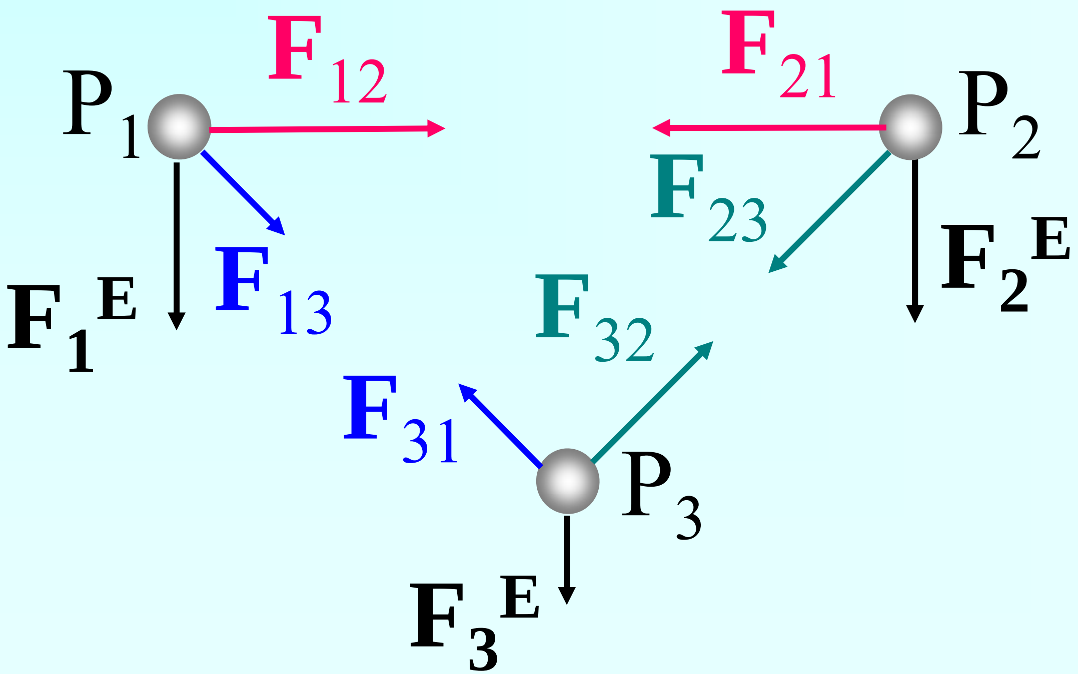
DINAMICA DEI SISTEMI

Sistema costituito da N punti materiali $P_1, P_2, \ldots, P_N$

$\mathbf{F}_i^E$ risultante delle forze esterne agenti su P_i

$\mathbf{F}_{ij}$ forza esercitata sul generico punto P_i del sistema da P_j: forza interna al sistema

$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$
forza esercitata su P_j da P_i



$$\mathbf{F}_i^I = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \mathbf{F}_{ij}$$

risultante delle forze interne agenti su P_i dovute all'interazione con gli altri N–1 punti

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^I$$

risultante di tutte le forze (interne ed esterne) agenti su P_i

Legge di Newton applicata al moto di P_i:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^I = m_i \mathbf{a}_i \qquad i = 1, N$$

Sommando le N equazioni, si ha

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\,E} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\,I} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i}$$

$$\boxed{\mathbf{R}^{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\,I}}$$

risultante di tutte le forze interne agenti sul sistema

$$\boxed{\mathbf{R}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\,E}}$$

risultante di tutte le forze esterne agenti sul sistema

Essendo le forze interne a due a due uguali ed opposte $\boxed{\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}}$

$$\boxed{\mathbf{R}^{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{I} = 0}$$

$$\boxed{\mathbf{R}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{a}_i} \qquad (*)$$

$$\boxed{\mathbf{R}^{E}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\,\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{v}_i = \boxed{\frac{d\,\mathbf{P}}{dt}}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{v}_i}$$

