La dinamica dei fluidi

1) *Introduzione: tipi di moto e linee di flusso*
Libro di testo: par 15.8

2) *Equazione di continuità*
Libro di testo: par 15.9

3) *Equazione di Bernoulli*
Libro di testo: par 15.10

4) *Viscosità e moto di un fluido ideale*

I fluidi, per come sono definiti, non dovrebbero presentare resistenza al moto di scorrimento; nei fluidi reali si osserva invece una forma di attrito interno fra strati adiacenti di fluido che si oppone allo scorrimento dell'uno sull'altro che chiameremo ***viscosità***. Nei liquidi la viscosità è principalmente dovuta alle forze di coesione fra le molecole, mentre nei gas è provocata essenzialmente dagli urti fra le molecole.

Un fluido reale è pertanto caratterizzato da un *coefficiente di viscosità* (η) definito operativamente come segue.

Consideriamo due lastre rigide piane, una fissa e l'altra tenuta in movimento con velocità v costante, al cui interno si trova uno strato di fluido reale di spessore ℓ (*fig. 1*). Le molecole di fluido a contatto con la lastra in moto tenderanno a muoversi con la stessa velocità v, mentre quelle a contatto con la lastra ferma tenderanno a restare ferme: ciò determina una distribuzione di velocità all'interno del fluido ossia un *gradiente di velocità* dv/dy.

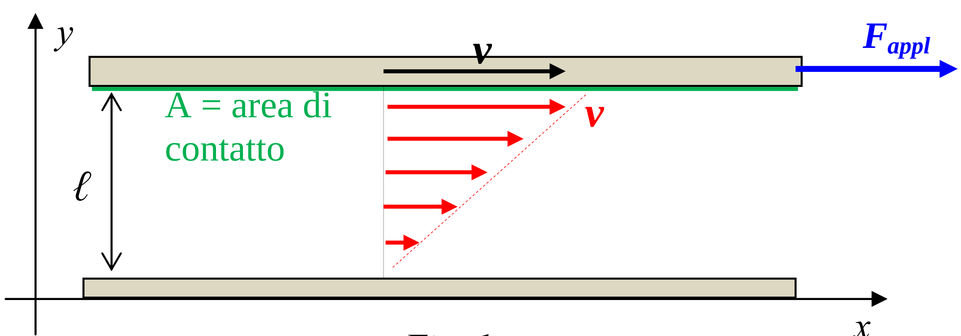


Fig. 1

Si osserva sperimentalmente che per avere $v = cost$ bisogna agire con $F_{appl} = cost$ e quindi, per la seconda legge della dinamica, deve esserci una forza, dovuta alla viscosità, F_v, tale che: $\vec{F}_{appl} + \vec{F}_v = 0 \Rightarrow \vec{F}_{appl} = -\vec{F}_v \Rightarrow F_{appl} = F_v$.

Sempre sperimentalmente si trova, detta A l'area della superficie di contatto fra fluido e la lastra mobile, che:

4.1 $$F_v = F_{appl} \propto \frac{vA}{\ell}.$$

Il *coefficiente di viscosità* η è per definizione la costante di proporzionalità nella 4.1:

4.2 $$F_v = \eta \frac{Av}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{F_v \ell}{Av}.$$

Unita di misura:
$$\frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m/s} = \frac{N \cdot s}{m^2} = Pa \cdot s = \frac{Kg}{m \cdot s} \text{ nel sistema MKS.}$$
(viene usato anche il Poise, $P = 10^{-1}$ Kg/ms)

Più in generale, poiché non sempre il gradiente di velocità è lineare la 4.2 si scrive:

4.3 $$F_v = \eta A \frac{dv}{dy}$$ dove si assume che η sia indipendente da v.

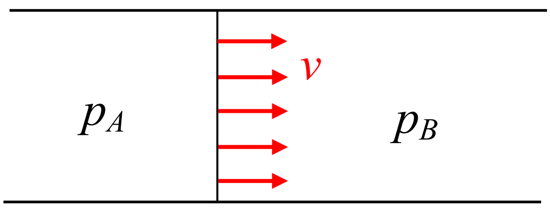
Il valore di η dipende dal fluido e, dato un fluido, dipende fortemente dalla temperatura. Alcuni valori tipici sono dati in tabella:

Fluido	T (° C)	η (Kg/ms)
Acqua	0	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Acqua	20	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Acqua	100	$0.3 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	20	$830 \cdot 10^{-3}$
Olio motore	30	$250 \cdot 10^{-3}$
Alcool	20	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Si noti che i coefficienti di viscosità, sono molto minori dei coefficienti di attrito dinamico fra solidi. Per questo, se due superfici rigide devono scorrere una sull'altra, si interpone fra esse uno strato di fluido (*lubrificazione*) per ridurre l'attrito totale.

