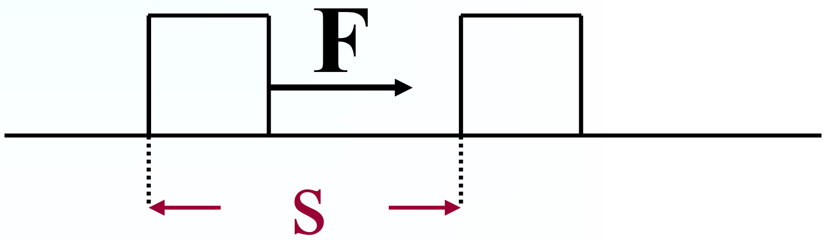
LAVORO ED ENERGIA

Esigenza di mettere in relazione forze applicate e spostamenti del punto materiale

definizione di **lavoro**

F forza **costante**

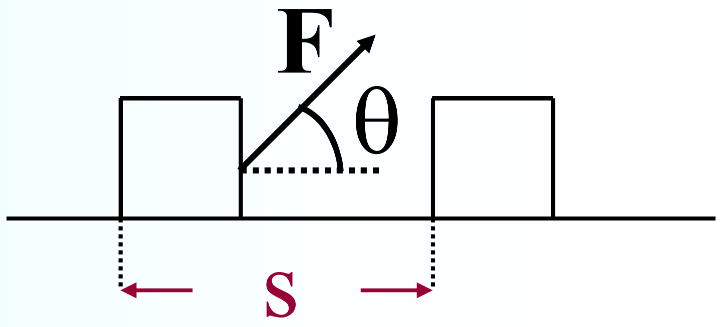
applicata ad un punto materiale che si sposta nella stessa direzione in cui agisce la forza



$W = F \cdot s$ lavoro compiuto da **F**

F forza costante non agisce nella direzione del moto

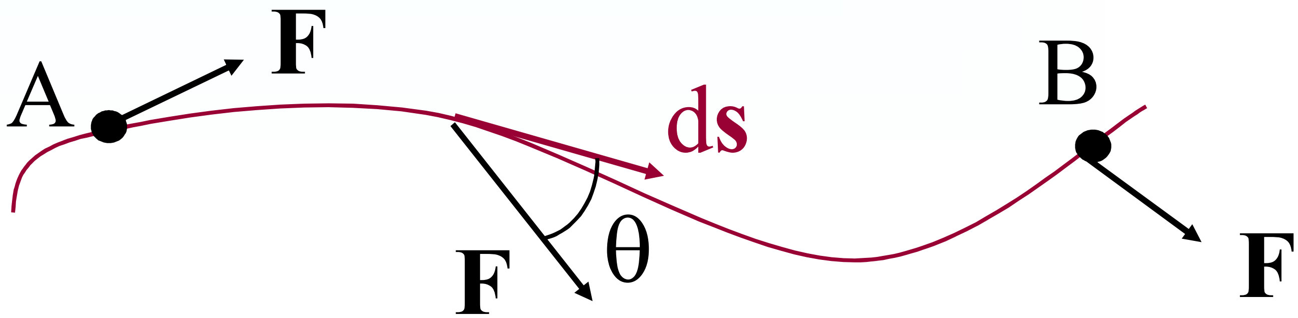
$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} = F \cdot s \cos\theta$$ lavoro compiuto da **F**



W grandezza scalare

Unità di misura: Joule $\quad 1\ J = 1\ N \cdot 1 m$

Lavoro di una forza variabile
per spostare un punto materiale
da una posizione A ad una posizione B



Si suddivide il percorso in spostamenti infinitesimi **ds** ∋’ **F** possa considerarsi approssimativamente costante lungo ds

$$dW = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = F\, ds \cos\theta$$

lavoro infinitesimo relativo allo spostamento d**s**

$$W = \int_{A\gamma}^{B} dW = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \bullet d\,\mathbf{s} = \int_{A\gamma}^{B} F ds \cos\theta =$$

$$= \int_{A\gamma}^{B} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$$

W in generale dipende dalla traiettoria γ
e non solo da A e B

Se sul punto agiscono $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} \qquad \text{risultante}$$

$$W = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F_1} \bullet d\mathbf{s} + \int_{A\gamma}^{B} \mathbf{F_2} \bullet d\mathbf{s}$$

