DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

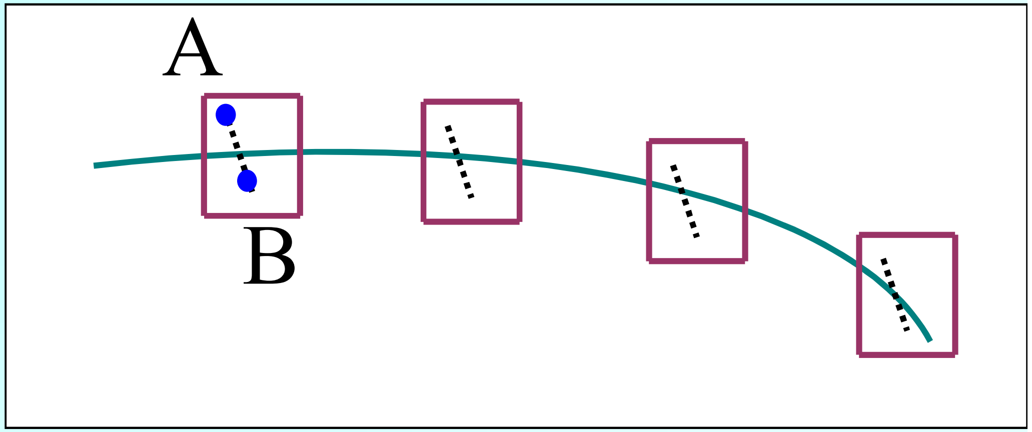
Corpo rigido (indeformabile):
le distanze tra due suoi punti qualsiasi rimangono invariate

Sistema a sei gradi di libertà

$$W_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_K = W_E$$

Moto traslatorio

Tutti i punti si muovono con la stessa velocità **v**



È sufficiente conoscere

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}}{\sum_i m_i} = \mathbf{v}$$

Quantità di moto totale $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}}$

Momento angolare rispetto a CM $\mathbf{L'} = 0$

Energia cinetica rispetto a CM $E'_K = 0$

Momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{CM}} = \mathbf{r}_{\mathbf{CM}} \times m\mathbf{v}_{\mathbf{CM}}$

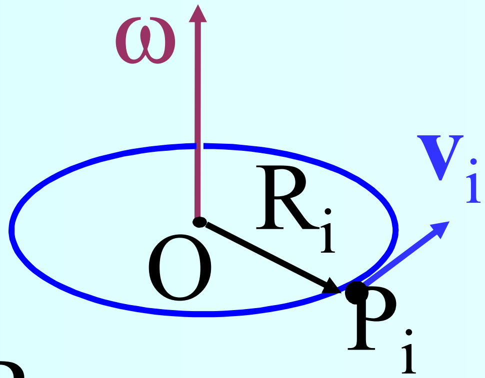
Energia cinetica $E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E_{K,CM}$

Equazione del moto:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{E}} = m\, \mathbf{a}_{\mathbf{CM}}$$

Moto di rotazione attorno ad un asse

Tutti i punti si muovono su traiettorie circolari, appartenenti a piani $\perp$ all' asse, **con la stessa velocità angolare ω**



In generale $\omega = \omega(t)$

$\mathbf{v_i} = \omega \times \mathbf{OP_i}$ $\quad$ $v_i = \omega \, OP_i = \omega \, R_i$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$a_{iN} = \omega^2 R_i \qquad a_{iT} = \alpha R_i$

Equazione del moto: $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

Sistemi di forze equivalenti

due sistemi di forze

vengono detti **equivalenti** se producono
lo stesso effetto sul moto di un corpo **rigido**

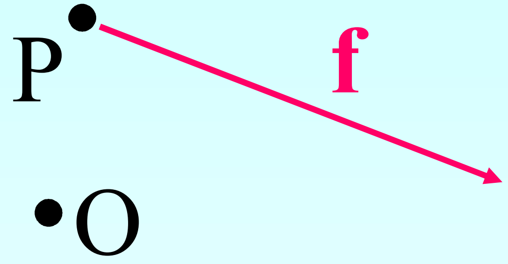
Condizione affinché questo si verifichi
è che abbiano