5) Il flusso laminare dei fluidi reali

La viscosità introduce *importanti differenze* nel moto di un fluido reale rispetto a quello di un fluido ideale. Considerando il flusso di un fluido ideale (*fig. 2a*) e di un fluido reale (*fig. 2b*) in tubo cilindrico orizzontale di sezione A costante, si ha:

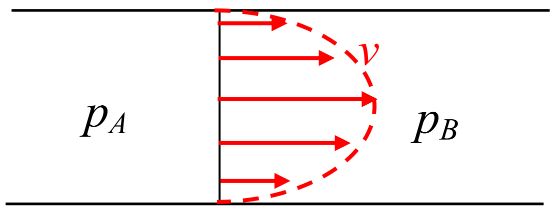


fluido ideale

v costante nella sezione A

$p_A = p_B$

Fig 2a



fluido reale

v variabile nella sezione A

$p_A > p_B$

Fig 2b

Notiamo che a causa della viscosità:

a) è necessaria una differenza di pressione $\Delta p = p_A - p_B$ fra le estremità del tubo per avere un flusso di fluido.

b) lo scorrimento del fluido può essere descritto come il moto di tanti strati sottili e paralleli alle pareti del tubo che si muovono parallelamente tra loro con velocità crescenti mentre ci avvicina al centro del condotto (fig. 3) (detto *moto laminare*).

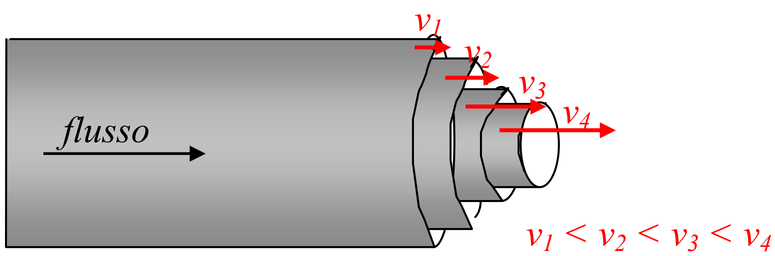


Fig. 3

Se $\Delta p = cost$, le velocità di ogni singolo stato restano costanti (ovvero la distribuzione delle velocità non cambia nel tempo) e si ha un *moto laminare stazionario*. Ovviamente la corrispondente portata Q_L non può essere più calcolata semplicemente come Av e in particolare risulta $Q_L < Av$.

Se la velocità di flusso è alta e/o la differenza di pressione molto elevata, il moto non è più laminare ma *turbolento* con una portata $Q_T < Q_L$. La portata diminuisce perché le forze di attrito sono molto maggiori in presenza di turbolenze. Un esame più dettagliato di quanto succede è fuori gli scopi di queste lezioni.

6) Calcolo della portata per un flusso laminare stazionario in un tubo cilindrico

Consideriamo un tubo cilindro di raggio *R* lungo *L*, in cui scorre un fluido reale in moto *laminare stazionario* (*fig. 4*). La velocità in esso ha una distribuzione $v(r)$ con $v(R)=0$, $v(0)= v_{max}$.

Soffermiamoci su una porzione di fluido (in grigio in fig.4) contenuta in un cilindro di raggio $r < R$. Essendo il moto stazionario, segue che per ogni *r* deve essere:

$v(r)= cost \quad \Rightarrow \vec{F}^{R}_{est} = 0$.

