MOTO RETTILINEO: formalismo vettoriale

Il punto materiale si muove lungo una retta

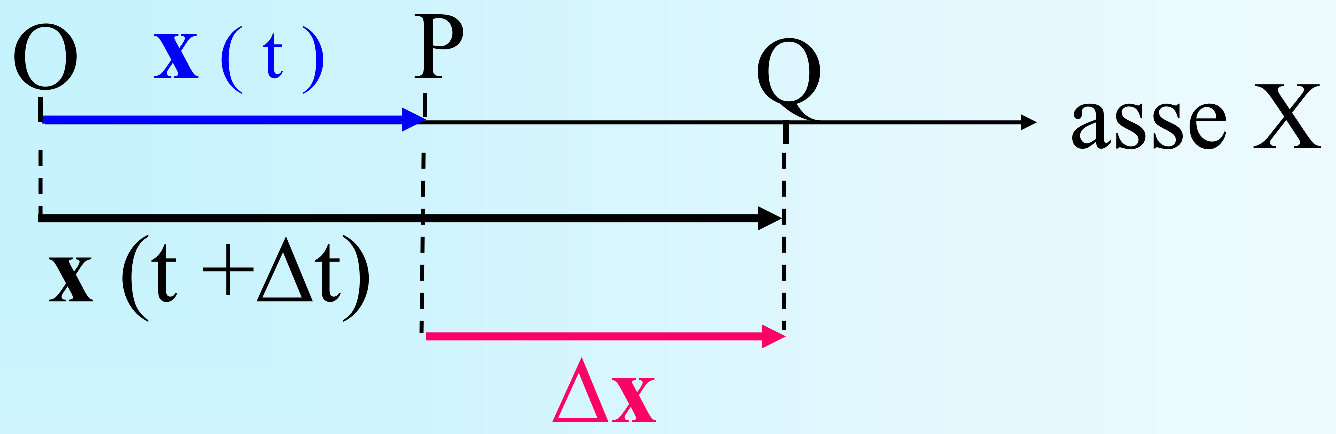
O origine

P posizione occupata dal punto materiale all’ istante di tempo t:

x (t) coordinata del punto P

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$$

vettore posizione all’istante t



Q posizione occupata dal punto materiale all' istante di tempo $t + \Delta t$:

$x(t + \Delta t)$ coordinata del punto Q

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\mathbf{i}$$

vettore posizione all'istante $t + \Delta t$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = \Delta x \, \mathbf{i}$$

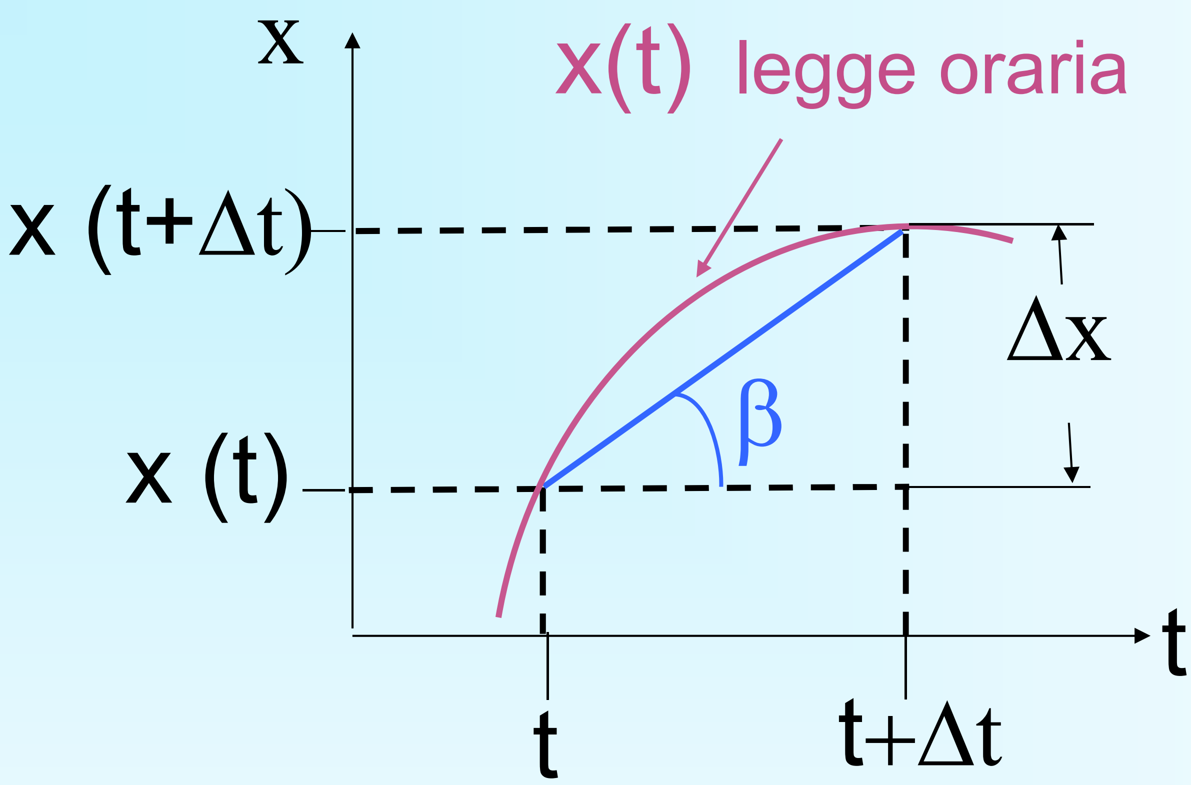
vettore spostamento

Velocità vettoriale media

$$\mathbf{v}_M = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i}$$

Unità di misura della velocità: m / s

Riportiamo in un piano (x,t) le posizioni occupate dal punto in funzione del tempo



v_M è rappresentata graficamente da tg β

β = angolo tra l' asse orizzontale

e la secante alla curva x(t)

