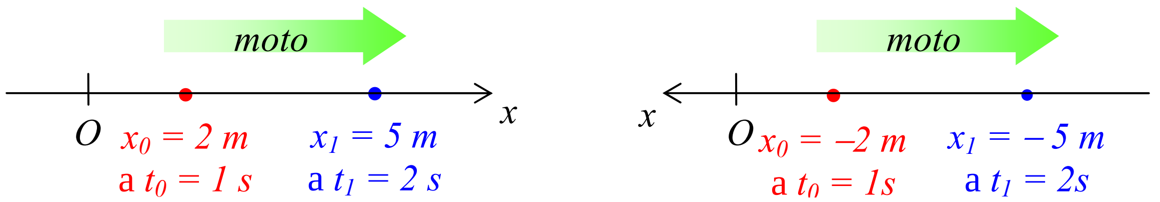
Continueremo d'ora in poi riferendoci alla sola coordinata x, ma si sottolinea che tutte le grandezze che introdurremo saranno generalizzabili alla coordinata curvilinea s e avranno lo stesso significato.

La variazione di posizione Δx relativa alla l'intervallo di tempo Δt, permette ci caratterizzare il moto introducendo la grandezza ***velocità media*** v_m.

2.1 $$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \qquad (\textit{unità di misura} = \frac{m}{s})$$

In un moto con v_m maggiore di un altro si avrà una maggiore variazione della posizione, nello stesso intervallo di tempo di osservazione.

Osservato che $\Delta t > 0$ sempre, per quanto detto nell'osservazione 2, segue che v_m può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla) in relazione al sistema di riferimento scelto. Ciò è chiarito nella fig. 5.



$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5-2)m}{(2-1)s} = 3\,m/s > 0$$

moto *concorde* con il verso

positivo dell'asse $x \Rightarrow v_m > 0$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(-5-(-2))m}{(2-1)s} = -3\,m/s < 0$$

moto *discorde* con il verso

positivo dell'asse $x \Rightarrow v_m < 0$

Fig. 5

Per lo stesso moto fisico, v_m sarà positiva se il verso scelto come positivo per l'asse x è concorde con il moto; v_m sarà negativa se il verso scelto come positivo per l'asse x è discorde con il moto. (Si era già detto che la descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento).

Supponiamo di effettuare a piedi un percorso urbano, spostandoci di un Δx in un Δt ovvero con una $v_m = \Delta x/\Delta t$. Generalmente il moto non è uniforme: per un certo tempo possiamo aver corso, per un certo tempo possiamo essere stati fermi, per un certo tempo aver camminato lentamente ecc…… La definizione di v_m non tiene conto di tutto questo e, considerato anche quanto detto nell'osservazione 2, possiamo concludere che la 1.1 fornisce una <u>*non completa*</u> caratterizzazione dello stato di moto. Si è generalmente interessati la velocità assunta da un punto materiale in un ben determinato istante; ma dal punto di vista operativo, è impossibile calcolare la velocità ad un "istante di tempo" t in quanto essa è definita relativamente ad un intervallo di tempo Δt. L'unica cosa che possiamo eventualmente fare è calcolare v_m usando intervalli Δt intorno a t, piccoli quanto si voglia ma sicuramente non nulli.

Definiamo quindi la velocità ad un "istante di tempo" t ovvero la ***velocità istantanea*** come la velocità media del punto materiale relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo Δt intorno a t , al limite tendente a zero. Dal punto di vista formale:

$$v_i \approx v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \quad \text{per } \Delta t \to 0 \quad \text{ovvero}$$

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

2.2 $$v_i = \frac{dx}{dt}$$

Ossia la velocità istantanea di un punto è la rapidità di variazione della posizione occupata dal punto con il tempo, ovvero la derivata prima rispetto al tempo della posizione spaziale $x(t)$.