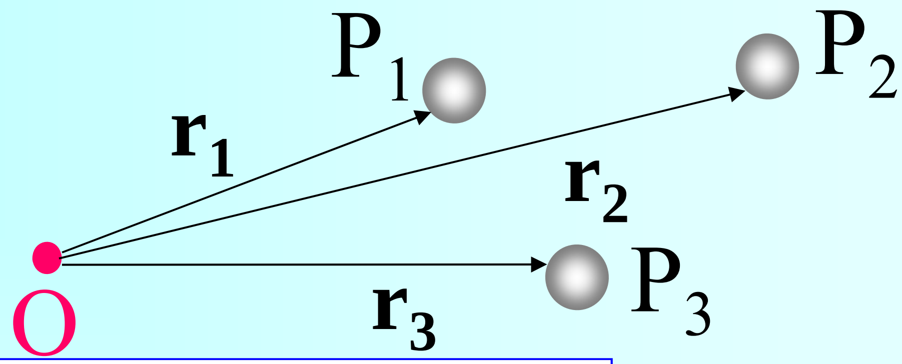
quantità di moto totale del sistema

CENTRO DI MASSA

Sistema costituito da N punti materiali

$P_1, P_2, \ldots, P_N$

O **origine**



Definizione di

centro di massa

di un sistema di punti materiali:

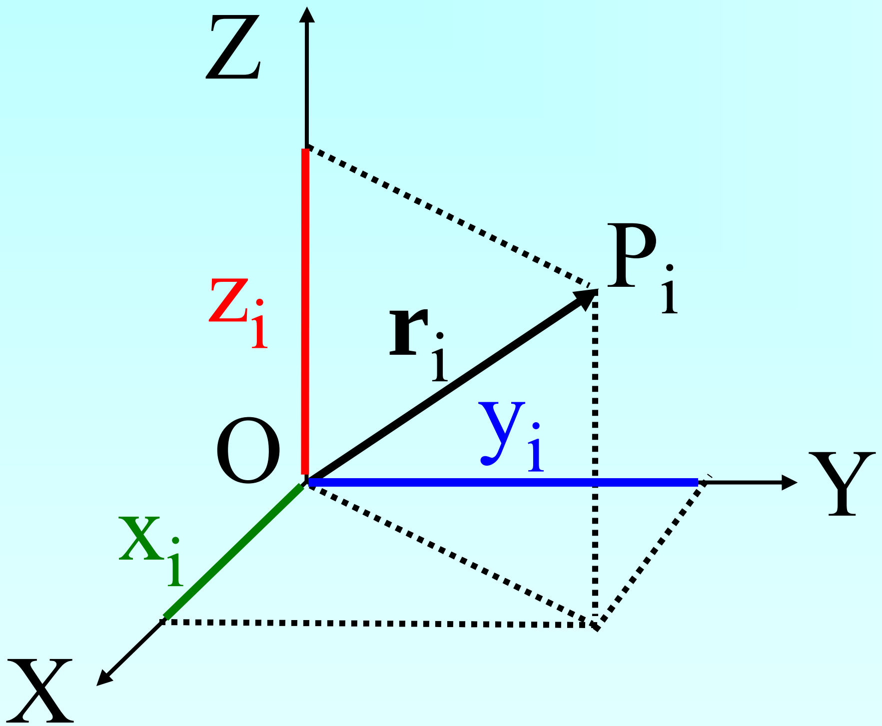
punto geometrico

la cui posizione è individuata

dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \, \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Coordinate del centro di massa in un sistema di assi cartesiani



$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Derivando rispetto al tempo $\mathbf{r}_{CM}$:

$$\boxed{\mathbf{v}_{CM}} = \frac{d\,\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\,\mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\,\frac{d\,\mathbf{r}_i}{dt} =$$

$$= \frac{\sum_i m_i\,\mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}$$ velocità del CM

$$m = \sum_i m_i$$ massa totale del sistema

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{v}_i$$

Derivando rispetto al tempo $\mathbf{v}_{CM}$:

$$\boxed{\mathbf{a}_{CM}} = \frac{d\,\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\,\mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\,\frac{d\,\mathbf{v}_i}{dt} =$$

$$= \frac{\sum_i m_i\,\mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} \boxed{= \frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{a}_i \qquad \text{accelerazione del CM}}$$

La (*) si può quindi riscrivere

$$\boxed{\mathbf{R}^E = m\,\mathbf{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(m\,\mathbf{v}_{CM}\right)}$$

Teorema del moto del centro di massa

In un sistema **isolato**

$\mathbf{R}^E = 0$

$\Updownarrow$

$\mathbf{a}_{CM} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}_{CM} = \text{costante}$

Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme

P quantità di moto totale del sistema si conserva

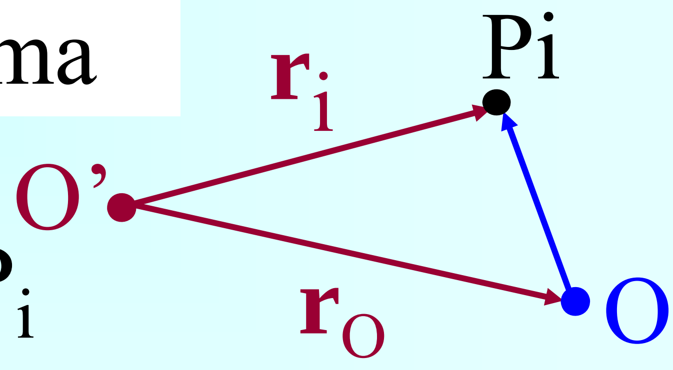
MOMENTO ANGOLARE
DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

O' origine di un sistema inerziale

O polo mobile

$\mathbf{v}_O$ velocità di O rispetto ad O'

P_i punto generico del sistema



$\mathbf{r}_i$ vettore posizione di P_i

$\mathbf{r}_O$ vettore posizione di O

$$\boxed{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_O + \mathbf{OP}_i}$$

Deriviamo rispetto al tempo

$$\boxed{\frac{d\,\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d\,\mathbf{r}_O}{dt}} + \frac{d\,\mathbf{OP}_i}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O} + \frac{d\,\mathbf{OP}_i}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\,\mathbf{OP}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O}$$ velocità di Pi relativa a O

$$\boxed{\mathbf{L}_i = \mathbf{OP}_i \times m_i\,\mathbf{v}_i}$$

momento angolare di Pi rispetto al polo O

Calcoliamo

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\left(\mathbf{OP}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i\right)}{dt} =}$$

$$= \frac{d\,\mathbf{OP}_i}{dt} \times m_i\, \mathbf{v}_i + \mathbf{OP}_i \times \frac{d}{dt}\left(m_i\, \mathbf{v}_i\right)$$

$$= \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O\right) \times m_i\, \mathbf{v}_i + \mathbf{OP}_i \times m_i\, \mathbf{a}_i$$

Essendo $\mathbf{v}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i = 0$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = -\mathbf{v}_O \times m_i\, \mathbf{v}_i + \mathbf{OP}_i \times m_i\, \mathbf{a}_i}$$

Per il sistema costituito da N punti materiali il momento angolare vale

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{OP}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} =$$

$$= -\sum_i \mathbf{v}_O \times m_i\, \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{OP}_i \times m_i\, \mathbf{a}_i =$$

$$= -\mathbf{v}_O \times \sum_i m_i\, \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{OP}_i \times \left(\mathbf{F}_i{}^E + \mathbf{F}_i{}^I\right)$$

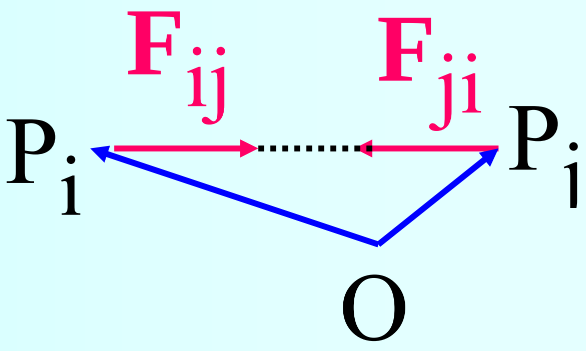
$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = -\mathbf{v}_O \times m\,\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i^E + \sum_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i^I =$$

$$\boxed{= -\mathbf{v}_O \times m\,\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^E + \mathbf{M}^I}$$

Verifichiamo che $\mathbf{M}^I = 0$

P_i, P_j punti materiali

O polo



$$\boxed{\mathbf{M}_{ij}^I} = \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{OP}_J \times \mathbf{F}_{ji} =$$

$$= \boxed{\left(\mathbf{OP}_J - \mathbf{OP}_i\right) \times \mathbf{F}_{ji} = P_iP_j \times \mathbf{F}_{ji} = 0}$$