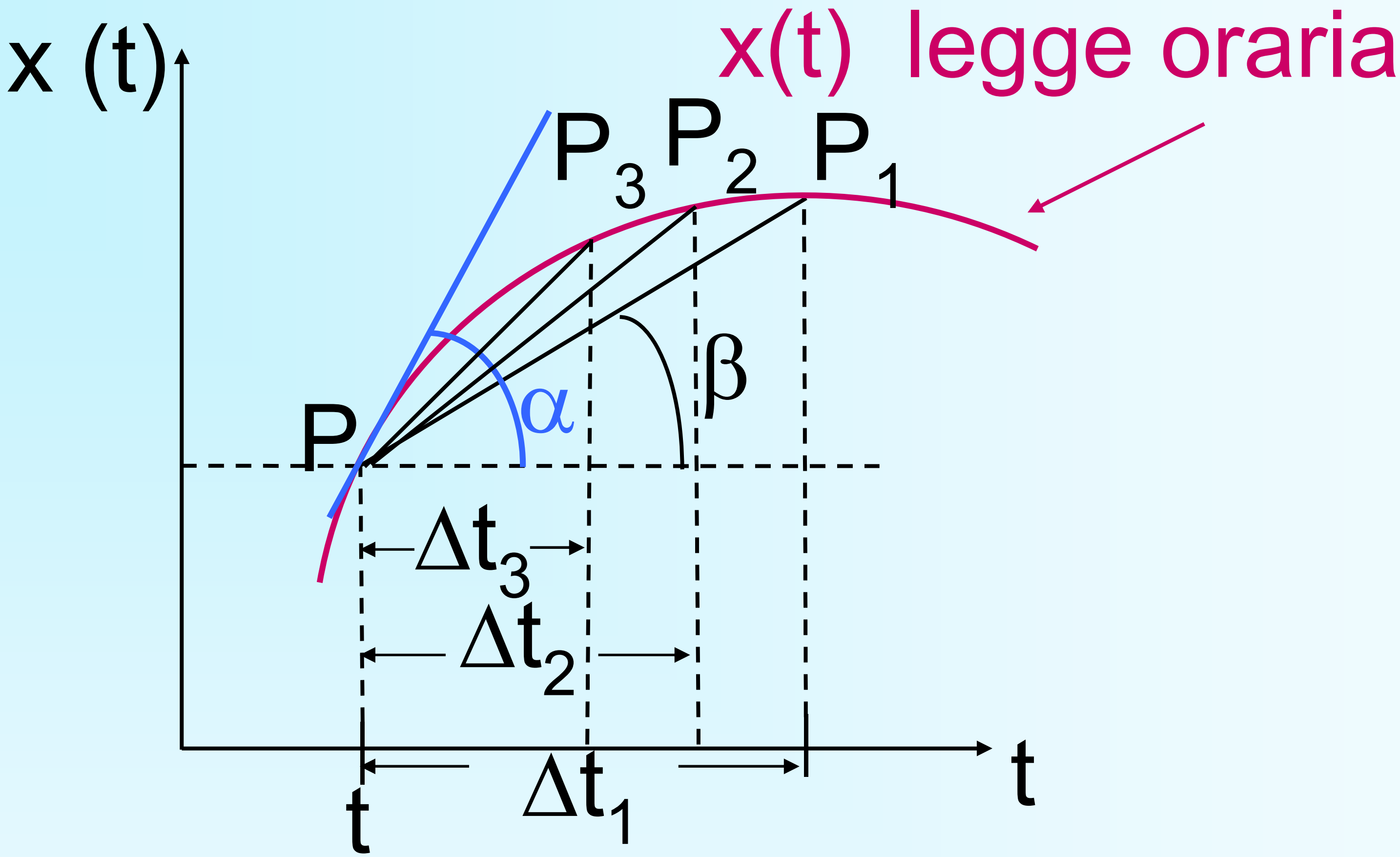
Velocità vettoriale istantanea

Si suddivide Δx in intervalli sempre più piccoli (corrispondenti a Δt sempre più piccoli) finché non si possa assumere $\mathbf{v}_M \approx \mathbf{v}$; al limite per $\Delta t \to 0$

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i}$$

velocità vettoriale istantanea =
derivata rispetto al tempo del vettore posizione



v (t) è rappresentata graficamente da tg α

α = angolo fra l'asse orizzontale
e la tangente alla curva x(t) in t

Se la velocità vettoriale è variabile si definisce

l'accelerazione vettoriale media

$\mathbf{v}(t)$ velocità all' istante di tempo

$\mathbf{v}(t+\Delta t)$ velocità all' istante di tempo $t+\Delta t$

$$\boxed{\mathbf{a}_M = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\mathbf{i}}$$

Unità di misura della accelerazione: m/s^2

Accelerazione vettoriale istantanea

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\mathbf{i} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i}}$$

Tralasciando il formalismo vettoriale

$$dx(t) = v(t)dt \qquad x(t_0) = x_0$$

$$\boxed{x(t) - x_0 = \int_{x_0}^{x(t)} d\,x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt}$$

legge oraria

$$dv(t) = a(t)dt \qquad v(t_0) = v_0$$

$$v(t) - v_0 = \int_{v_0}^{v(t)} d\,v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

direzione di **v** costante, | **v** | costante $\Rightarrow$
v vettore costante $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 0$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t) - x_0 = \int_{x_0}^{x(t)} d\,x(t) = \int_{t_0}^{t} v\,dt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

$$x(t) = x_0 + v\,(t - t_0)$$

legge oraria del moto uniforme

Se $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + v\,t$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\boxed{\mathbf{a} = \text{costante}}$$

$$v(t_0) = v_0$$

$$v(t) - v_0 = \int_{v_0}^{v(t)} d\,v(t) = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

$$v(t) = v_0 + a \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

f1

f2

Se $t_0 = 0$ $\quad\boxed{v(t) = v_0 + a\,t}$

Diapositiva 11

f1	favuzzi; 18/02/2004
f2	favuzzi; 18/02/2004

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0) \right] dt =$$

$$= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt =$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}$$

legge oraria del moto uniformemente accelerato

Se $t_0 = 0$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

a e v funzione della posizione x oltre che del tempo:

$$\boxed{v\,[x\,(\,t\,)]}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

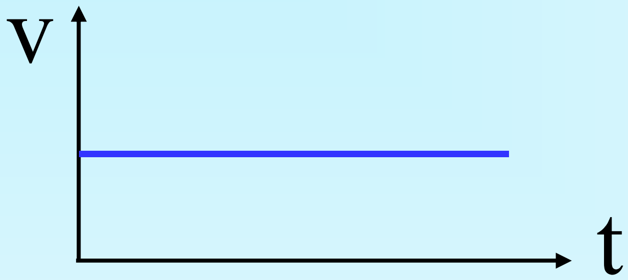
$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2$$

Se a = costante

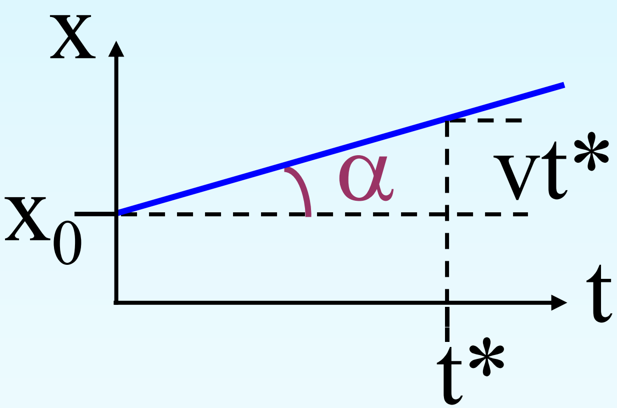
$$\boxed{a(x - x_0) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2}$$