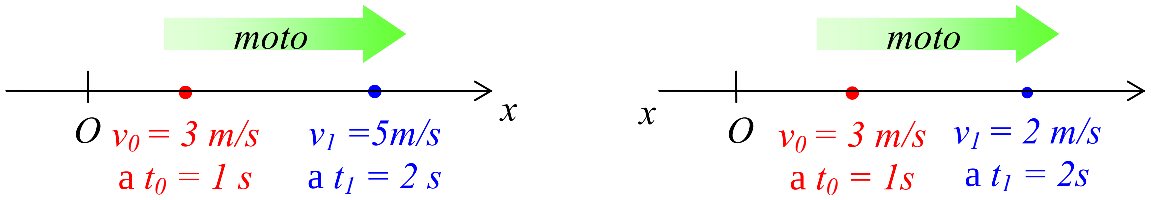
Di seguito quando diremo velocità v intenderemo riferirci alla v_i $(v \equiv v_i)$.

Ora per il punto P in moto da x_0 ad x_1 possiamo definire la velocità v_0 all'istante di tempo t_0 e la velocità v_1 all'istante di tempo t_1. In generale dobbiamo aspettarci che sia $v = v(t)$ cioè $v_1 \neq v_0$ e quindi in corrispondenza dell'intervallo di tempo di osservazione $\Delta t = t_1 - t_0$ riscontriamo una variazione di velocità $\Delta v = v_1 - v_0$. La variazione Δv relativa all'intervallo di tempo Δt, permette una ulteriore caratterizzazione del moto introducendo la grandezza ***accelerazione media*** a_m.

2.3 $$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} \qquad (\textit{unità di misura} = \frac{m}{s^2})$$

In un moto con a_m maggiore di un altro si avrà una maggiore variazione della velocità nello stesso intervallo di tempo di osservazione.

Osservato che $\Delta t > 0$ e che ΔV può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla) segue che anche a_m può essere sia positiva che negativa (e ovviamente anche nulla). Il segno di a_m non è direttamente correlato al verso dell'asse di riferimento, ma è determinato dall'aumento o diminuzione della v, come si vede in fig 6.



$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(5-3)m/s}{(2-1)s} = 2\, m/s^2 > 0$$

moto nel verso positivo di x con velocità in aumento $\Rightarrow a_m > 0$

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2-3)m/s}{(2-1)s} = -1\, m/s^2 < 0$$

moto nel verso positivo di x con velocità in diminuzione $\Rightarrow a_m < 0$

Fig. 6

E' facile rendersi conto che anche a_m così come è definita tramite la 1.3 non tiene conto dei dettagli del moto all'interno dell'intervallo Δt e quindi fornisce una *non completa* caratterizzazione dello stato di moto. Si è generalmente interessati alla accelerazione assunta dal un punto materiale in un ben determinato istante t; ma come nel caso della velocità l'unica cosa che possiamo eventualmente fare è calcolare a_m usando intervalli Δt intorno a t, piccoli quanto si voglia ma sicuramente non nulli.

Definiamo quindi la accelerazione ad un "istante di tempo" t ovvero ***l'accelerazione istantanea*** come l' accelerazione media del punto materiale relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo Δt intorno a t, al limite tendente a zero. Dal punto di vista formale:

$$a_i \approx a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \text{per } \Delta t \to 0 \qquad \text{ovvero}$$

$$a_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

2.4 $$a_i = \frac{dv}{dt}$$

Ossia l'accelerazione istantanea di un punto è la rapidità di variazione della velocità del punto con il tempo, ovvero la derivata prima rispetto al tempo della velocità $v(t)$.

Di seguito quando diremo accelerazione a intenderemo riferirci alla a_i ($a \equiv a_i$).

Il moto rettilineo di un punto materiale è quindi caratterizzato dalla sua velocità v e dalla sua accelerazione a; in particolare se $a = a(t)$ il moto è detto *rettilineo vario*, se $a = cost$ il moto è detto *rettilineo uniformemente accelerato* e in particolare se $a = cost = 0$ il moto è *detto rettilineo uniforme.*

Lo scopo dello studio del moto è quello di ricavare *le equazioni orarie* ossia le equazioni $x(t)$ e $v(t)$, nota a, che permettono di descrivere il moto in ogni istante di tempo. Se $a = a(t)$, le equazioni orarie dipendono esplicitamente da $a(t)$ e non è possibile ricavare un'espressione generale; ciò è invece possibile se $a = cost$.