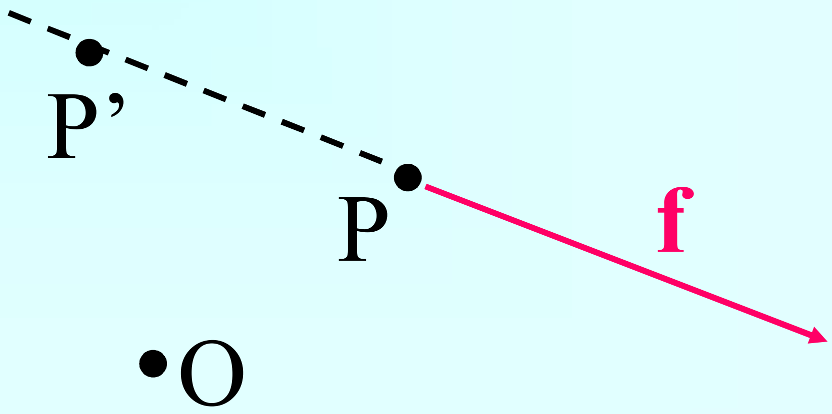
la stessa $\mathbf{R}^{E}$

lo stesso $\mathbf{M}$ rispetto a un polo O

Ad un sistema di forze

- si possono aggiungere due forze uguali e opposte applicate nello stesso punto senza alterare $\mathbf{R}^E$, $\mathbf{M}$
- si può spostare il punto di applicazione P di una forza $\mathbf{f}$ lungo la sua retta di azione senza alterare $\mathbf{R}^E$, $\mathbf{M}$

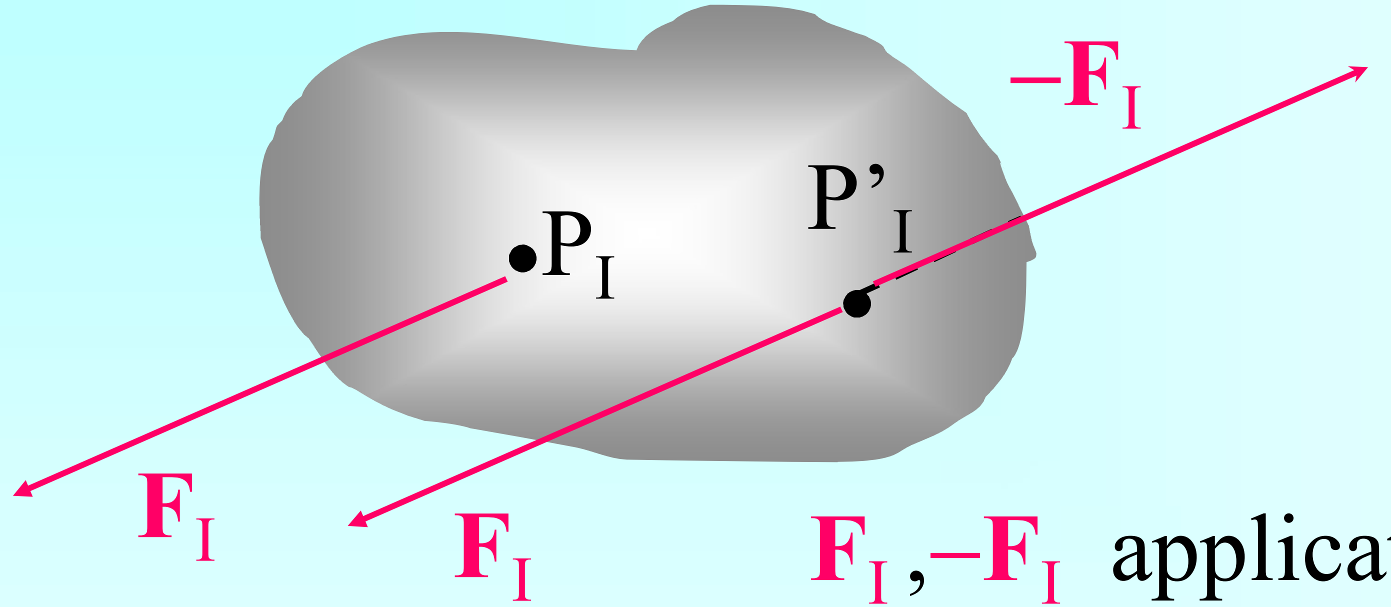




$$\mathbf{M} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M'} = \mathbf{OP'} \times \mathbf{f} = \left(\mathbf{OP} + \mathbf{PP'}\right) \times \mathbf{f} = \mathbf{OP} \times \mathbf{f} = \mathbf{M}$$

$\mathbf{F}_I$ forza applicata in un punto P_I di un corpo rigido può essere spostata in qualsiasi punto P'_I aggiungendo una conveniente coppia



$\mathbf{F}_I, -\mathbf{F}_I$ applicate in P'_I

$-\mathbf{F}_I$ si sposta lungo la sua retta d'azione

Le tre forze equivalgono a
$\mathbf{F}_I$ applicata in P'_I + una coppia

Si può ripetere l'operazione
per più forze applicate in punti diversi

ottenendo più forze (una **risultante**) applicate nello stesso punto e tante coppie che possono essere sommate, (un'unica **coppia**)

Un sistema di forze applicate a un corpo rigido è quindi sempre **equivalente** ad **una forza** applicata in un punto del corpo scelto a piacere e ad **una coppia**