Grafici per il moto rettilineo uniforme

$(t_0 = 0)$



$v = \text{costante}$

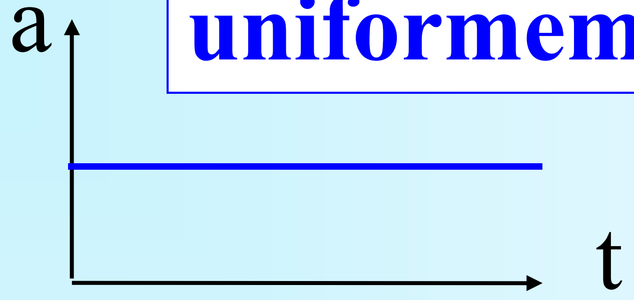


$x (t) = x_0 + vt$

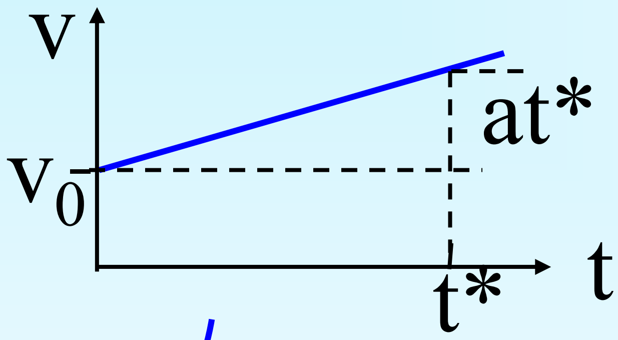
$v = \text{tg}\ \alpha$

Grafici per il moto rettilineo uniformemente accelerato

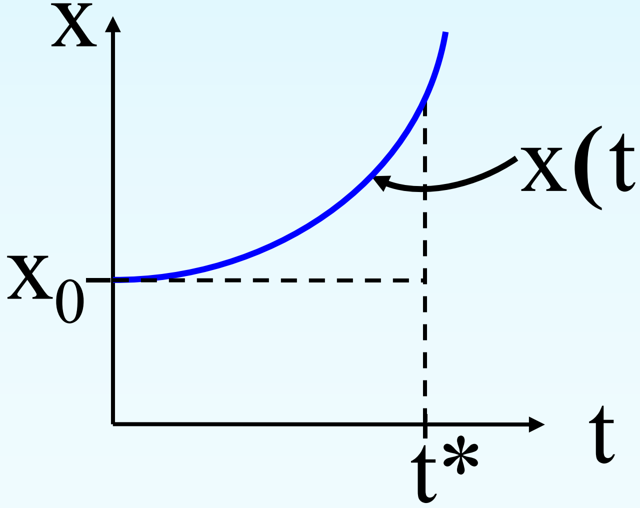
$(t_0 = 0)$



$a = \text{costante}$



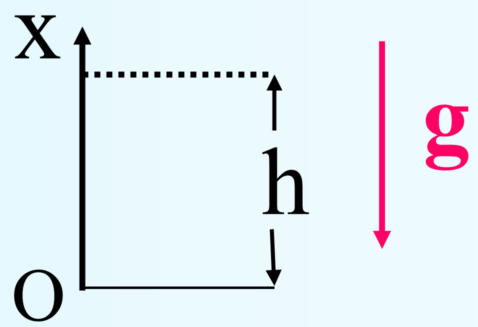
$$v(t) = v_0 + at$$



$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

CADUTA LIBERA DI UN GRAVE LUNGO LA VERTICALE

$$a = -g = -9.8\ m/s^2$$



1) condizioni iniziali :

$$t_0 = 0,\quad v_0 = 0,\quad x_0 = h$$

$$v = -g\,t$$

$$x = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Il corpo arriva al suolo all' istante t_C ∍' $x(t_C) = 0$

$$t_C = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v(t_C) = -\sqrt{2\,g\,h}$$

2) condizioni iniziali :

$$t_0 = 0 \,, \quad v_0 = -v_1 \,, \quad x_0 = h$$

$$v = -v_1 - gt$$

$$x = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x\,(t_C) = 0$$

$$t_C = \frac{\left(-v_1 + \sqrt{v_1^{\,2} + 2\,g\,h}\right)}{g}$$

$$v(t_C) = -\sqrt{v_1^{\,2} + 2\,g\,h}$$

3) condizioni iniziali :

$t_0 = 0$, $v_0 = v_2 > 0$, $x_0 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_2 - g\,t \\ x &= v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

Il corpo inizialmente sale

Il moto si inverte all'istante

t_M Э' $v(t_M) = 0$

$$\boxed{t_M = \frac{v_2}{g}}$$

Il corpo raggiunge la posizione

$$x(t_M) = \frac{v_2 v_2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_2^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{g}$$

Tempo impiegato per raggiungere il suolo

$$t_C = \sqrt{\frac{2\ x(t_M)}{g}} = t_M$$

$$t = 2t_M = 2\frac{v_2}{g}$$

tempo complessivo

MOTO ARMONICO SEMPLICE

moto

rettilineo ⇓ la traiettoria è una retta ad es.: asse X

oscillatorio ⇓ legge oraria:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \Phi_0)$$