3) Equazioni orarie del moto rettilineo

Nel seguito faremo coincidere l'istante di tempo iniziale t_0 con il tempo zero: $t_0 = 0$ e quindi $\Delta t = t_1 - t_0 = t_1$.

Caso $a = 0$: ***moto rettilineo uniforme***

$$a = a_m = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = 0 \Rightarrow v_1 = v_o \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = v_0 = v_m = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} \Rightarrow v_0 t_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + v_0 t_1$$

Data la generalità dell'istante t_1, *le* precedenti espressioni valgono per un qualsiasi istante di tempo t quindi in un moto rettilineo uniforme si ha:

3.1 $\quad v(t) = cost = v_0$

3.2 $\quad x(t) = x_0 + v_0\, t$

I grafici delle relazioni 3.1 e 3.2 sono dati in fig. 7.

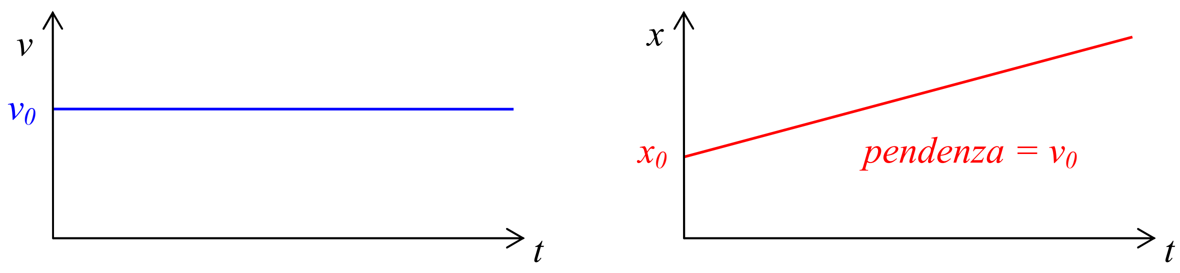


Fig 7

Caso $a = cost$ **: *moto rettilineo uniformemente accelerato***

$$a = a_m = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1} \Rightarrow at_1 = v_1 - v_0 \Rightarrow v_1 = v_0 + at_1 .$$

Data la generalità dell'istante t_1, la precedente espressione vale per un qualsiasi istante di tempo $t \Rightarrow v(t) = v_0 + at$.

Poiché $v(t)$ varia linearmente con il tempo il suo valore medio può essere calcolato come: $v_m = \frac{v_1 + v_0}{2}$ che deve coincide con quello calcolato tramite la definizione di velocità media: $v_m = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} \Rightarrow \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{v_1 + v_0}{2} \Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{1}{2} t_1 (v_1 + v_0)$ usando la relazione precedente per v_1 segue:

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{2} t_1 (v_0 + at_1 + v_0) \Rightarrow x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow$$

Data la generalità dell'istante t_1, la precedente espressione vale per un qualsiasi istante di tempo t quindi in un moto rettilineo uniformemente accelerato si ha:

3.3 $v(t) = v_0 + at$.

3.4 $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Le 3.3 e 3.4 sono le equazioni orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato ed includono per $a = 0$ quelle del moto rettilineo uniforme (3.1 e 3.2) essendo questo un caso particolare di $a = cost$. I grafici delle relazioni 3.3 e 3.4 sono dati in *fig. 8* dove risulta evidente l'andamento parabolico di $x(t)$.