$\mathbf{M}^I$ somma dei momenti $\mathbf{M}_{ij}{}^I$
relativi a tutte le possibili coppie P_i P_j

$$\boxed{\mathbf{M}^I = 0 \quad \forall \text{ polo } O}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^E - \mathbf{v}_O \times m\,\mathbf{v}_{CM}}$$

Se

$$\mathbf{v}_O \times m\,\mathbf{v}_{CM} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^E}$$

$\mathbf{v}_O \times m\,\mathbf{v}_{CM} = 0$ se:

1) $\mathbf{v}_O = 0 \Leftrightarrow O$ polo fisso

2) $\mathbf{v}_{CM} = 0$

3) $O \equiv CM \Leftrightarrow \mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{CM}$

4) $\mathbf{v}_O \,//\, \mathbf{v}_{CM}$

Sistema di riferimento del centro di massa

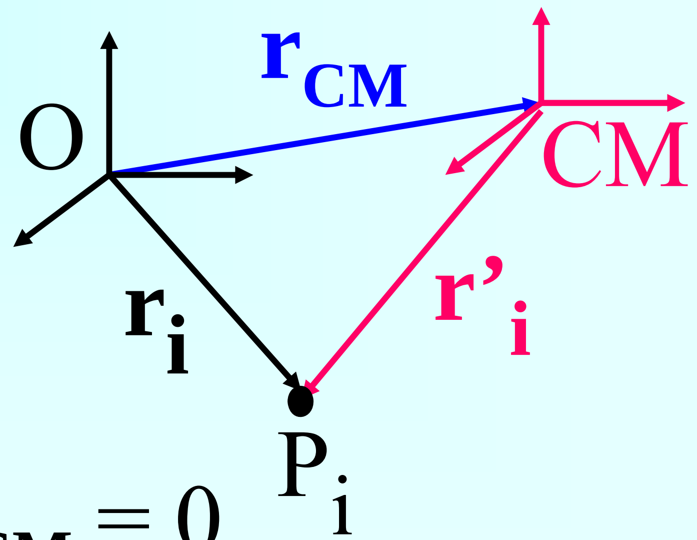
1) origine coincidente con CM

2) assi paralleli agli assi del sistema inerziale

3) sistema non inerziale se $\mathbf{R}^E \neq 0$ (moto traslatorio accelerato)

$$\boxed{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r'}_i}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i}$$



$\mathbf{r'}_{CM} = 0, \quad \mathbf{v'}_{CM} = 0, \quad \mathbf{a'}_{CM} = 0$

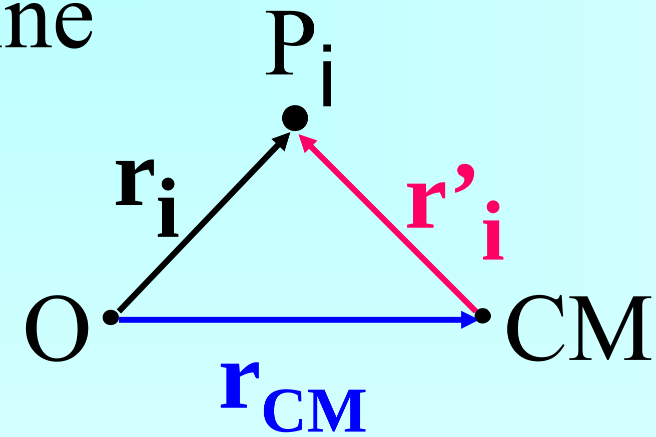
$$\sum_{\mathbf{i}} m_i \mathbf{r}'_{\mathbf{i}} = m\mathbf{r}'_{\mathbf{CM}} = 0$$

$$\sum_{\mathbf{i}} m_i \mathbf{v}'_{\mathbf{i}} = m\mathbf{v}'_{\mathbf{CM}} = 0$$

$$\sum_{\mathbf{i}} m_i \mathbf{a}'_{\mathbf{i}} = m\mathbf{a}'_{\mathbf{CM}} = 0$$