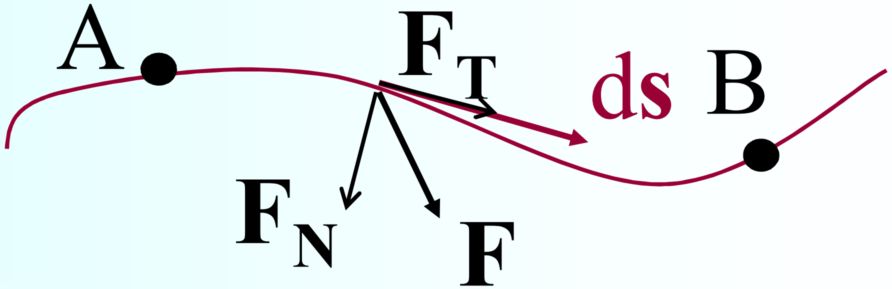
Potenza sviluppata da $\mathbf{F}$: $\quad P = \dfrac{dW}{dt} = \mathbf{F} \bullet \dfrac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{v}$

Potenza = lavoro per unità di tempo
Unità di misura: Watt $\quad$ 1W = 1J / 1s

ENERGIA CINETICA

Energia legata al moto del punto materiale

Moto curvilineo



F forza agente su m per spostarlo da A a B

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_T} + \mathbf{F_N}$$

$$\boxed{dW = \mathbf{F} \bullet \mathbf{ds} = \mathbf{F_T} \bullet \mathbf{ds} + \mathbf{F_N} \bullet \mathbf{ds}}$$

$\mathbf{F_N} \perp \mathbf{ds}$

$$\boxed{\mathbf{F_N} \bullet \mathbf{ds} = 0}$$

$\mathbf{F_T} \,//\, \mathbf{ds}$

$$\boxed{\mathbf{F_T} \bullet \mathbf{ds} = F_T\, ds}$$

$$dW = F_T ds = m a_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = m dv\frac{ds}{dt} = m v dv$$

$$W = \int_A^B dW = \int_{v_A}^{v_B} m v dv = \frac{1}{2}m v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2 = E_{KB} - E_{KA}$$

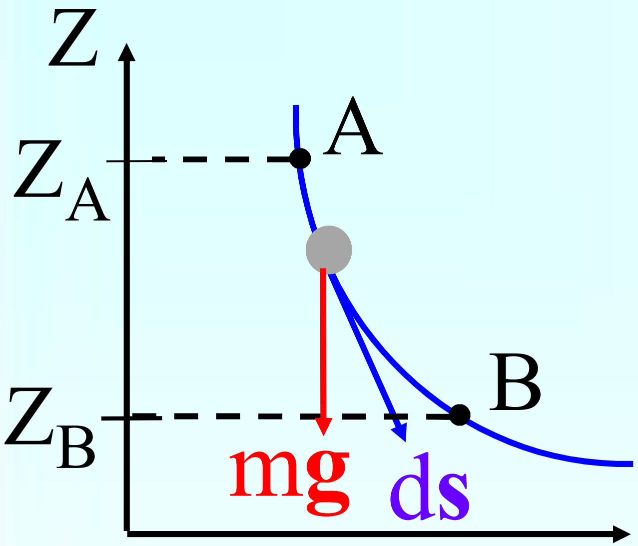
TEOREMA DELLE FORZE VIVE

valido $\forall$ **F** agente su m

$$E_K = \frac{1}{2}m v^2$$

energia cinetica posseduta da m, in quanto dotato di velocità

LAVORO DELLA FORZA PESO



$$dW = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \bullet d\mathbf{s}$$

$$\boxed{W =} \int_A^B m\mathbf{g} \bullet d\mathbf{s} = -\int_A^B mg\,\mathbf{k} \bullet d\mathbf{s} =$$

$$= -\int_{Z_A}^{Z_B} mg\,dz = -mg(z_B - z_A)$$

$$= mg\,(\,z_A - z_B) = \boxed{E_P(A) - E_P(B)}$$

avendo definito $\boxed{E_P(z) = mgz}$

funzione della coordinata z del punto

(si assume $E_P = 0$ in $z = 0$)

