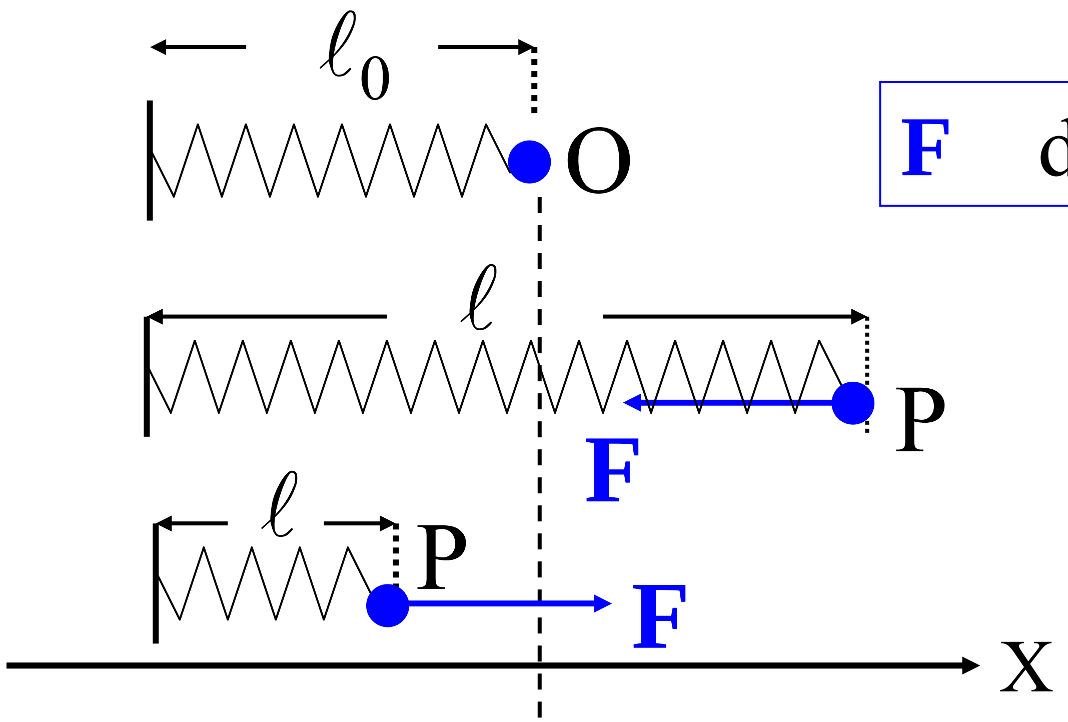
Forza Elastica

Forza applicata tramite una molla



F diretta sempre verso O

ℓ_0	lunghezza a riposo della molla
$\ell > \ell_0$	" della molla estesa
$\ell < \ell_0$	" della molla compressa

$x = \ell - \ell_0$ deformazione della molla

$\boxed{\mathbf{F} = -k\,x\,\mathbf{i}}$ forza elastica

$K > 0$ costante elastica della molla

Equazione del moto di un punto materiale di massa m, fissato alla molla in P

$$-kx = ma \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Ponendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\boxed{x(t) = A \,\text{sen}\,(\omega t + \Phi_0)}$$

Il moto di P è armonico semplice

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \Phi_0)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ periodo

A ampiezza di oscillazione e Φ_0

si determinano dalle condizioni iniziali

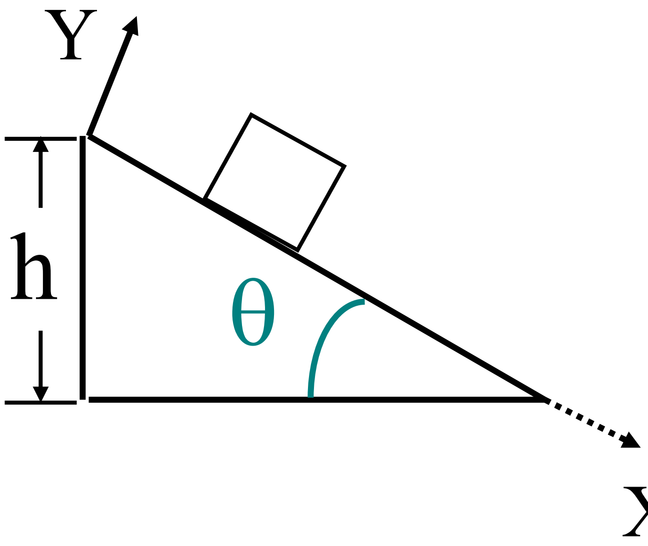
All'istante $t = t_0 = 0$ $x = x_0$, $v = v_0$