$\Phi = \omega t + \Phi_0$ fase all'istante t

Φ_0 = fase iniziale

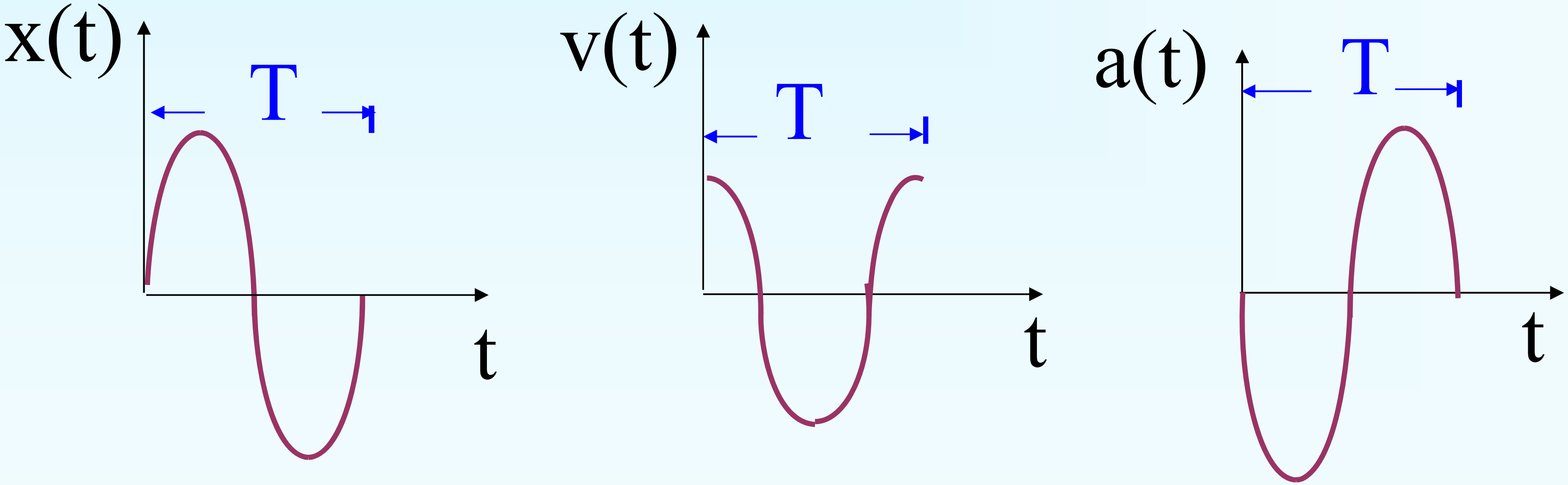
ω = pulsazione

A = ampiezza di oscillazione

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\mathbf{cos}\left(\omega t + \Phi_0\right)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \mathrm{sen}\left(\omega t + \Phi_0\right) = -\omega^2 x(t)$$

Per $\Phi_0 = 0$



Il punto materiale ritorna ad occupare **la stessa posizione con la stessa velocità** ad intervalli regolari di tempo pari a **T**:

$$x(t) = x(t + nT)$$

$$A\,\mathrm{sen}(\omega t + \Phi_0) = A\,\mathrm{sen}\,[\omega(t + nT) + \Phi_0]$$

Essendo 2π il periodo della funzione seno deve valere l'uguaglianza

$$\omega(t + nT) + \Phi_0 = \omega t + \Phi_0 + 2n\pi$$

$$\omega t + \Phi_0 + \omega n T = \omega t + \Phi_0 + 2 n \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{periodo}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{frequenza}$$

Unità di misura della frequenza: s^{-1} « hertz »

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \Phi_0)$$

soluzione dell' equazione differenziale

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

MOTO PIANO

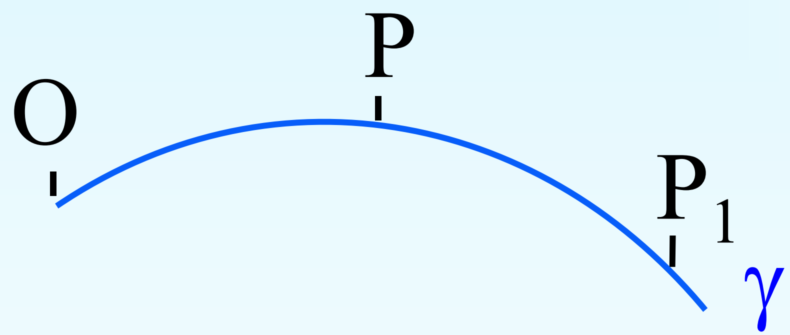
In generale: moto **curvilineo** vario

curva γ = traiettoria

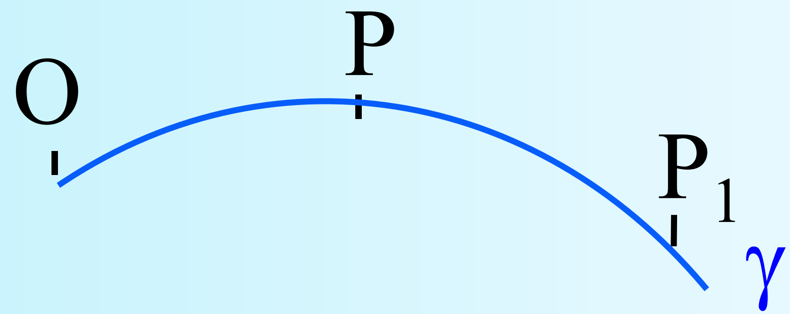
O origine

P posizione del punto all' istante t

P_1 " " " " " $t + \Delta t$



$\forall P \in \gamma$ è definita la lunghezza di $\overset{\frown}{O\,P}$



Fissato su γ un verso positivo (verso degli archi crescenti), si associa ad ogni punto P

$$s(t) = \text{ lunghezza di } \overset{\frown}{OP} = \text{ ascissa curvilinea di } P$$

$s = s(t)$ **LEGGE ORARIA DEL MOTO**

$$s(t + \Delta t) = \text{ lunghezza di } \overset{\frown}{OP_1} = \text{ ascissa curvilinea di } P_1$$

$$\Delta s = s\,(t + \Delta\, t) - s\,(t\,) = \overset{\frown}{PP_1}$$

spostamento del punto lungo la traiettoria

$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

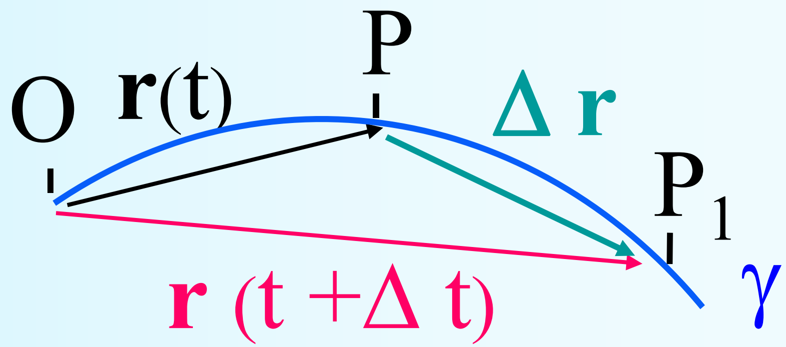
velocità scalare media

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

velocità scalare istantanea

Descrivere il moto $\Leftrightarrow$ conoscere γ e $v(t)$

Velocità vettoriale



r (t) = **OP** (t)   **vettore posizione** all'istante t

r (t + Δ t) **vettore posizione** all'istante t +Δ t

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$, **vettore spostamento**, ha la direzione della secante PP_1

$$\mathbf{v}_M = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

velocità vettoriale media

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

v derivata del vettore posizione **r**(t)

Per $\Delta t \to 0$ $\quad P_1 \to P$ muovendosi su γ

d **r**(t), posizione limite di Δ**r**,
ha la direzione della tangente a γ in P

$\mathbf{u}_T$ versore della tangente

verso di $\mathbf{u}_T \equiv$ verso del moto

$|d\,\mathbf{r}| = d\,s$ spostamento infinitesimo lungo γ

$d\,\mathbf{r}\,(t) = d\,s\,\mathbf{u}_T$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{u}_T = v\,\mathbf{u}_T}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_T = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\,\mathbf{r}}{ds}}$$