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA

$$\mathbf{F} = -\,kx\,\mathbf{i}$$

$$dW = -\,kx\,\mathbf{i} \bullet d\mathbf{s} = -\,k\,x\,dx$$

$$\boxed{W =} -\int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B} =$$

$$= \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = \boxed{E_P(A) - E_P(B)}$$

avendo definito $\boxed{E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

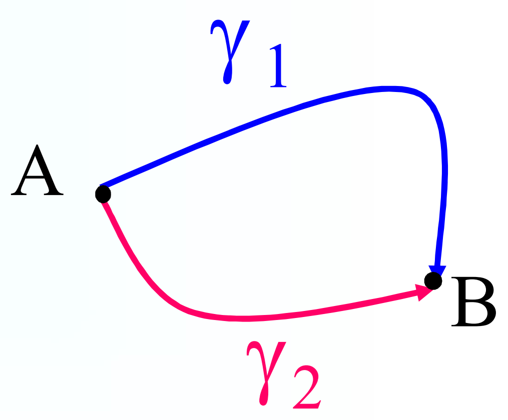
(si assume $E_P = 0$ in $x = 0$)

CAMPI DI FORZA CONSERVATIVI

Una regione dello spazio è sede di un **campo di forza** se in ogni punto della regione un elemento di prova (punto materiale, carica elettrica,….) risente l'azione di una forza

F forza del campo agente su un punto materiale

γ_1, γ_2 traiettorie da A a B



F conservativa

⇕

$$W_{AB} = \int_{A\gamma_1}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{A\gamma_2}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{A}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$$

W_{AB} **indipendente dal percorso**,
dipende solo da A e B

si può definire E_P energia potenziale,
funzione delle coordinate di un punto э'

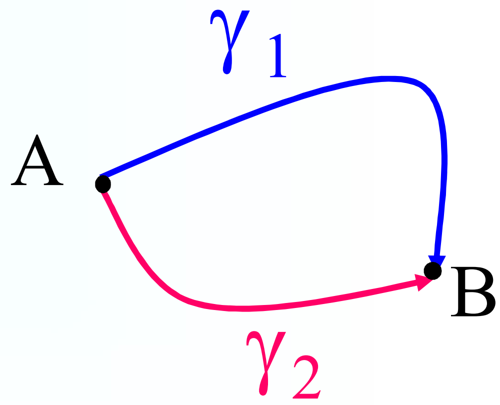
$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = E_P(A) - E_P(B)$$

$$W_{BA} = E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}$$

Lavoro lungo una traiettoria chiusa γ

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{A\gamma_1}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} + \int_{B\gamma_2}^{A} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} =$$

$$= \int_{A\gamma_1}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} - \int_{A\gamma_2}^{B} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = 0$$



