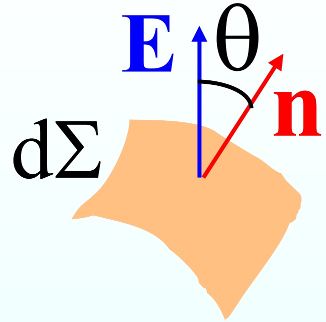
Flusso del campo elettrostatico

Teorema di Gauss

$d\Sigma$ superficie elementare nell'intorno del generico punto P del campo



n versore della normale a $d\Sigma$ orientata positivamente in uno dei due possibili versi

$d\mathbf{\Sigma}$ vettore avente per modulo l'area $d\Sigma$ e per direzione e verso quelli della normale orientata **n** a $d\Sigma$

E campo nel punto P

θ angolo tra la normale **n** ed il campo **E**

Si definisce flusso elementare $d\Phi$ di **E** attraverso la superficie orientata $d\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boxed{d\Phi_E = \mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\, d\Sigma = \mathbf{E}\bullet d\,\boldsymbol{\Sigma} = E d\Sigma\cos\theta = E_n d\Sigma}$$

Flusso attraverso una superficie finita Σ:

si suddivide la superficie in elementi $d\Sigma$ infinitesimi e si sommano i contributi $d\Phi_E$

$$\boxed{\Phi_{\mathbf{E}} = \int_\Sigma d\Phi_E = \int_\Sigma \mathbf{E}\bullet\mathbf{d}\boldsymbol{\Sigma} = \int_\Sigma E d\Sigma\cos\theta}$$

Unità di misura del flusso

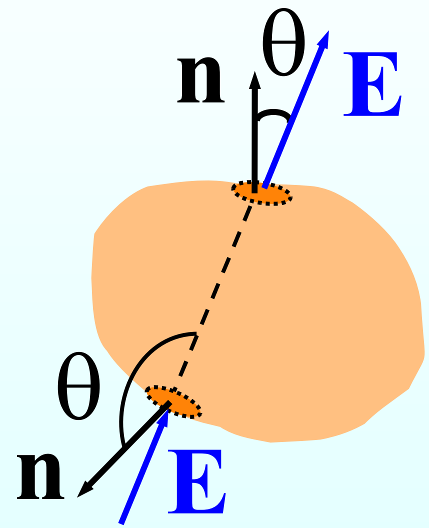
$$[\Phi_E]=[E]\cdot[\Sigma]=\frac{\text{Volt}}{\text{m}}\cdot \text{m}^2 = \text{Volt}\cdot\text{m}$$

Valutiamo il flusso del campo elettrico attraverso superfici chiuse (superfici che racchiudono un volume)

Per convenzione **n** normale alla superficie **positiva** è orientata in modo che sia **uscente** da questa $\Rightarrow$

$\cos\theta > 0$ per linee di forza uscenti

$\cos\theta < 0$ per linee di forza entranti



Quindi
flusso uscente dalla superficie **positivo**
flusso entrante negativo

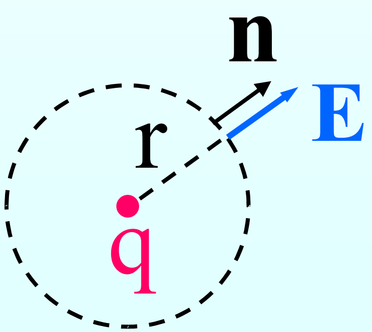
Flusso del campo elettrico

generato da una carica puntiforme q attraverso una superficie sferica concentrica con essa, di raggio r