γ e $\mathbf{v} = v\,\mathbf{u}_T$

caratteristiche intrinseche

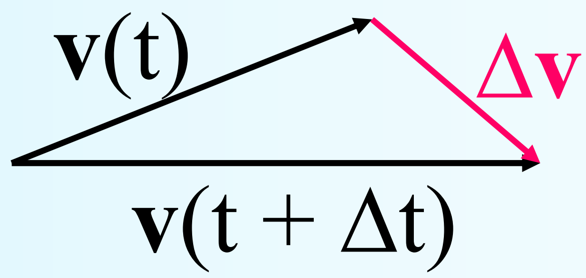
indipendenti dalla scelta del sistema di riferimento

ACCELERAZIONE

Variano modulo e direzione di $\mathbf{v}$

Accelerazione media

$$\mathbf{a}_M = \frac{\Delta\,\mathbf{v}}{\Delta t}$$



Accelerazione istantanea

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{u}_T\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\mathbf{u}_T}{dt}$$

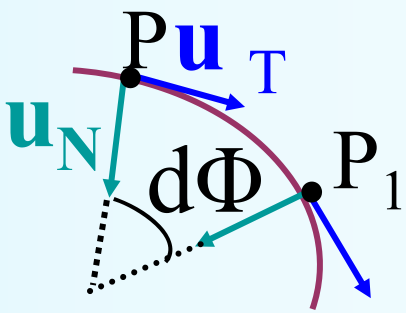
Valutiamo $\dfrac{d\,\mathbf{u}_T}{dt}$

$$\boxed{\mathbf{u}_T \bullet \mathbf{u}_T = 1}$$

Differenziando

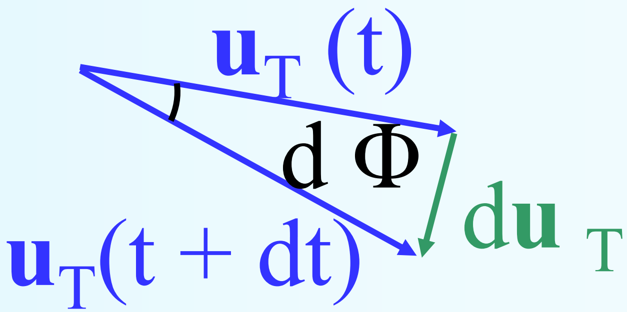
$$d\mathbf{u}_T \bullet \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_T \bullet d\mathbf{u}_T = 0$$

$$2\mathbf{u}_T \bullet d\mathbf{u}_T = 0$$



$$\boxed{d\mathbf{u}_T \perp \mathbf{u}_T}$$

$$d u_T = 1 \cdot d\boldsymbol{\Phi}$$



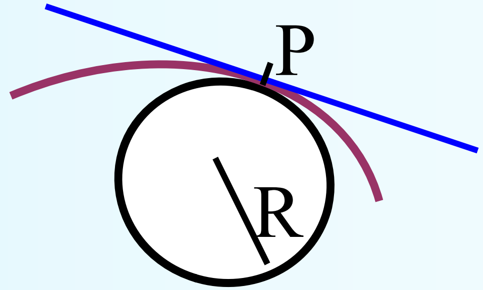
$$\boxed{\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\mathbf{u}_N}$$

$\mathbf{u}_N$ versore della normale

diretto verso la concavità della curva

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + v\frac{d\Phi}{dt}\mathbf{u}_N}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$



$$R = \frac{ds}{d\Phi} =$$ raggio di curvatura = raggio del cerchio osculatore

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N}$$

$\mathbf{a}_T$ accelerazione **tangenziale**

responsabile della variazione del modulo di **v**

$\mathbf{a}_N$ accelerazione **centripeta**

responsabile della variazione della direzione di **v**

$$a = \sqrt{a^2_T + a^2_N}$$

$a_N \neq 0 \quad a_T \neq 0$

moto curvilineo vario

$a_N \neq 0 \quad a_T \neq 0 \qquad R = \text{costante}$

moto circolare vario

$a_N \neq 0 \qquad a_T = 0$

moto curvilineo uniforme

$a_N \neq 0 \quad a_T = 0 \qquad R = \text{costante}$

moto circolare uniforme

$\mathbf{a}_N = 0 \qquad \mathbf{a}_T \neq 0$

moto rettilineo vario

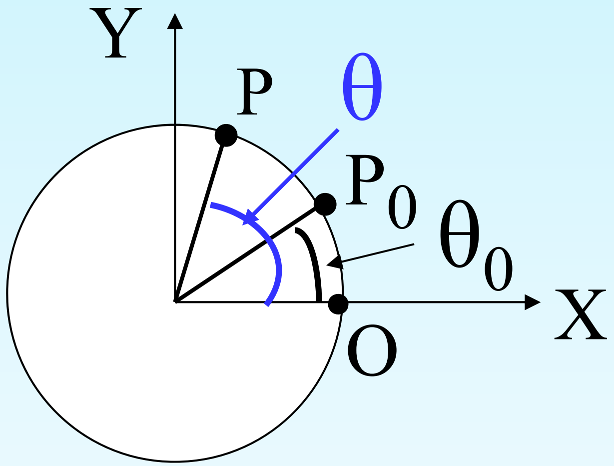
$\mathbf{a}_N = \mathbf{0} \qquad \mathbf{a}_T = \mathbf{0}$

moto rettilineo uniforme

Moto circolare uniforme

Il punto materiale si muove lungo una circonferenza:

| **v** | costante, **v** tangente alla circonferenza



$\overset{\frown}{OP_0} = s_0$ all' istante $t_0 = 0$

$\overset{\frown}{OP} = s$ all' istante t

$$\Delta S = \overset{\frown}{P\,P_0} = s - s_0$$

$s = s_0 + v\,t$ **LEGGE ORARIA**

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

indipendente da Δt

T periodo

$\nu = 1/T$ frequenza

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

velocità angolare indipendente da Δt

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta-\theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt = \omega t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

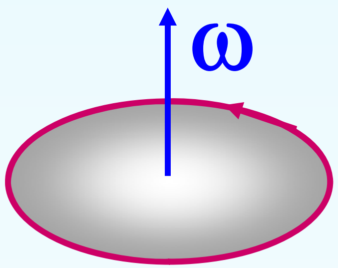
$\theta = \theta_0 + \omega\, t$ **legge oraria**