$$\boxed{\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = 0}$$

Teorema di conservazione dell' energia meccanica

F conservativa

$$\boxed{W_{AB} = E_P(A) - E_P(B)}$$

Per il teorema delle forze vive

$$\boxed{W_{AB} = E_K(B) - E_K(A)}$$

$$E_P(A) - E_P(B) = E_K(B) - E_K(A)$$

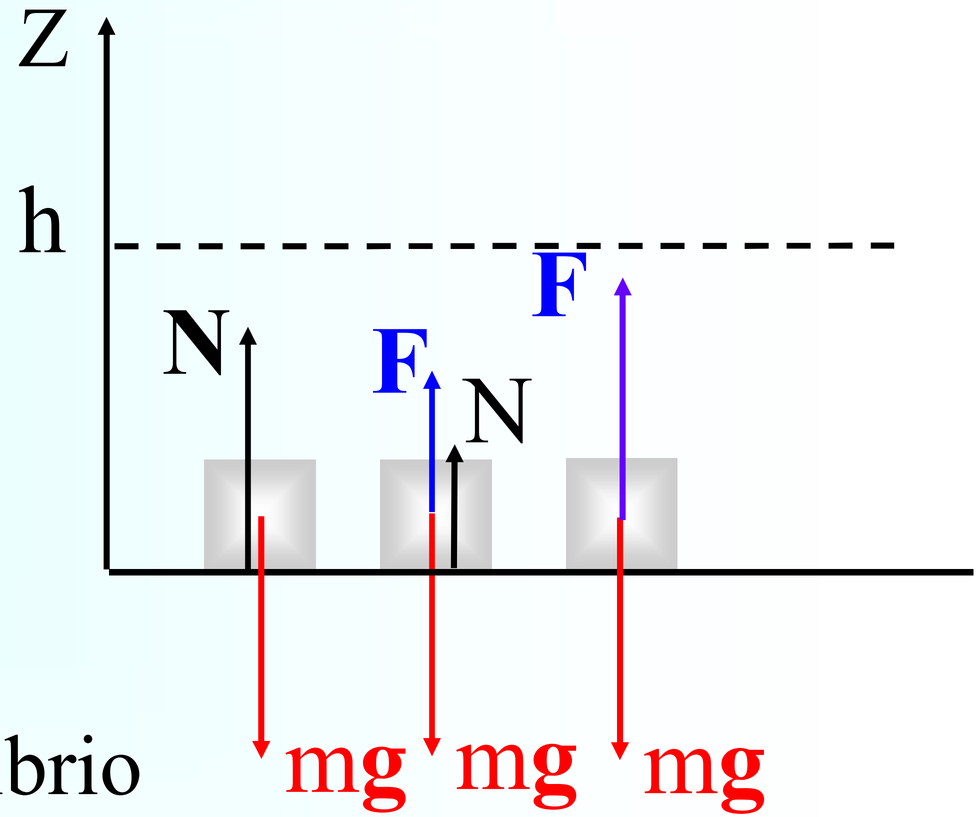
$$E_P(A) + E_K(A) = E_P(B) + E_K(B)$$

$E_K + E_P = E$ energia meccanica

è costante durante il moto

in un campo di forze conservativo

ESEMPIO



a) il corpo è in equilibrio

b) si applica **F** per sollevare il corpo

c) il corpo viene portato all’ altezza h

d) **F** viene eliminata e il corpo cade in a) $v = 0$

in b) $\mathbf{F}$ viene aumentata mentre diminuisce $\mathbf{N}$

in c) $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$, il corpo è fermo $\Rightarrow$ $v = 0$

$$E_{KF} - E_{KI} = 0 \Rightarrow W_{TOT} = 0 \Rightarrow W_F + W_{peso} = 0$$

$$W_{peso} = -mgh = -W_F$$

in d) il corpo cade

velocità di impatto col suolo: $v = \sqrt{2gh}$

energia cinetica all' istante dell' impatto :

$$E_K = \frac{1}{2} mv^2 = mgh$$

mgh pari a W_F, lavoro compiuto da **F** per sollevare il corpo ad altezza h

W_F immagazzinato nel corpo
sotto forma di energia potenziale

$$E_P = mgh$$

energia posseduta dal corpo
in virtù della sua posizione
nel campo di forze conservativo

Si assume come riferimento il piano orizzontale ($z = 0$), al quale si assegna arbitrariamente il valore
$E_P = 0$

LAVORO DI UNA FORZA DI ATTRITO RADENTE

$\mathbf{F}_A = -\mu_D N \mathbf{u}_V$ agente su un punto materiale che si sposta da A a B

$\mathbf{u}_V$ versore della direzione della velocità

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_A \bullet d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_D N \mathbf{u}_v \bullet d\mathbf{s} = -\mu_D N \int_A^B ds$$

$\int_A^B ds$ = lunghezza dell'arco di traiettoria

W_{AB} dipende dal percorso seguito

$\mathbf{F}_A$ forza dissipativa

Se su un punto materiale agiscono forze conservative e dissipative

$$E_{KB} - E_{KA} = W_{CONS} + W_{DISS}$$

teorema delle forze vive

$$W_{CONS} = E_{PA} - E_{PB}$$

$$E_{KB} - E_{KA} = E_{PA} - E_{PB} + W_{DISS}$$

$$W_{DISS} = (E_{KB} + E_{PB}) - (E_{KA} + E_{PA}) = \Delta E$$