CAMPO GRAVITAZIONALE:
esempio di campo di forza centrale

Moto dei corpi celesti

Sistema tolemaico o geocentrico:
sole, luna e pianeti si muovono su epicicli

Sistema copernicano o eliocentrico:
descrizione cinematica più semplice considerando il sole come origine del sistema di riferimento

Keplero, analizzando i dati relativi alle osservazioni di un astronomo danese, formula le tre leggi:

1) le orbite dei pianeti sono ellissi
di cui il sole occupa uno dei fuochi

2) la velocità areolare per ciascun pianeta è costante

3) i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti
sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori
delle orbite

L’ interpretazione dinamica a queste leggi viene data da Newton, partendo dalle seguenti ipotesi:

1) al moto dei corpi celesti si applicano le leggi della dinamica già note

2) ciascun pianeta si muove sotto l’azione di una forza attrattiva esercitata dal sole proporzionale alla massa del pianeta e inversamente proporzionale al quadrato della distanza sole – pianeta.

É contenuto in tale ipotesi il presupposto di una legge universale:

m_1 ed m_2 masse puntiformi qualsiasi:
tra le due masse agisce una forza attrattiva diretta lungo la loro congiungente, proporzionale alle masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

legge di gravitazione universale

Deriviamola dalle leggi di keplero

Orbita piana

direzione di $\mathbf{L}$ costante

Velocità areolare costante

$|\mathbf{L}| =$ costante

$\mathbf{L} =$ costante

$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}$ forza centrale

Assumendo l' orbita circolare

$$F = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

Per la terza legge $T^2 = kr^3$

$$F = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

Sistema terra – sole

$$F = \frac{4\pi^2}{k_T}\frac{M_T}{r^2}$$ forza esercitata sulla terra dal sole

$$F' = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{M_S}{r^2}$$ forza esercitata sul sole dalla terra

Per il III principio della dinamica:

$$F = F' \quad \Rightarrow \quad M_T k_S = M_S k_T$$

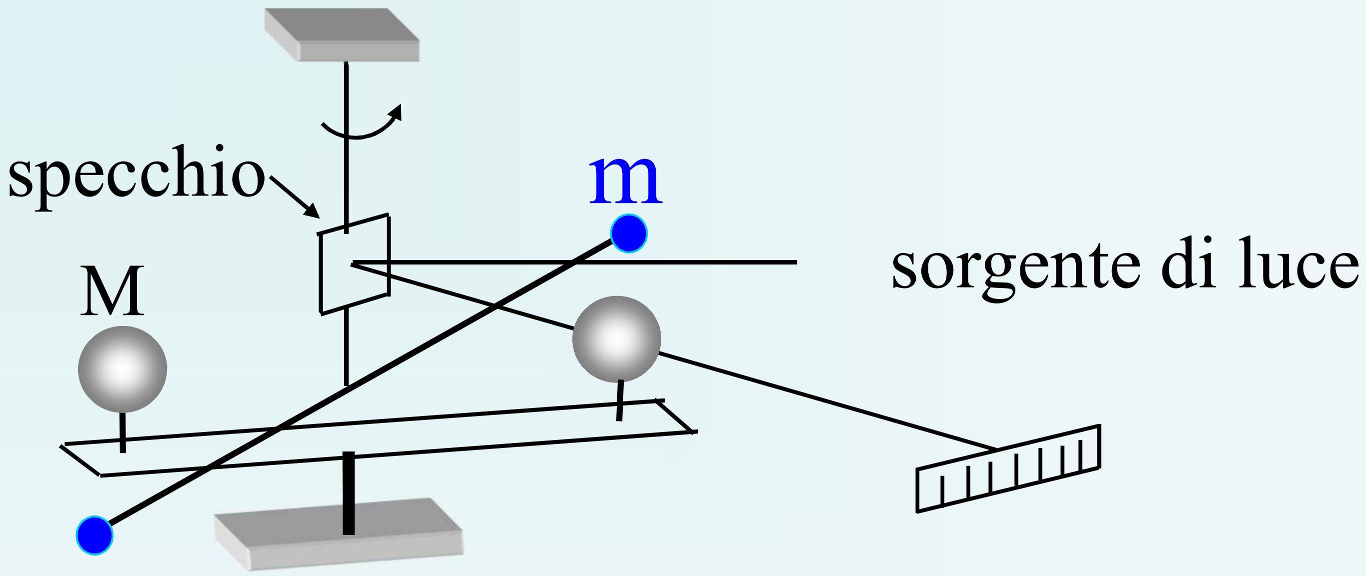
Ponendo $$\gamma = \frac{4\pi^2}{M_T k_S} = \frac{4\pi^2}{M_S k_T}$$