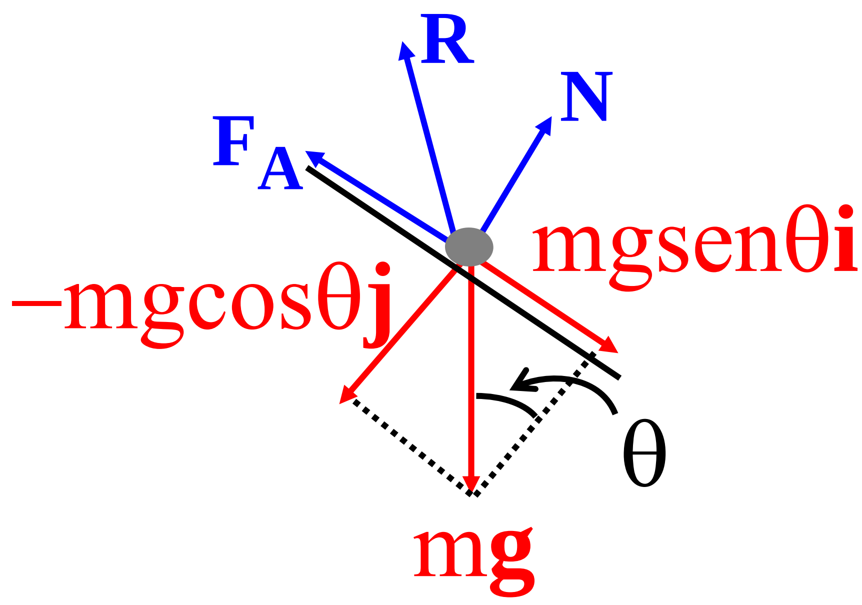
$x_0 = A \operatorname{sen} \Phi_0$ $v_0 = A\, \omega \cos \Phi_0$

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = \omega \frac{x_0}{v_0}$$

$$A = \frac{x_0}{\operatorname{sen} \Phi_0} = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}}$$

MOTO LUNGO UN PIANO INCLINATO





Equazione del moto di m

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}}$$

$$a_X = a \qquad a_Y = 0$$

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_A = ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ F_A = \mu_D\, mg\cos\theta \\ mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu_D\, mg\cos\theta = ma \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$a = g\,(\mathrm{sen}\,\theta - \mu_D \cos\theta\,)$ costante:
moto rettilineo uniformemente accelerato

Leggi del moto di un corpo lasciato cadere dalla sommità del piano

Condizioni iniziali:
a $t = t_0 = 0$ $x = x_0 = 0$, $v = v_0 = 0$

$$v = a\,t = g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_D \cos\theta)\;\; t$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g(\text{sen}\theta - \mu_D \cos\theta) t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \qquad v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_D \cos\theta)x}$$

Alla fine del piano inclinato $\quad x = \dfrac{h}{\text{sen}\,\theta}$

$$v = \sqrt{2g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_D \cos\theta)\frac{h}{\text{sen}\theta}}$$

Se il piano è liscio

$$\mu_D = 0 \qquad a = \; g\;\text{sen}\;\theta$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh} \quad \text{alla fine del piano inclinato}}$$

FORZE CENTRIPETE

Moto piano **curvilineo**:

F risultante delle forze agenti sul punto materiale

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_T + m\,\mathbf{a}_N = m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + m\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N =$$

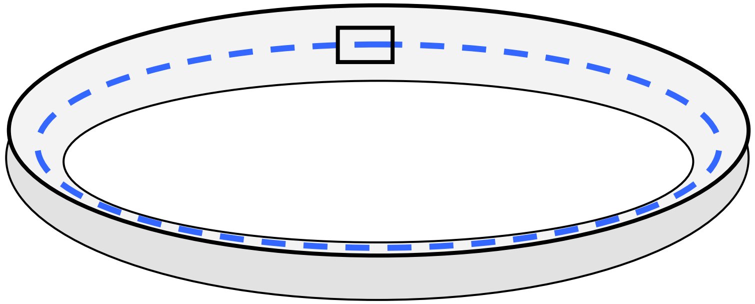
$$= \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_N$$

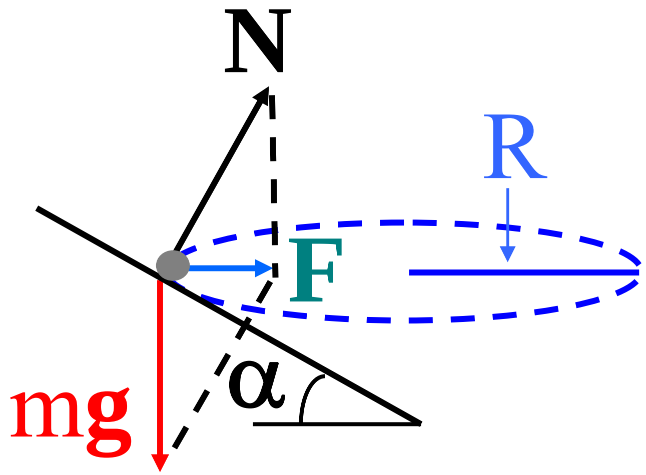
$$F_N = m\frac{v^2}{R}$$ **forza centripeta**

componente di **F** normale alla traiettoria

Esempi

Moto di un punto lanciato con velocità **v** lungo una curva sopraelevata





Forze agenti: **mg**, **N**

Perché il punto si muova di moto circolare uniforme in un piano orizzontale, la risultante delle forze