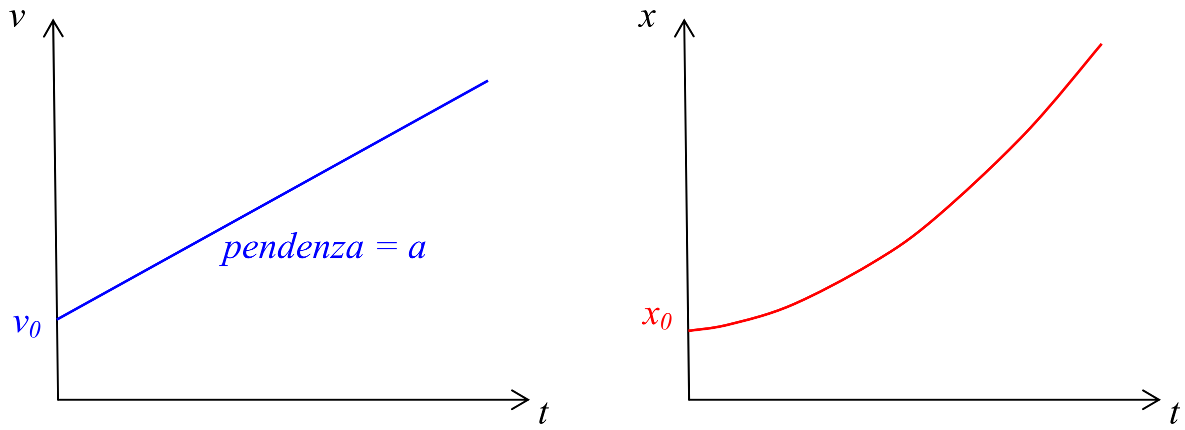


Fig 8

Le relazione 3.3 e 3.4 mostrano inoltre che il problema del moto è completamente risolto solo se si conoscono *le condizioni iniziali* ossia i valori di x e v all'stante iniziale t_0.

Può essere utile nella risoluzione di problemi numerici avere un'espressione che leghi direttamente x, v ed a.

Dalla 3.3 segue: $t = \frac{v(t) - v_0}{a}$ che sostituito nella 3.4 da:

$$x(t) = x_0 + v_0\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right)^2 = x_0 + v_0\left(\frac{v(t)-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}\frac{(v(t)-v_0)^2}{a} \Rightarrow$$

$$2ax(t) = 2ax_0 + 2v_0v(t) - 2v_0^2 + v^2(t) - 2v_0v(t) + v_0^2 \Rightarrow 2ax(t) = 2ax_0 - v_0^2 + v^2(t) \Rightarrow$$

3.5 $$x(t) - x_0 = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a}$$

4) Il moto di caduta libera.

L'importanza delle equazioni del moto nel caso molto particolare del moto rettilineo uniformemente accelerato risiede nel fatto che sperimentalmente si osserva che un qualsiasi oggetto in prossimità della superficie terrestre, trascurando la resistenza dell'aria, sente *una accelerazione costante g*, detta **accelerazione di gravita**, diretta secondo la verticale e verso la superficie terrestre con $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Detto y l'asse verticale di un sistema di riferimento (fig. 9) in cui le altezze h sono

