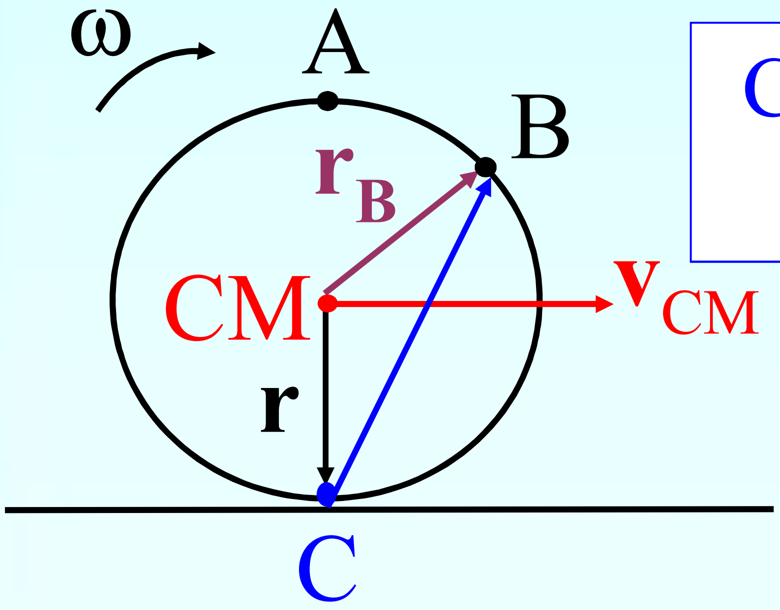
ESEMPIO DI MOTO ROTOTRASLATORIO

Moto di rotolamento senza strisciamento:

- il corpo trasla con velocità $\mathbf{v}_{CM}$
- il corpo ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse passante per CM $\perp$ al piano del disegno
- il punto di contatto è istantaneamente fermo



C punto di contatto all' istante t:

$$\mathbf{v}_C = 0$$

La forza di **attrito statico** impedisce lo strisciamento

$$\boxed{\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{CM} = -\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}$$

ω vettore $\perp$ al piano del disegno, entrante

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = -\,\omega r\,\mathbf{i}$ opposto a $\mathbf{v}_{CM}$

$|\mathbf{v}_{CM}| = \omega r \qquad a_{CM} = \alpha\, r$

Moto di rotolamento senza strisciamento : moto di rotazione attorno ad un asse istantaneamente fisso passante per C $\perp$ al piano del disegno

Energia cinetica del cilindro

Per il teorema di Konig

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 =}$$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_{CM} + m r^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

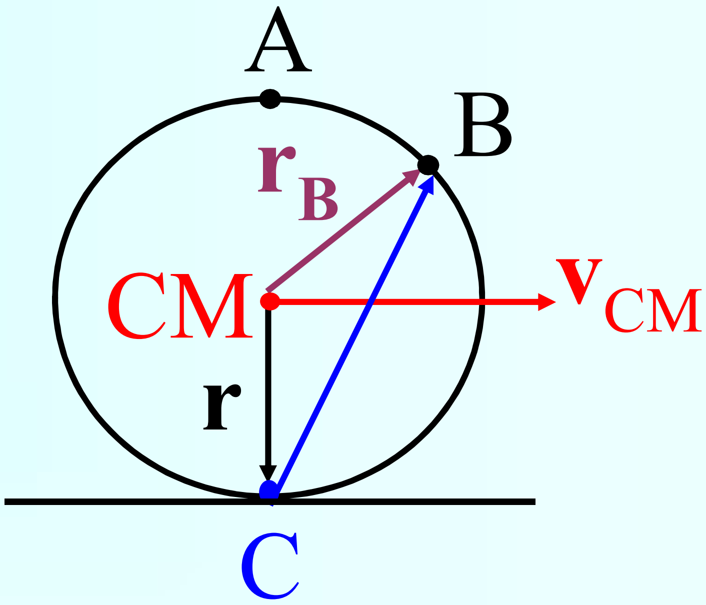
$\frac{1}{2} I_C \omega^2$ **energia cinetica di rotazione attorno all'asse passante per C**

Velocità del punto A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_A = \mathbf{v}_{CM} + \omega\cdot r\,\mathbf{i} = 2\omega\cdot r\,\mathbf{i}$$

$\mathbf{v}_A \perp$ al vettore che congiunge A con il punto di contatto C

$$\boxed{|\mathbf{v}_A| = \omega \cdot CA}$$



Velocità di un generico punto B

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_B}$$

Velocità di B relativa a C:

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_B - \mathbf{v}_{CM} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} =$$

$$= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_B - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_B - \mathbf{r})$$

Essendo $\mathbf{v}_C = 0$

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \omega \times \mathbf{CB}}$$

