CORPO CONTINUO

Distribuzioni continue di massa

↕

numero molto grande di masse elementari, ciascuna delle quali ha massa dm e occupa un volume dV, distribuite in regioni dello spazio, le cui dimensioni non consentono l'approssimazione di massa puntiforme

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int_C \mathbf{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int_C \mathbf{r}\,dm}{M}}$$

M = massa totale del sistema

$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}}$$ densità volumetrica del corpo

$$dm = \rho\, dV \qquad M = \int_V \rho\, dV$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int_C \mathbf{r}\,\rho\, dV}{M}$$

Per una distribuzione di massa uniforme

$$\rho = \mathrm{cost} = \frac{M}{V} \qquad M = \rho\, V$$

$$\boxed{\rho_S = \frac{dm}{dS}}$$ densità superficiale

$$\boxed{\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell}}$$ densità lineare

Momento d' inerzia per un corpo continuo C

$$\boxed{I = \int_C r^2 dm}$$

$$dm = \rho \, dV \qquad M = \int_V \rho dV$$

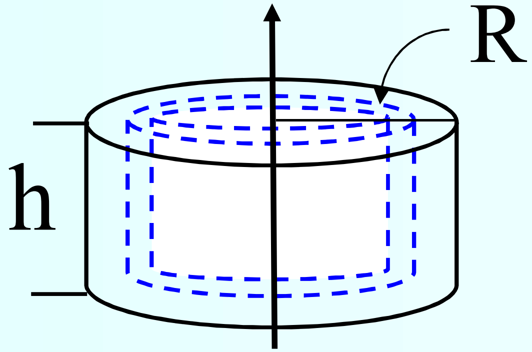
Esempio:

momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto ad un asse $\perp$ al disco passante per il suo centro

$$\rho = \text{cost}$$

$$\boxed{M = \rho \, V = \rho \pi R^2 h}$$

Suddividiamo il cilindro in elementi di massa dm e volume $dV = 2\pi r dr h$



$$I = \int_C r^2 dm = \int_C r^2 \rho dV = \int_0^R \rho 2\pi r^3 h dr =$$

$$= 2\pi\rho h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

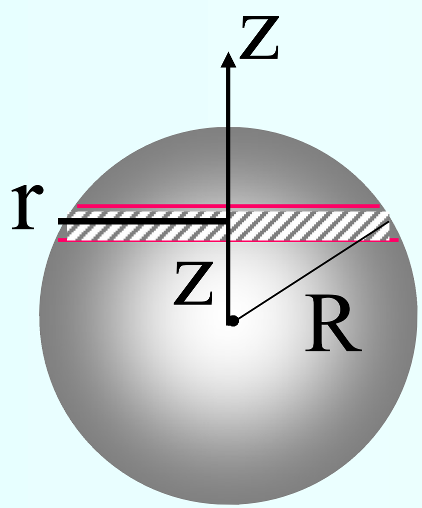
Momento di inerzia di una sfera omogenea

di massa M e raggio R rispetto ad un asse z coincidente con un diametro

$$I = \int_C r^2 dm$$

$\rho = \text{cost}$

$$\boxed{M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3}$$



Suddividiamo la sfera in sezioni circolari di raggio r, distanti z dal centro, assimilabili a dischi di massa dm e spessore dz

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dz \qquad r^2 = \left(R^2 - z^2\right)$$

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 dz r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

$$I = \int_{SF} dI = 2\int_0^R \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz =$$

$$= \rho\pi\int_0^R \left(R^4 + z^4 - 2R^2 z^2\right) dz =$$

$$\rho\pi\left(R^5 + \frac{R^5}{5} - 2\frac{R^5}{3}\right) = \rho\pi 8\frac{R^5}{15} = \frac{2}{5} M R^2$$