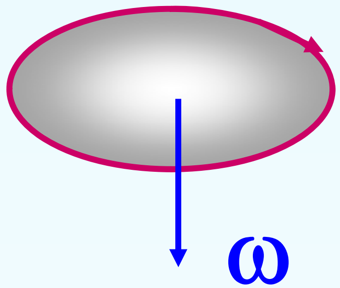
Definizione del vettore ω

Modulo: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Direzione: $\perp$ al piano della traiettoria

Verso: definito dalla regola della mano destra





Direzione di **v** variabile

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \neq 0$$

a_N **accelerazione centripeta**

Se il moto circolare non è uniforme

$$a_T = \frac{dv}{dt} \neq 0$$

a_T **accelerazione tangenziale**

Si definisce **accelerazione angolare**

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{a_T}{R}}$$

$$d\omega = \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha dt \qquad \omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$$

$\boxed{\text{Se } \alpha = \text{costante}}$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\,dt =$$

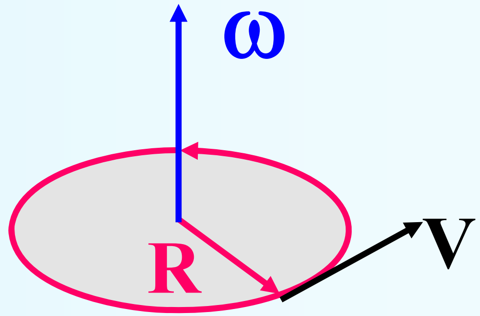
$$= \theta_0 + \omega_0 \int_0^t dt + \alpha \int_0^t t\,dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

legge oraria

Introduciamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R}}$$



$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\,\mathbf{R}}{dt} =$$

$$\alpha \times \mathbf{R} + \omega \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

Se $|\,\mathbf{v}\,| =$ costante, $\mathbf{a}_T = 0 \Rightarrow$

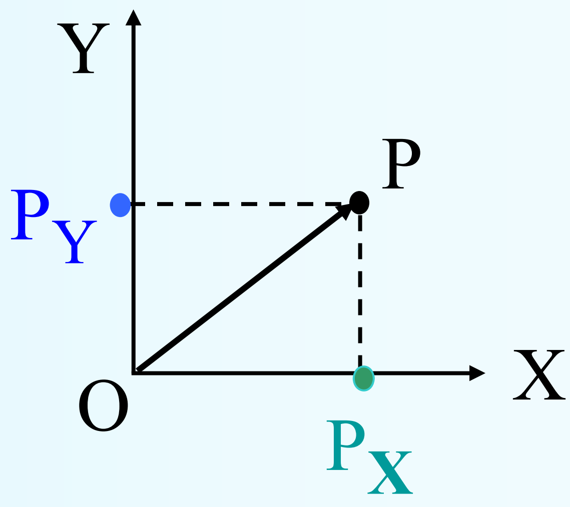
$$\boxed{\frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}$$

MOTO PIANO
IN COORDINATE CARTESIANE

P(x,y)

$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

vettore posizione di P



P_X e P_Y punti proiettati

x, y coordinate di P_X e P_Y

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\right) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_X\,\mathbf{i} + v_Y\,\mathbf{j}$$

v_X, v_Y velocità di P_X e P_Y

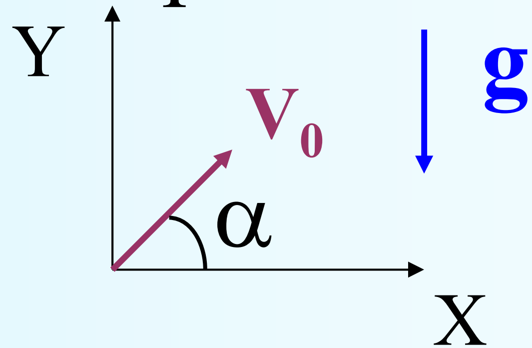
$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_X}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dv_Y}{dt}\,\mathbf{j} = a_X\,\mathbf{i} + a_Y\,\mathbf{j}$$

Mentre P si muove nel piano,
P_X e P_Y si muovono lungo gli assi X e Y
con velocità v_X, v_Y e accelerazioni a_X, a_Y

MOTO PARABOLICO DI UN CORPO

Punto materiale lanciato con velocità $\mathbf{v}_0$: con una scelta opportuna del sistema di riferimento il moto si svolge in un piano

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{g} = -\,g\,\mathbf{j}}$$



$$a_X = 0 \quad a_Y = -\,g$$

$g = 9.8\ m / s^2$ accelerazione **costante**

$$v_{0X} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0Y} = v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_X &= v_0 \cos\alpha = \text{costante} \\ v_Y &= v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha - gt \end{aligned}}$$

moto proiettato di P_X uniforme

moto proiettato di P_Y uniformemente

$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$

$y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, gt^2$

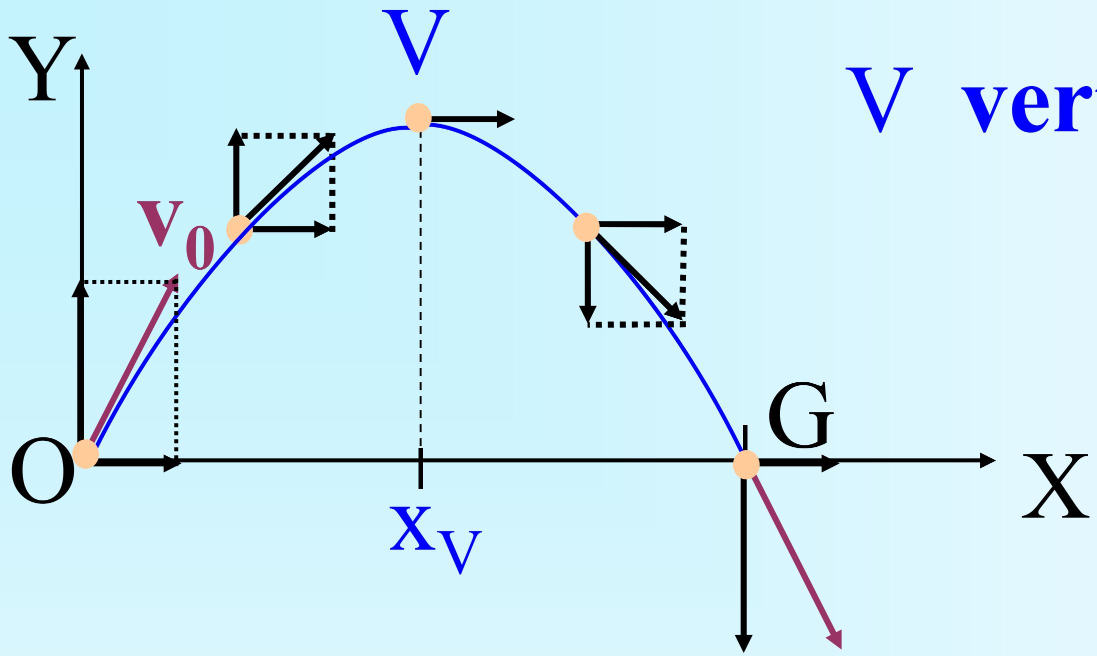
leggi orarie

equazioni parametriche della traiettoria

Eliminando t si esprime y in funzione di x

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2$$

equazione della traiettoria: **PARABOLA**



V **vertice** della parabola

OG **gittata** , $y_G = 0$

$$x_G = \frac{2\ v_0{}^2\ \cos^2\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha}{g} =$$