- $\mathbf{v}_B \perp$ al vettore che congiunge B con il punto di contatto C
- $|\mathbf{v}_B| = \omega \cdot \mathbf{CB}$

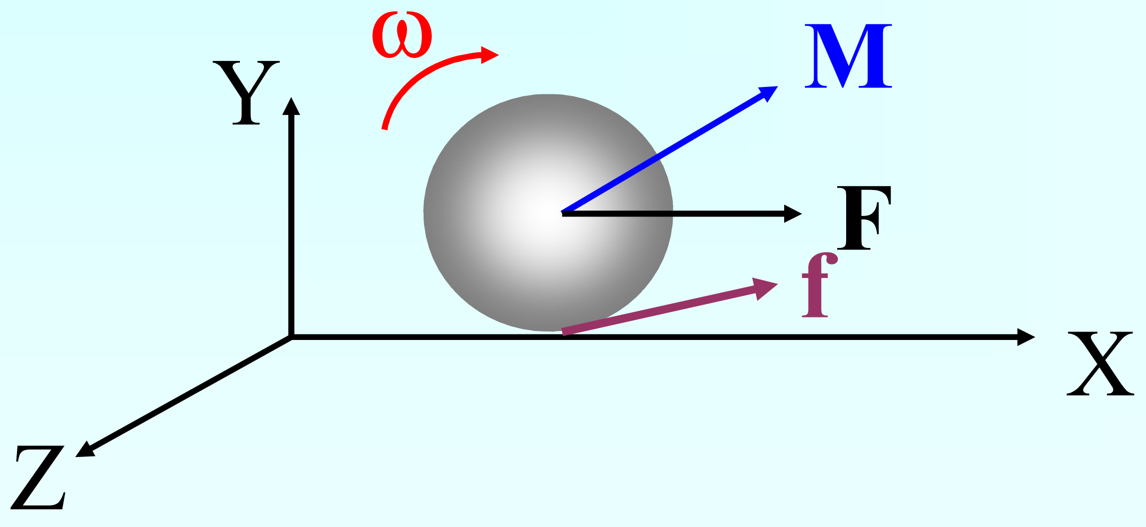
Il moto può essere considerato come un moto di pura rotazione rispetto ad un asse passante per C

Lavoro della forza di attrito nel moto di puro rotolamento

$f_X =$ forza di attrito statico, $\mathbf{v}_\mathbf{C} = 0$

$$\boxed{dW = f_X\, \mathbf{i} \bullet \mathbf{ds} = f_X\, \mathbf{i} \bullet \mathbf{v}_C\, dt = 0}$$

Esempio:
un cilindro rotola senza strisciare su un piano scabro XZ sotto l' azione di una forza **F** costante diretta lungo X e di un momento **M** diretto lungo Z, applicato all' asse passante per CM



f reazione esercitata dal piano

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m r^2$$

$$L' = I_{CM}\,\omega$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{R}^E &= m\,\mathbf{a}_{CM} \\ \mathbf{M}^E &= \frac{d\mathbf{L}'}{dt} \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{F} + \mathbf{f} + m\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}_{CM}}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt}}$

Lungo gli assi X, Y

$$\boxed{\begin{aligned} F + f_X &= m\,a_{CM} \\ f_Y &= mg \end{aligned}} \qquad (*)$$

Lungo l’asse Z

$$-M\,\mathbf{k} + r f_X\,\mathbf{k} = -\frac{1}{2} m r^2 \alpha\,\mathbf{k}$$

$$M - rf_X = \frac{1}{2} m r a_{CM} \quad (**)$$

da (*) e (* *) $\Rightarrow$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2}{3}\frac{rF + M}{mr} \qquad f_X = \frac{2M - rF}{3r}}$$

Perché non ci sia strisciamento:

$f_X =$ forza di attrito statico $\boxed{f_X \le \mu_S f_Y = \mu_S mg}$

$$\mu_S \ge \frac{f_X}{f_Y} \qquad \boxed{\mu_{SMIN} = \frac{f_X}{f_Y}}$$

Casi particolari:

1) $\mathbf{M} = 0$

$$a_{CM} = \frac{2}{3}\frac{F}{m}$$

$$f_X = -\frac{F}{3}$$

$f_X\,\mathbf{i}$ opposta ad $\mathbf{F}$

momento di **f** responsabile della rotazione

$\boxed{2) \quad \mathbf{F} = 0}$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{2}{3}\frac{M}{mr}} \qquad \boxed{f_X = \frac{2M}{3r}}$$

f_X positiva determina il moto di CM
momento di **f** opposto ad **M**

3) $\mathbf{M} = 0 \quad \mathbf{F} = 0$

il cilindro è in quiete

oppure

$\mathbf{v}_{CM} = \text{costante} \qquad \omega = \text{costante}$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2} = \text{costante}$$