Direzione di **E** radiale

Modulo di **E** costante su tutti i punti della superficie

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r$$



$$\mathbf{u_r} \,//\, \mathbf{n} \;\Rightarrow\; \cos\theta = 1$$

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\,d\Sigma = E\,d\Sigma$$

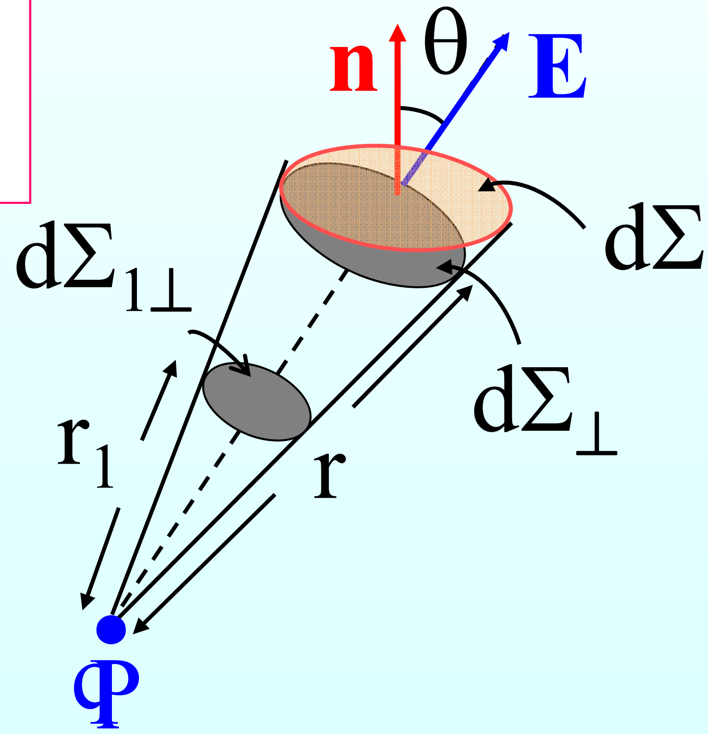
$$\Phi_E = \oint E d\Sigma = E \oint d\Sigma = E\,\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi\, r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Φ_E, indipendente dal raggio r,
dipende dalla carica q contenuta nella sfera

Dimostriamo che questo risultato è valido per una superficie chiusa di forma qualsiasi, che contenga la carica q

Definizione di **angolo solido** sotto cui è vista una superficie dΣ da un punto

$$d\Omega = \frac{d\Sigma\cos\theta}{r^2} = \frac{d\Sigma_\perp}{r^2} = \frac{d\Sigma_{1\perp}}{r_1^2}$$



Il flusso $d\Phi_E$ attraverso la superficie $d\Sigma$ vale

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \bullet d\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r \bullet \mathbf{n}\, d\Sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{d\Sigma\cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

Il flusso del campo elettrico generato da q attraverso $d\Sigma$ dipende solo dall'angolo solido $d\Omega$ sotto cui $d\Sigma$ è vista da q

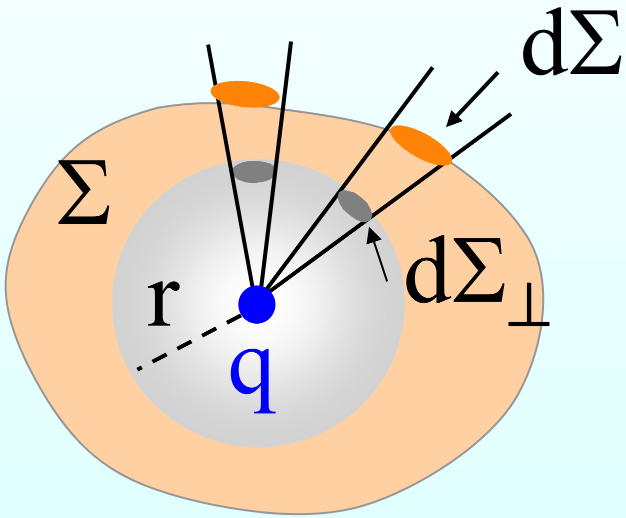
Flusso attraverso una superficie chiusa Σ

$$\boxed{\Phi_E = \oint_\Sigma d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

Determiniamo Ω nei due casi:

1) **q è interna** ad Σ:

Ω angolo solido sotto cui è vista Σ da q $\equiv$
angolo solido sotto cui è vista una superficie sferica di raggio r qualsiasi e centro in q



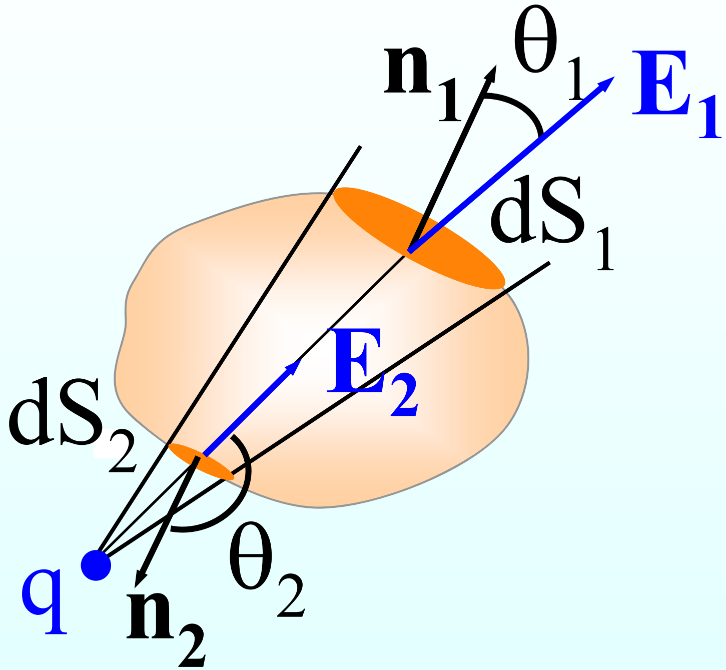
$$\boxed{\Omega = \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma_{\perp}}{r^2}}$$