$$= \frac{2\ v_0{}^2\ \cos\alpha\ \mathrm{sen}\,\alpha}{g}$$

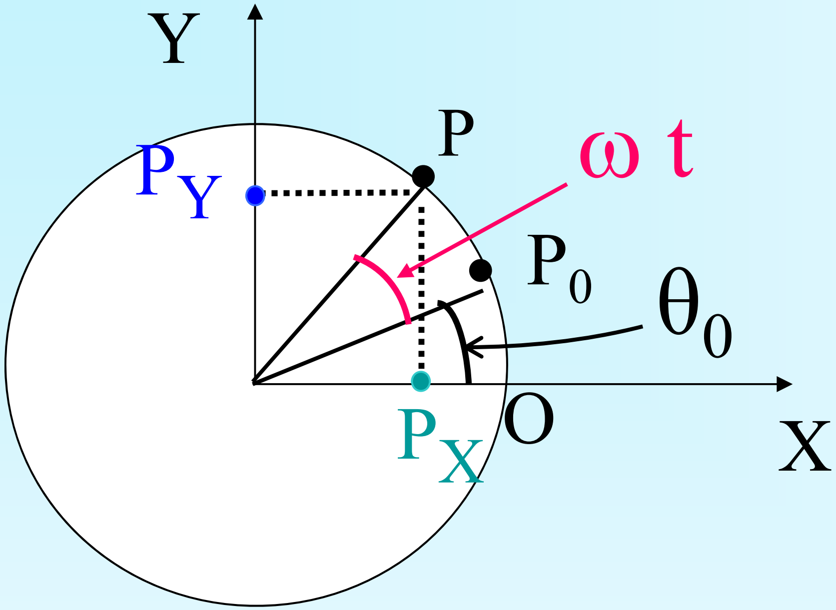
$$\boxed{x_G = 2x_V}$$

$$\boxed{y(x_V) = \frac{v_0{}^2 \mathrm{sen}^2\alpha}{2g}}$$ **altezza massima**

$$\mathbf{V}\left(\frac{v_0{}^2\ \mathrm{sen}\ \alpha\ \mathbf{cos}\,\alpha}{g}, \frac{v_0{}^2\ \mathrm{sen}^2\ \alpha}{2g}\right)$$

$$\boxed{t_G = \frac{x_G}{v_0\,\mathbf{cos}\,\alpha} = \frac{2v_0\mathrm{sen}\alpha}{g}}$$ **tempo di volo**

MOTO CIRCOLARE UNIFORME IN COORDINATE CARTESIANE



$P\,(x, y)$

$\theta = \theta_0 + \omega t$

$$x(t) = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0)$$
$$y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\theta = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

equazione della traiettoria

$$v_X(t) = -R\,\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_0)$$
$$v_Y(t) = R\,\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

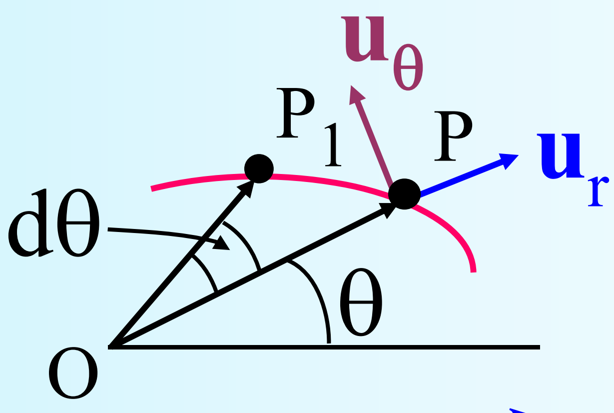
$$a_X(t) = -R\,\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$$
$$a_Y(t) = -R\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y(t)$$

Mentre il punto materiale si muove
di moto uniforme lungo la circonferenza,
le sue proiezioni sugli assi X e Y
si muovono di moti armonici
di uguale ampiezza, sfasati di $\pi/2$

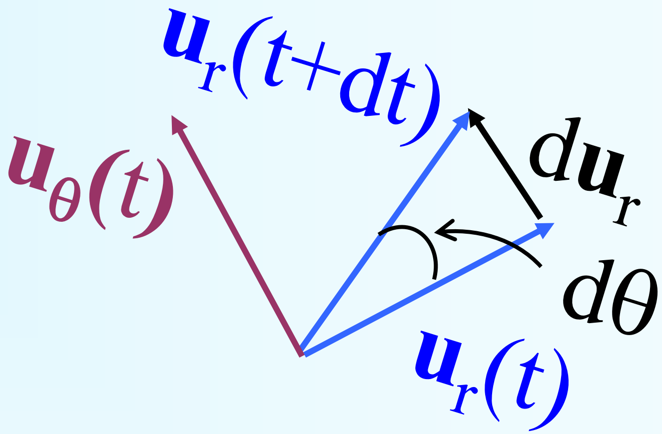
MOTO PIANO
IN COORDINATE POLARI

$$\mathbf{OP} = r\,\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_\theta \perp \mathbf{u}_r$$



$$\boxed{\frac{d\,\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta}$$



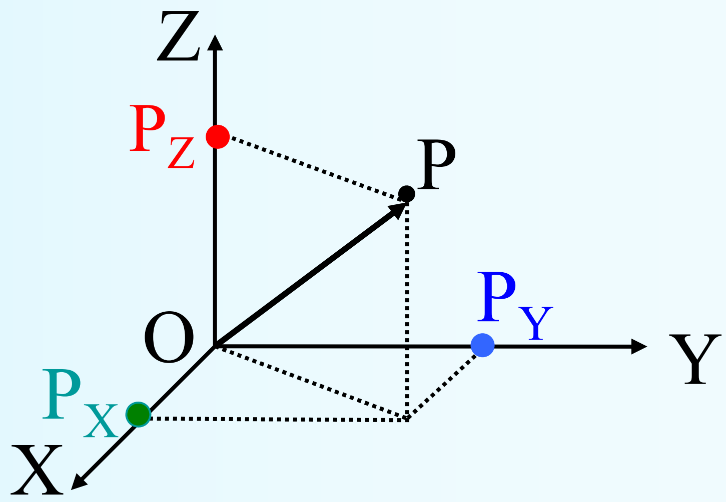
$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} r\,\mathbf{u}_r = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\,\mathbf{u}_r}{dt} =$$
$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