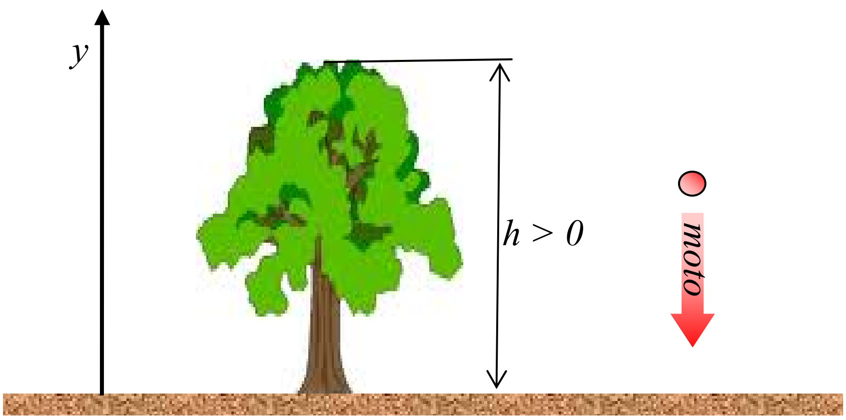


Fig. 9

positive, (quindi orientato verso l'alto), si osserva che il *moto di caduta libera* (che per definizione è il moto di un oggetto lasciato fermo e libero di cadere ovvero lasciato con $v_0 = 0$ a $t_0 = 0$), avviene verso il basso: esso ha quindi una $v(t)$ negativa. Ciò, in base alla 3.3, richiede che a debba essere negativa. Ponendo il suffisso y per indicare che il moto avviene lungo l'asse verticale y, le equazioni del moto di caduta libera in tale sistema di riferimento sono:

$$a_y = -g$$

4.1 $$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

4.2 $$y(t) = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Con queste equazioni, note le condizioni iniziali, possiamo risolvere qualsiasi caso di moto di caduta libera.

Esempio 1): Vogliamo calcolare, per un corpo lasciato con $v_{0y} = 0$ a $t_0 = 0$ ad altezza $y_0 = h$, il tempo t_s impiegato per giungere il suolo e la velocità v_s con cui vi giunge.

Giungere al suolo equivale a dire che ad un istante di tempo $t_1 = t_s$ si avrà $y(t_1) = 0$ con $v_c = v(t_s)$. Usando le 4.1 e 4.2 ed imponendo le condizioni iniziali $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \\ v_1 = -gt_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_s = t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ v_s = v_1 = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

Esempio 2): Consideriamo un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v_{0y} a $t_0 = 0$ dal suolo $(y_0 = 0)$, e vogliamo calcolare

a) il tempo t_M impiegato per raggiungere la massima altezza,

Osserviamo che il corpo inizialmente sale (v positiva) e poi scende (v negativa), risulta ovvio che la massima altezza h_M è raggiunta in un istante di tempo t_M quando $v(t_M) = 0$. Usando la 4.1 e imponendo le condizioni iniziali $\Rightarrow$

$$v(t_M) = 0 = v_{0y} - g \Rightarrow t_M = \frac{v_{oy}}{g}$$

b) la massima altezza h_M

Essa sarà la posizione raggiunta nel tempo t_M ossia $h_M = y(t_M)$. Usando la predecente e la 4.2, imponendo le condizioni iniziali ⇒

$$h_M = y(t_M) = v_{oy} t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 \Rightarrow h_M = v_{oy} \frac{v_{oy}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{oy}}{g} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g}$$

c) il tempo t_s per giungere al suolo.

Ricordando che giungere al suolo equivale a dire che ad un istante di tempo t_s si avrà $y(t_s) = 0,$ usiamo la 4.2 e imponendo le condizioni iniziali ⇒

$$y(t_s) = 0 = v_{oy} t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \Rightarrow t_s' = 0, \quad t_s'' = \frac{2v_{oy}}{g}$$

Si hanno due soluzioni perché effettivamente il corpo è per due volte nel punto $y = 0$; il momento iniziale e quando ritocca il suolo. Si noti che t_s è pari ha $2t_M$ e cioè il corpo impiega lo stesso tempo sia a salire che a scendere.

d) la velocità v_s con giunge al suolo.

Essa sarà la velocità raggiunta nel tempo t_s ossia $v_s = v(t_s)$. Usando la precedente e la 4.1, imponendo le condizioni iniziali ⇒

$$v_s = v(t_s) = v_{oy} - g t_s \Rightarrow h_M = v_{oy} - g \frac{2v_{oy}}{g} = -v_{oy}$$

ossia v_s è uguale ed opposta alla velocità iniziale

e) l'istante di tempo t in cui il corpo si trova in un data posizione y_d.

Dobbiamo usare la 4.2,imponendo le condizioni iniziali ⇒

$$y(t) = y_d = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t_{1,2} \neq 0,$$

ossia si hanno due istanti di tempo (soluzioni) perché il corpo occupa due volte la posizione y_d; mentre sale a t_1 e mentre scende a t_2 con ovviamente $t_2 > t_1$.