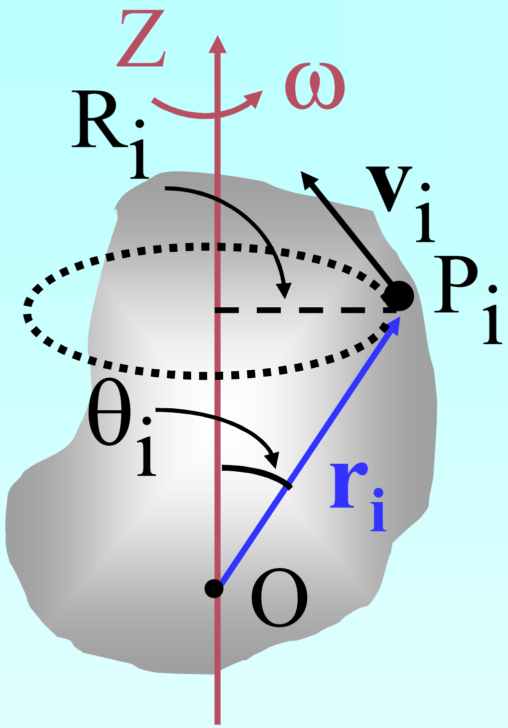
Rotazione rigida attorno a un asse fisso: MOMENTO ANGOLARE ASSIALE



P_i punto del sistema descrive una circonferenza di raggio R_i

O polo appartenente all' asse
O polo fisso

$\mathbf{v}_i$ velocità di P_i tangente alla circonferenza

$$v_i = \omega R_i$$

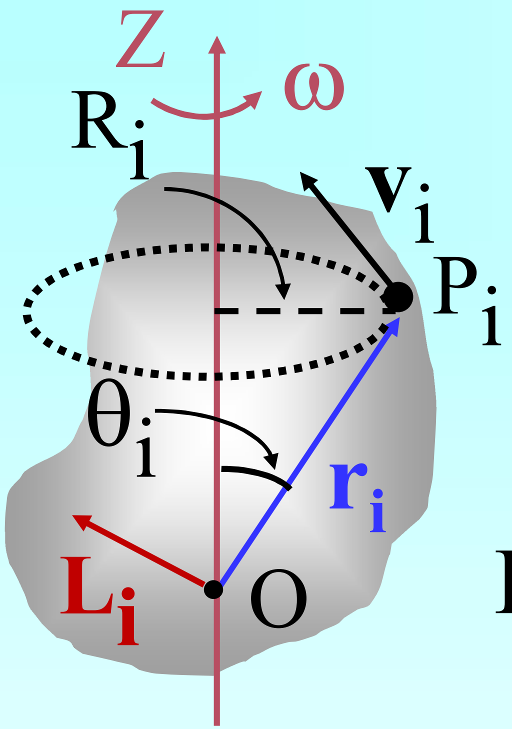
$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\, \mathbf{v}_i$ momento angolare di P_i

$\mathbf{L}_i \perp \mathbf{r}_i \qquad \mathbf{L}_i \perp \mathbf{v}_i$

$\mathbf{v}_i \perp$ al piano del disegno

Direzione di $\mathbf{L_i}$: $\perp \mathbf{r_i}$ nel piano del disegno

$$|\mathbf{L}_i| = m_i r_i v_i$$



L_{iz} componente di $\mathbf{L}_i$ lungo l' asse z

$$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \mathrm{sen}\theta_i =$$

$$= m_i r_i v_i \mathrm{sen}\theta_i = m_i R_i v_i = m_i R_i{}^2 \omega$$

$$\boxed{L_Z = \sum_i L_{iZ} = \sum_i m_i R_i{}^2 \omega = I_Z \omega}$$

L_Z momento angolare assiale del corpo rigido

$$I_z = \sum_i m_i R_i^{\,2}$$

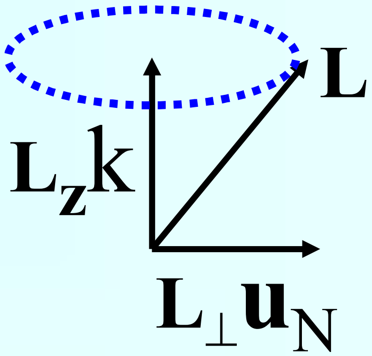
momento d'inerzia

del corpo rigido rispetto all' asse z:

dipende dalle masse e dalla loro posizione rispetto all' asse di rotazione

L_z non dipende dalla scelta del polo

$L_z \propto \omega$



$$\mathbf{L} = L_z \mathbf{k} + L_\perp \mathbf{u}_N$$

$$L_\perp = \left(\sum_i m_i r_i \cos\theta_i R_i\right)\omega$$

$L_z\mathbf{k}$ può variare solo in modulo

$L_\perp \mathbf{u}_N$ può variare in modulo e direzione

L ruota attorno all' asse z:
moto di **precessione**

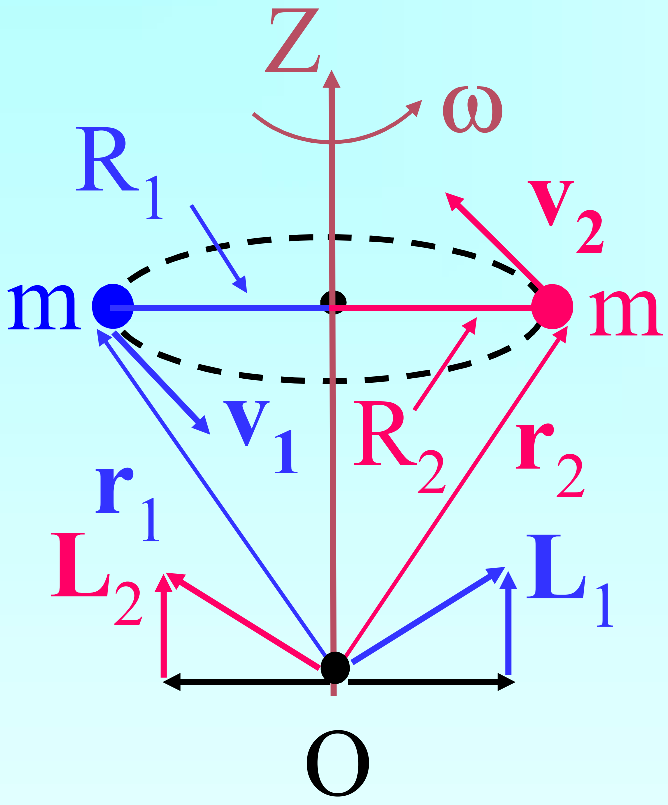
Se $\omega = \text{costante} \Rightarrow |\mathbf{L}| = \text{costante}$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

$\mathbf{M} \neq 0$ anche se $\omega = \text{costante}$

M fa cambiare direzione all' asse di rotazione:
occorrono dei supporti per mantenere fisso l'asse

Distribuzione simmetrica rispetto all' asse z



$$R_1 = R_2 = R$$

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \omega R$$

$$|\mathbf{r_1}| = |\mathbf{r_2}| = r$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2} = \mathbf{r_1} \times m_1\, \mathbf{v_1} + \mathbf{r_2} \times m_2\, \mathbf{v_2}$$

$$|\mathbf{L_1}| = |\mathbf{L_2}| \qquad L_{1Z} = L_{2Z} \qquad L_{1\perp} = -L_{2\perp}$$

$\mathbf{L} \; // \; \omega$

$$\mathbf{L} = (m\,R^2\omega + m\,R^2\omega)\,\mathbf{k} = 2\,m\,R^2\,\omega = I_Z\,\omega$$

Asse di simmetria ≡ asse principale d' inerzia

Se $\omega = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{M} = 0$

Equazione del moto

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$

caso a)

$$\boxed{\mathbf{L} \parallel \omega: \quad \mathbf{L} = I_Z\,\omega}$$

$$\boxed{M = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha} \qquad \boxed{\alpha = \frac{M}{I_z}}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt}$$

Se $\mathbf{M = 0} \Rightarrow \alpha = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \text{costante} \\ &\theta = \theta_0 + \omega t \end{aligned}}$$

Se $M = \text{cost} \Rightarrow \alpha = \text{cost}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \alpha t \\ &\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned}}$$

caso b)