$$\boxed{F = F' = \gamma \frac{M_T M_S}{r^2}}$$

m_1, m_2 **masse gravitazionali,**
proprietà intrinseche dei corpi
responsabili della forza gravitazionale

γ costante universale

Determinazione di γ: bilancia di torsione di Cavendish



$$\boxed{\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m^2/Kg^2}}$$

Calcolo della massa della terra

$$mg = \frac{\gamma m M_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad M_T = 5.98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{Kg}$$

Diversi esperimenti hanno permesso di verificare che masse gravitazionali e masse inerziali sono proporzionali

Ponendo la costante di proporzionalità uguale ad 1 esse coincidono numericamente

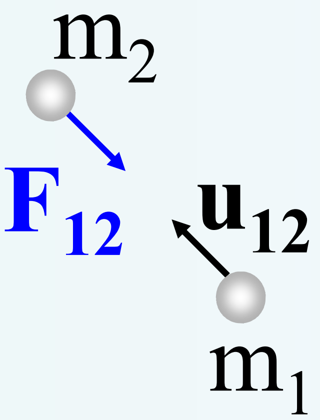
Proprietà dell' interazione gravitazionale:

non è influenzata dalla presenza di altra materia

è indipendente dalla natura chimica e fisica dei corpi, dipende solo dalla massa

Energia potenziale della forza gravitazionale

$\mathbf{F_{12}}$ forza esercitata da m_1 su m_2



$\mathbf{u_{12}}$ versore della direzione che va da m_1 ad m_2

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{12} \qquad F_{12}(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{12} \bullet d\,\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B} F_{12}(r)\,dr =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}\,dr = -\gamma m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} =$$

$$= \gamma m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] = E_{PA} - E_{PB}$$

Energia potenziale in un punto a distanza r:

assumiamo $E_P\ (r = \infty) = 0$

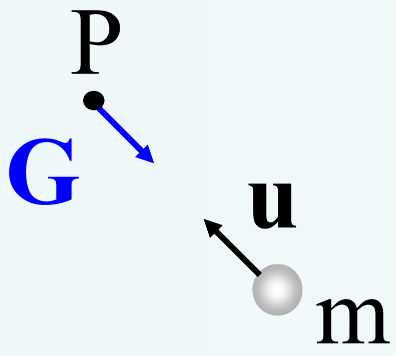
$$E_P(r) = \int_r^{\infty} F(r)\ dr = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$$

CAMPO GRAVITAZIONALE

m_0, massa posta in P, interagisce con m

u versore della direzione che congiunge m con P

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m m_0}{r^2} \mathbf{u}$$ forza esercitata da m su m_0