Moto generale di un corpo rigido: **rototraslatorio**

Equazioni fondamentali del moto

$$\mathbf{R}^E = m\,\mathbf{a}_{CM}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

R^E risultante delle forze esterne

M momento risultante delle forze esterne

determinano il moto

indipendentemente dai valori delle singole forze e dai punti di applicazione

Si può verificare che:

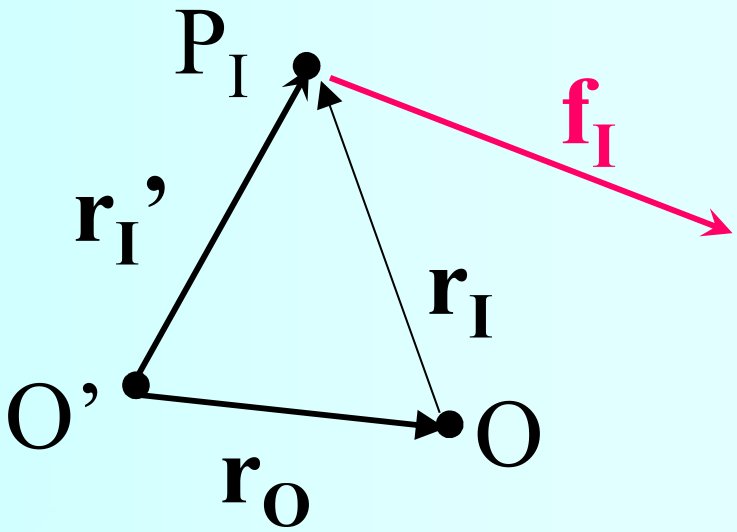
v velocità di traslazione dipende dalla scelta dell' asse di rotazione

ω velocità angolare è indipendente dall' asse

Proprietà dei sistemi di forze

O polo

O' polo



$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r_I} \times \mathbf{f_I}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum \mathbf{r_I}' \times \mathbf{f_I} = \sum (\mathbf{r_O} + \mathbf{r_I}) \times \mathbf{f_I} =$$

$$= \left(\sum \mathbf{r}_O \times \mathbf{f_I}\right) + \sum \mathbf{r_I} \times \mathbf{f_I} = \mathbf{r_O} \times \sum \mathbf{f}_I + \mathbf{M_O} =$$

$$= \mathbf{r_O} \times \mathbf{F} + \mathbf{M_O}$$

Se $\mathbf{F} = 0$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O$$

Sistema di forze parallele

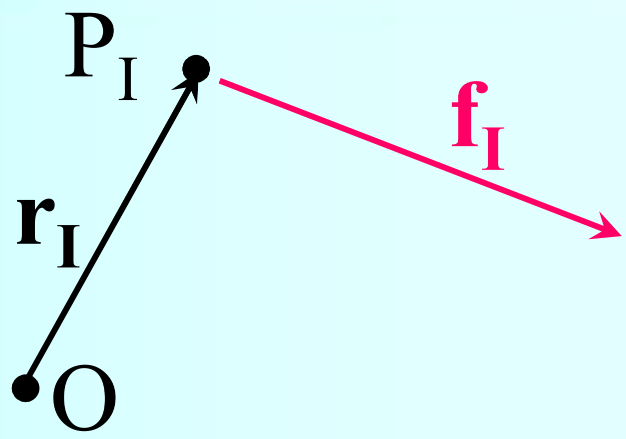
Un sistema di forze $\mathbf{f_I}$ fra loro parallele, applicate in punti diversi P_I,
è equivalente ad un'unica forza $\boxed{\mathbf{F} = \sum \mathbf{f_I}}$
applicata nel punto C,
definito dal vettore posizione

$$\boxed{\mathbf{r_C} = \frac{\sum \mathbf{r_I}\, f_I}{\sum f_I}}$$

O origine

C centro di forze parallele

u versore comune delle $\mathbf{f_I}$



$$\boxed{\mathbf{F} = \sum \mathbf{f_I} = \sum f_I\,\mathbf{u} = \left(\sum f_I\right)\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{M} = \boxed{\sum \mathbf{r_I} \times \mathbf{f_I}} = \sum \mathbf{r_I} \times f_I\,\mathbf{u} = \left(\sum \mathbf{r_I}\, f_I\right) \times \mathbf{u} =$$

$$= \mathbf{r}_C \sum f_I \times \mathbf{u} = \mathbf{r}_C \times \sum f_I\,\mathbf{u} = \boxed{\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}}$$

$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r_I} \times \mathbf{f_I}$ momento del sistema di forze