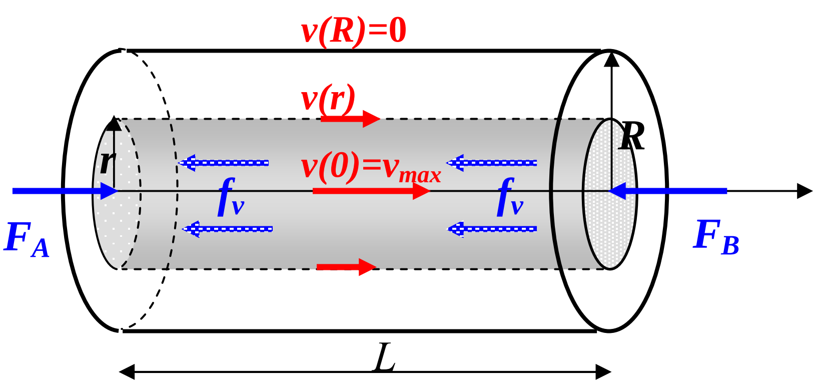
Le forze agenti se tale porzione sono:

a) la forza dovuta alla pressione sulla base *A*: $F_A = p_A \pi r^2$
b) la forza dovuta alla pressione sulla base *B*: $F_B = p_B \pi r^2$
c) la forza di viscosità sulla parete laterale S: $F_V = \eta S \frac{dv}{dr}$ con $S=2\pi rL$.

$$\vec{F}^{R}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{F}^{R}_{est} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_V = 0$$

La precedente, essendo tutte le forze parallele (all'asse del cilindro), diviene:

$$F_A - F_B - F_V = 0$$



Poiché *v* diminuisce mentre *r* aumenta, $\frac{dv}{dr}$,e quindi F_V, è implicitamente negativa, pertanto scriviamo: $\pi r^2 \left(p_A - p_B\right) + \eta 2\pi r \cdot L \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{r(p_A - p_B)}{2\eta L} \Rightarrow$

$$dv = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta L} \cdot rdr.$$

Questa espressione fornisce la variazione di velocità dv quando il raggio aumenta di dr, il segno meno mette in evidenza che la velocità diminuisce mentre il raggio aumenta.

Integrando fra r e R troviamo la corrispondente differenza di velocità:

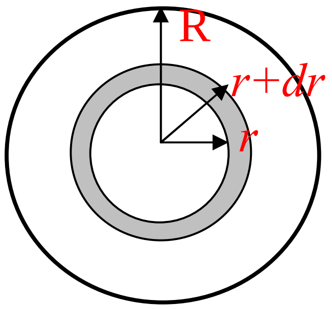
$$\int_{v(r)}^{v(R)} dv = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta L}\int_r^R rdr \Rightarrow v(R) - v(r) = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta L}\frac{R^2 - r^2}{2}$$

e ricordando che $v(R)=0$, segue:

6.1 $$v(r) = \frac{(p_A - p_B)}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right).$$

La *6.1* mostra che la distribuzione delle velocità $v(r)$ ha un andamento parabolico con r, con massimo in $r = R^2$.

In una corona circolare di raggio r e $r+dr$, di area $dA=2\pi r\cdot dr$, la velocità può essere considerata costante e pari a $v(r)$ e possiamo calcolare pertanto la relativa portata dQ come velocità per area $\Rightarrow dQ = v(r)\cdot dA$



La portata totale si ottiene sommando tutti i contributi dQ al variare di r da 0 ad $R \Rightarrow$

$$Q_L = \sum dQ = \int_0^R dQ$$

$$Q_L = \int_0^R \frac{(p_A - p_B)}{4\eta L}(R^2 - r^2)\cdot 2\pi r\cdot dr = \frac{\pi(p_A - p_B)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)rdr$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2)rdr = \int_0^R R^2 rdr - \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{4} \Rightarrow Q_L = \frac{\pi(p_A - p_B)}{2\eta L}\frac{R^4}{4} \Rightarrow$$

6.2 $$Q_L = \frac{\pi(p_A - p_B)R^4}{8\eta L}$$

La 6.2, detta ***legge di Poiseuille***, ci permette di calcolare la portata Q_L per un flusso laminare in *un tubo cilindrico*; come era ovvio aspettarsi essa è direttamente proporzionale alla differenza di pressione per unità di lunghezza, $(p_A - p_B)/L$, e inversamente proporzionale alla viscosità η. Il fatto inatteso è la dipendenza dalla *quarta potenza* del raggio e quindi ne consegue che Q_L è fortemente influenzata da una piccola variazione di R.

L'equazione 6.2, applicata al fluido sangue, è fondamentale nella fisiologia degli esseri viventi. Essa è usata per esempio per termostatarsi regolando il flusso di sangue sulla superficie del corpo variando impercettibilmente la sezione dei capillari. Inoltre essa spiega l'inevitabile l'aumento di pressione arteriosa con l'avanzare dell'età, la quale generalmente comporta una piccola riduzione della sezione delle arterie.