F = **mg** + **N** deve essere ⊥ alla traiettoria

$$\boxed{F = F_N = N\text{sen}\alpha = m\frac{v^2}{R}}$$

componente di **N** sul piano orizzontale

Per l' equilibrio in direzione verticale deve essere:

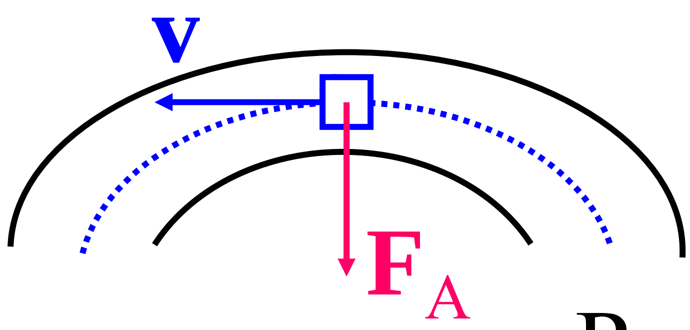
$$\boxed{F_{vert} = 0}$$

$$mg = N\cos\alpha$$

$$\frac{N\text{sen}\alpha}{N\cos\alpha} = \frac{m\frac{v^2}{R}}{mg} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR}}$$

Curva su strada piana

Determinare la massima velocità con cui un'auto può percorrere una curva



R = raggio della curva

v tangente alla traiettoria

Forze agenti: forza peso, reazione vincolare **R**

N componente di **R** $\perp$ al piano

F_A " " // "

Per l' equilibrio in direzione $\perp$: $N = mg$

$\boxed{F_A = \textbf{forza di attrito} \text{ fra pneumatici e suolo } = \textbf{forza centripeta}}$

$\mathbf{v} = 0$ in direzione radiale $\Rightarrow$

F_A forza di attrito statico

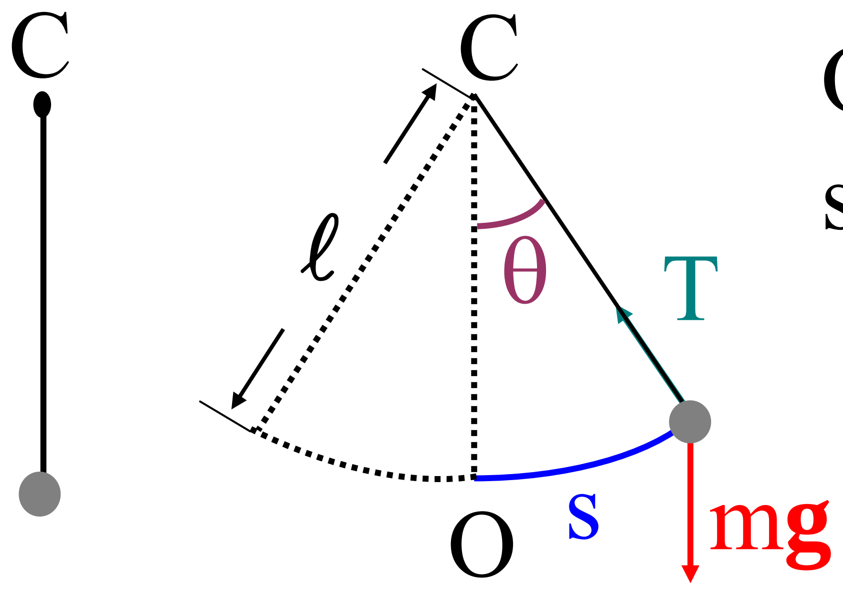
$$\boxed{F_A \leq F_{A\,MAX}}$$

$$F_A = m\frac{v^2}{R} \leq \mu_S m g$$

$$v^2 \leq \mu_S\, g\, R$$

$$\boxed{v_{MAX} = \sqrt{\mu_S g R}}$$

PENDOLO SEMPLICE



O posizione di equilibrio

$s = \ell\,\theta$

Equazioni del moto

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

$$-\,mg\,\mathrm{sen}\theta = ma_T$$
$$T - mg\cos\theta = ma_N$$

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell}$$

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$-g\,\mathrm{sen}\,\theta = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Per piccoli valori di θ $\mathrm{sen}\,\theta \cong \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

Ponendo $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi_0)$$

$$s(t) = \ell\, \theta_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi_0)$$

$A = \ell\, \theta_0$ **ampiezza dell'oscillazione**

$$v(t) = A\, \omega \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$ periodo

T per piccole oscillazioni
non dipende da A (**isocronismo**);
non dipende dalla **massa** del pendolo