$\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$ momento di **F** applicata in C

sono uguali

Baricentro

Se $\mathbf{f}_{\mathbf{I}} = m_I \, \mathbf{g}$

forza peso del punto P_I di massa m_I

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}_{\mathbf{I}} = \sum m_I \, \mathbf{g} = \left(\sum m_I \right) \mathbf{g} = m \, \mathbf{g}$$

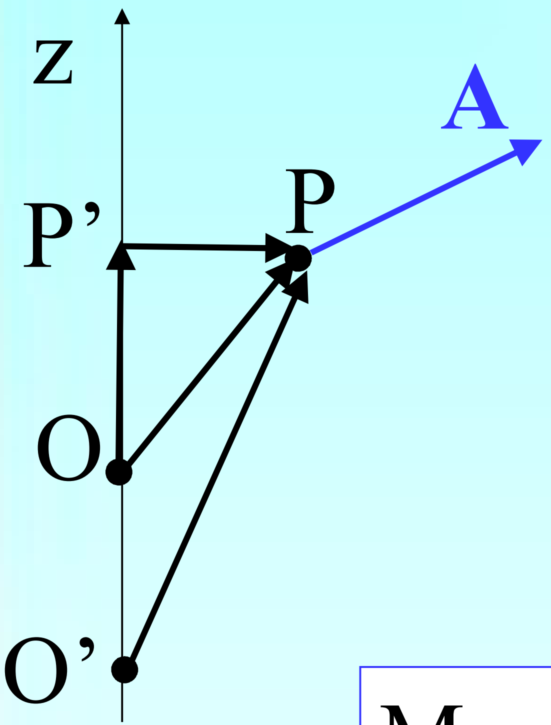
$$\mathbf{r}_{\mathbf{C}} = \frac{\sum \mathbf{r}_{\mathbf{I}} \, m_I g}{\sum m_I g}$$

C baricentro

Supponendo **g** costante

$$\mathbf{r}_{\mathbf{C}} = \frac{\sum \mathbf{r}_{\mathbf{I}} \, m_I}{\sum m_I}$$

Momento assiale di un vettore



A vettore applicato in P

O e O' poli appartenenti all'asse z

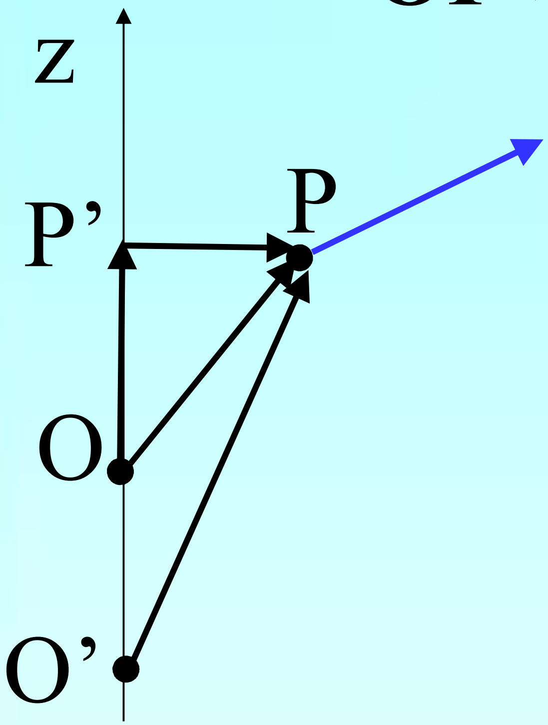
$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP'} + \mathbf{P'P}$$

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{OP} \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{OP'} + \mathbf{P'P}\right) \times \mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{OP'} \times \mathbf{A} + \mathbf{P'P} \times \mathbf{A}$$

M_{OZ} momento assiale del vettore **A** = componente di $\mathbf{M}_O$ lungo l'asse z

$\mathbf{OP'} \times \mathbf{A}$ vettore ⊥ all'asse z, non contribuisce a M_{OZ}



$$\boxed{M_{OZ} = \left(\mathbf{P'P} \times \mathbf{A}\right)_Z}$$

$$\mathbf{O'P} = \mathbf{O'P'} + \mathbf{P'P}$$

$$\mathbf{M_{O'}} = \mathbf{O'P} \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{O'P'} + \mathbf{P'P}\right) \times \mathbf{A} =$$

$$= \mathbf{O'P'} \times \mathbf{A} + \mathbf{P'P} \times \mathbf{A}$$

$M_{\mathbf{O'Z}}$ momento assiale del vettore $\mathbf{A}$ = componente di $\mathbf{M}_{O'}$ lungo l'asse z

$\mathbf{O'P'} \times \mathbf{A}$ vettore $\perp$ all'asse z, non contribuisce a $M_{O'Z}$

$$\boxed{M_{O'Z} = \left(\mathbf{P'P} \times \mathbf{A}\right)_Z = M_{OZ}}$$

Il momento assiale non dipende dal polo, se il polo appartiene all'asse