TEOREMA DI KÖNIG PER L' ENERGIA CINETICA

O origine



$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r'}_i$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v'}_i + \mathbf{v}_{CM}) \bullet (\mathbf{v'}_i + \mathbf{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v'}_i \bullet \mathbf{v}_{CM}$$

$$\Sigma_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i = E'_K$$

energia cinetica del sistema rispetto al CM

$$\Sigma_i \frac{1}{2} m_i v^2_{CM} = \frac{1}{2} (\Sigma_i m_i) v^2_{CM} = \frac{1}{2} m v^2_{CM} = E_{K,CM}$$

energia cinetica del CM

$$(\Sigma_i m_i \mathbf{v}'_i) \bullet \mathbf{v}_{CM} = 0$$

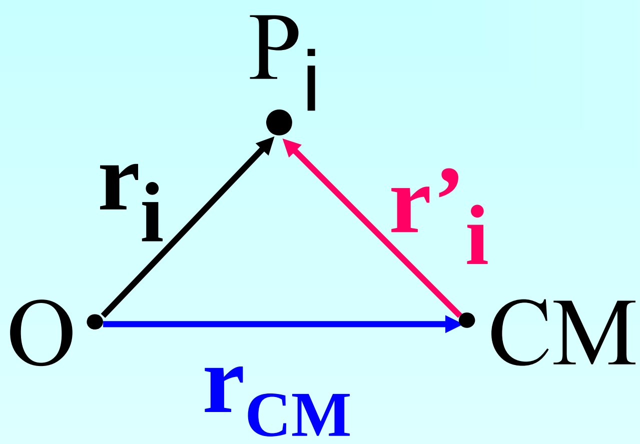
$$E_K = E'_K + E_{K,CM}$$

Teorema di König per l' energia cinetica

TEOREMA DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE

Assumiamo il polo O coincidente con l'origine del sistema inerziale

$$\boxed{\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i}$$



Ricordando che

$$\boxed{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r'}_i}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i}$$

$$\boxed{\mathbf{L}_i = (\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{CM})}$$

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \left(\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_{CM}\right) \times m_i \left(\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{CM}\right) =$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i\, \mathbf{v}_i' + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i\, \mathbf{v}_{CM} +$$

$$+ \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i\, \mathbf{v}_i' + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i\, \mathbf{v}_{CM}$$

Primo termine: $\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i\, \mathbf{v}_i'$

momento angolare del sistema rispetto al CM

Secondo termine:

$$\sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i\, \mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i\, \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_{CM} = 0$$

Terzo termine:

$$\boxed{\Sigma_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_i' =} \boxed{\mathbf{r}_{CM} \times \Sigma_i m_i \mathbf{v}_i' = 0}$$

Quarto termine:

$$\boxed{\Sigma_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} =} \boxed{\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}_{CM}}$$

momento angolare del CM

Quindi

$$\mathbf{L} = \mathbf{L'} + \mathbf{L}_{CM}$$

Teorema di König per il momento angolare

TEOREMA DELLE FORZE VIVE PER UN SISTEMA DI PUNTI

Lavoro compiuto da tutte le forze esterne ed interne agenti sul punto Pi del sistema per spostarlo da A a B

$$W_{iAB} = W_{iAB}^{E} + W_{iAB}^{I}$$

Per il teorema del lavoro e dell'energia cinetica

$$\boxed{W_{iAB} = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2}$$

Lavoro compiuto da tutte le forze esterne ed interne agenti sul sistema:

$$\boxed{W_{AB}} = \Sigma_i W_{iAB} = \Sigma_i W^E_{iAB} + \Sigma_i W^I_{iAB} =$$

$$= W^E_{AB} + W^I_{AB} = \Sigma_i \left(\frac{1}{2} m_i v^2_{iB} - \frac{1}{2} m_i v^2_{iA} \right) =$$

$$\boxed{= E_{KB} - E_{KA}}$$

$$W_{AB} = E_{KB} - E_{KA}$$

Teorema delle forze vive

$E_{KB} - E_{KA}$

variazione di energia cinetica del sistema

Se le forze agenti (esterne ed interne) sono conservative

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} = E_{KB} - E_{KA}$$

$$E = E_K + E_P$$

energia meccanica costante

Se le forze non sono tutte conservative

$$W_{DISS} = (E_{KB} + E_{PB}) - (E_{KA} + E_{PA}) =$$

$$= \Delta E$$

variazione di energia meccanica

Abbiamo visto che in generale

per definire lo stato di moto di un sistema informazioni di grande interesse sono fornite da

P quantità di moto totale del sistema

L momento angolare totale del sistema

Nel caso di sistemi **rigidi** vedremo che

lo stato di moto del sistema è **completamente definito** se sono noti **P** e **L**