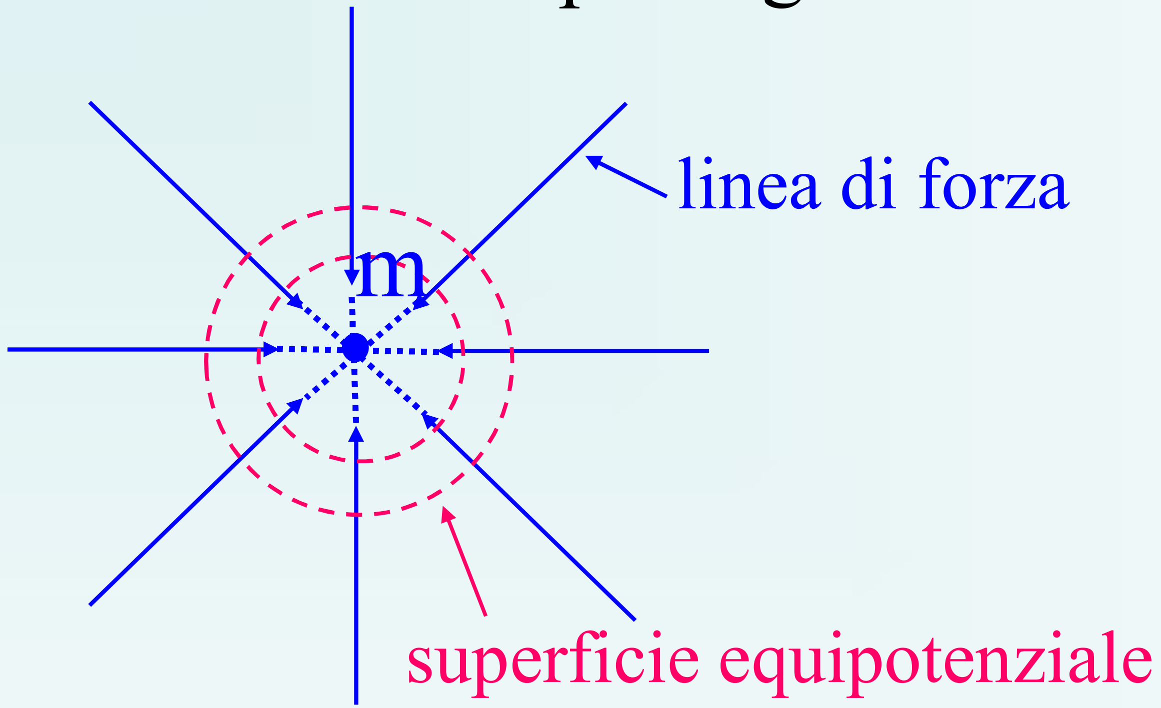
$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}$$

G campo **gravitazionale**

generato da m in un punto P a distanza r =

forza esercitata da m su una massa unitaria m sorgente del campo

Linee di forza del campo **G** generato da m



$$E_P(r) = -\gamma \frac{mm_0}{r}$$

Superfici equipotenziali ≡ superfici sferiche di raggio r

Campo gravitazionale generato in un punto P da n masse puntiformi m_i

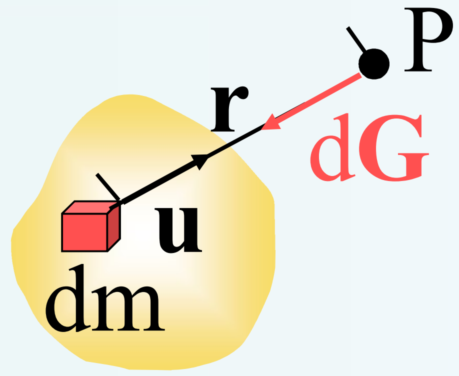
$$\mathbf{G_i} = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u_i}$$

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{G_i} = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u_i}$$

Campo gravitazionale generato da distribuzioni continue

Distribuzioni continue di massa ⇔ numero molto grande di masse elementari dm distribuite in regioni dello spazio, le cui dimensioni non consentono l'approssimazione di massa puntiforme

d$\mathbf{G}$ campo prodotto da dm in P



$$d\,\mathbf{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{G} = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2}\mathbf{u}$$

Massa distribuita in un volume

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$ densità volumetrica di massa

$$\mathbf{G} = \int_C -\gamma \frac{\rho dV}{r^2}\mathbf{u}$$