MOTO IN TRE DIMENSIONI

Sistema cartesiano OXYZ

P(x,y,z)



$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$

vettore posizione di P all' istante t

P_X, P_Y, P_Z punti proiettati

x, y, z coordinate di P_X, P_Y, P_Z

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\right) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}}$$

v_X, v_Y, v_z velocità di P_X, P_Y, $\mathbf{P_Z}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_X}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_Y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_Z}{dt}\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}}$$

Il moto di P è la somma dei tre moti rettilinei di P_X, P_Y, $\mathbf{P_Z}$ lungo gli assi, con velocità v_X, v_Y, v_z e accelerazioni a_X, a_Y, a_z

LEGGI ORARIE DEI MOTI RETTILINEI

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t')dt'$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t')dt'$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t')dt'$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t')dt'$$

MOTO RELATIVO RETTILINEO UNIFORME

O origine del sistema di riferimento “ fisso”

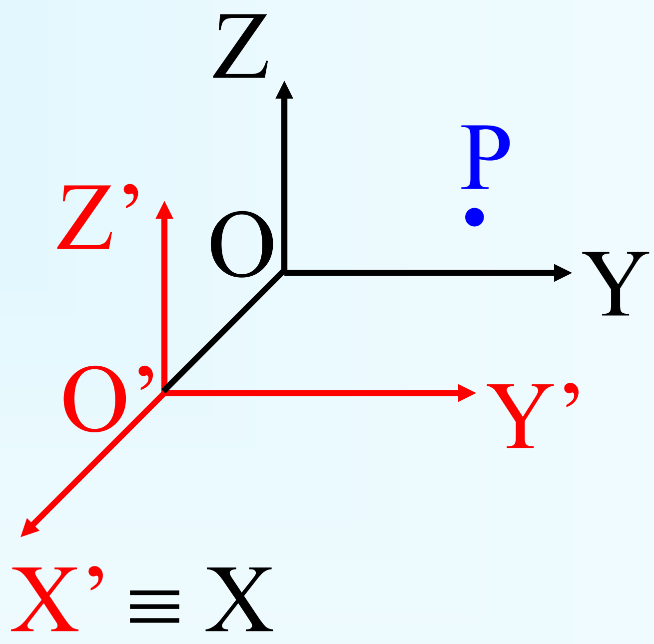
O’ origine del sistema di riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto al primo

All’istante $t = t_0 = 0$

$O \equiv O'$

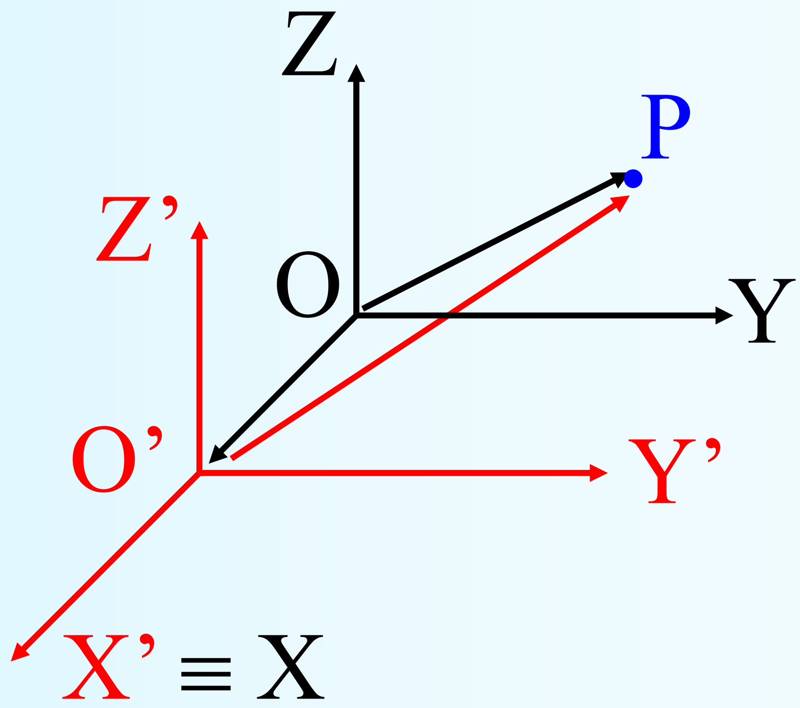
P(x,y,z) in O

P(x’,y’,z’) in O’



$v_{O'}$ costante
diretta lungo X

$$\mathbf{OO' = v_{O'}\,t}$$
$$\mathbf{OP = OO' + O'P}$$
$$\mathbf{O'P = OP - OO'}$$



(1)
$$x' = x - v_{O'}\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$t = t'$$

trasformazioni di Galileo

Il tempo è assoluto,
indipendente dal sistema di riferimento

Derivando le (1) rispetto al tempo

(2)
$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - v_{O'} \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned}$$

Derivando le (2)

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a'}}$$

I due sistemi di riferimento sono equivalenti nella descrizione del moto

COMPOSIZIONE DI MOTI

Moto nel piano

moto lungo X:

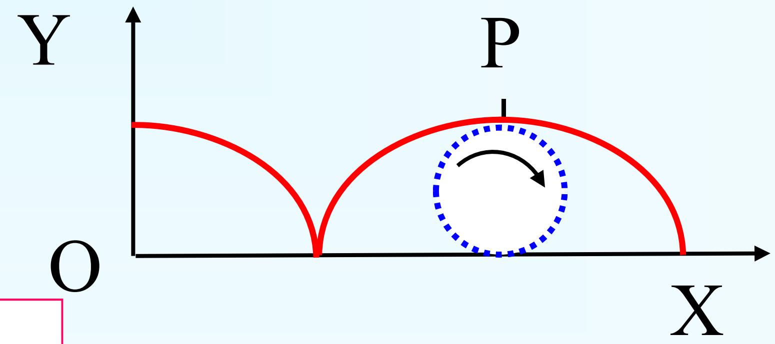
armonico semplice + rettilineo uniforme

moto lungo Y:

armonico semplice con centro in Y=R

$$x = R\,\mathrm{sen}\omega t + \omega R t$$
$$y = R\cos\omega t + R$$

con $v = \omega R$



la traiettoria è una cicloide

Moto nello spazio

moto lungo X: armonico semplice

moto lungo Y: armonico semplice

moto lungo Z: rettilineo uniforme

$$x = R\cos\omega t \quad y = R\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad z = v_Z\, t$$

La traiettoria è un' elica, di passo costante, che ha curvatura e torsione costante

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} =$$

$$\sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2} = \text{costante}$$