$\mathbf{L}$ non è parallelo a ω: $L_z = I_z \omega$

$$M_z = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

$$\alpha = \frac{M_z}{I_z}$$

La legge oraria rimane invariata:

α dipende da M_z

ENERGIA CINETICA E LAVORO

Moto di rotazione di un sistema attorno ad un asse

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (*)$$

Se la velocità del sistema varia da ω_I, velocità angolare iniziale, ad ω_F, velocità angolare finale

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} I_z \omega_F^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_I^2 = W$$

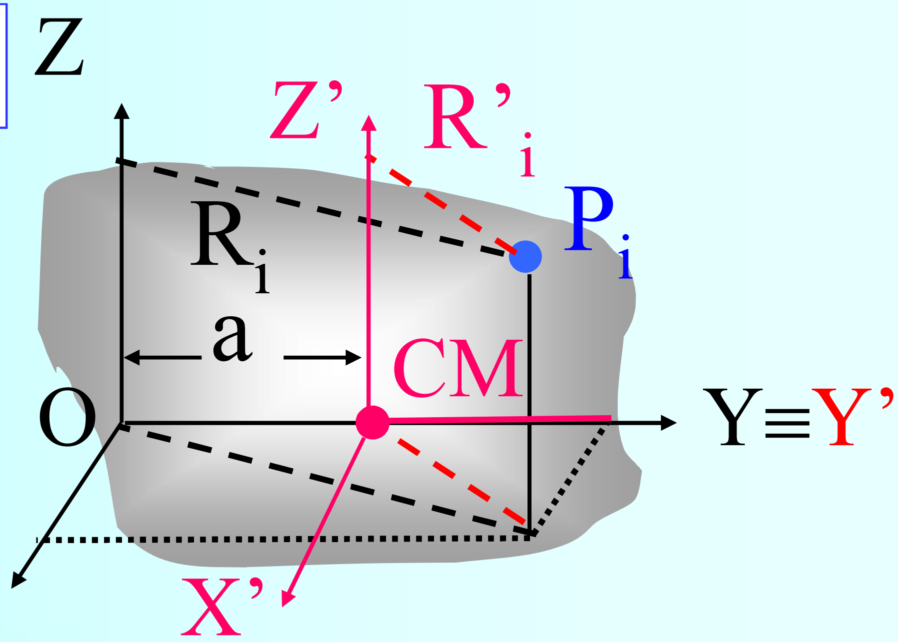
Calcoliamo il lavoro in un moto rotatorio: differenziando la relazione(*)

$$dW = dE_K = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = M_z d\theta$$

$$\boxed{W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z d\theta}$$

Se M_Z = costante $\Rightarrow W = M_Z\,(\,\theta - \theta_0\,)$

TEOREMA DI STEINER



Z, Z' assi paralleli

a distanza tra Z e Z'

P_i punto del sistema di massa m_i

R_i distanza di P_i dall'asse Z

R_i' distanza di P_i dall'asse Z'

(X_i, Y_i, Z_i) coordinate di P_i rispetto ad O

(X_i', Y_i', Z_i') coordinate di P_i rispetto a CM

$$R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 \qquad R'^2_i = X'^2_i + Y'^2_i$$

$X_i = X'_i \qquad Y_i = Y'_i + a \qquad Z_i = Z'_i$

Momento d' inerzia di P_i rispetto a Z

$$I_{zi} = m_i R_i^2 = m_i \left(X_i^2 + Y_i^2 \right)$$

Momento d' inerzia del corpo rispetto a Z

$$I_Z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(X_i^2 + Y_i^2 \right) =$$

$$= \sum_i m_i \left[X'^2_i + \left(Y'_i + a \right)^2 \right] =$$

$$= \sum_i m_i \left(X_i^{'2} + Y_i^{'2} \right) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i Y_i^{'}$$

$$\sum_i m_i Y_i^{'} = m Y_{CM}^{'} = 0$$

$$I_Z = \sum_i m_i \left(X_i^{'2} + Y_i^{'2} \right) + m a^2$$

$$\sum_i m_i \left(X_i^{'2} + Y_i^{'2} \right) = \sum_i m_i R_i^{'2} = I_{CM}$$

momento d' inerzia del corpo rispetto a Z'

$$I_Z = I_{CM} + m a^2$$

TEOREMA DI STEINER