r = costante $\Rightarrow$ $$\boxed{\Omega = \frac{1}{r^2}\int_{\Sigma} d\Sigma_{\perp} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \ \text{ str}}$$

2) **q è esterna** ad S:

ogni cono elementare intercetta due superfici dS_1, dS_2

$$\boxed{\frac{dS_1\cos\theta_1}{r_1^{\,2}} = -\frac{dS_2\cos\theta_2}{r_2^2}}$$



Per ogni cono elementare

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS_1\cos\theta_1}{r_1^{\,2}} + \frac{dS_2\cos\theta_2}{r_2^2} = 0}$$

$\Omega = 0$ perché somma di contributi a due a due uguali ed opposti

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \Omega = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 4\pi = \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{se q è interna} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 0 = 0 & \text{se q è esterna} \end{cases}$$

Campo elettrico generato da più cariche puntiformi in un punto P per il principio di sovrapposizione

Per il principio di sovrapposizione $\boxed{\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E_i}}$

Il flusso elementare di **E** attraverso d**Σ** vale

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \bullet d\,\mathbf{\Sigma} = \left(\sum_i \mathbf{E_i}\right) \bullet d\,\mathbf{\Sigma} =$$

$$= \sum_i \left(\mathbf{E_i} \bullet d\,\mathbf{\Sigma}\right) = \sum_i d\Phi_i$$

Quindi

$$\Phi_E = \oint_\Sigma d\Phi_E = \oint_\Sigma \mathbf{E} \bullet d\,\mathbf{\Sigma} = \oint_\Sigma \sum_i d\Phi_i =$$

$$= \sum_i \oint_\Sigma d\Phi_i = \sum_i \Phi_i$$

$$\boxed{\Phi_E = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i(\text{interna})}}$$

$\sum_i q_{i(interna)} =$ somma algebrica di tutte le cariche contenute entro la superficie chiusa

Teorema di Gauss

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa qualsiasi è dato dalla carica totale in essa contenuta, divisa per ε_0

Dalla validità della legge di Coulomb si deriva il teorema di Gauss

Viceversa si può derivare dal teorema di Gauss la legge di Coulomb

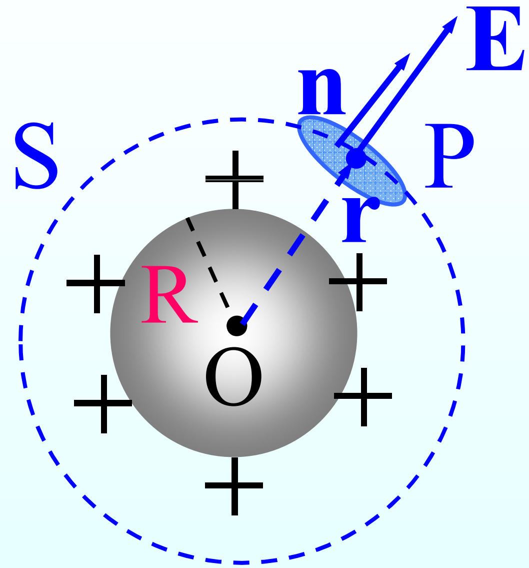
Legge di Coulomb e teorema di Gauss sono formulazioni diverse di una stessa legge

Applicazioni del teorema di Gauss

Campo generato da **una distribuzione superficiale uniforme** di carica Q distribuita su una superficie sferica di raggio R e centro O

Valutiamo il campo **E** in P

r vettore posizione di P



La simmetria sferica della distribuzione di carica e l'isotropia dello spazio vuoto per i fenomeni elettrici

E è diretto come **r**

E = E(r)

E ha la stessa intensità in punti equidistanti dal centro

Valutiamo il flusso attraverso una superficie sferica Σ di centro O e raggio r $\ni$' $P \in \Sigma$

Per il teorema di Gauss

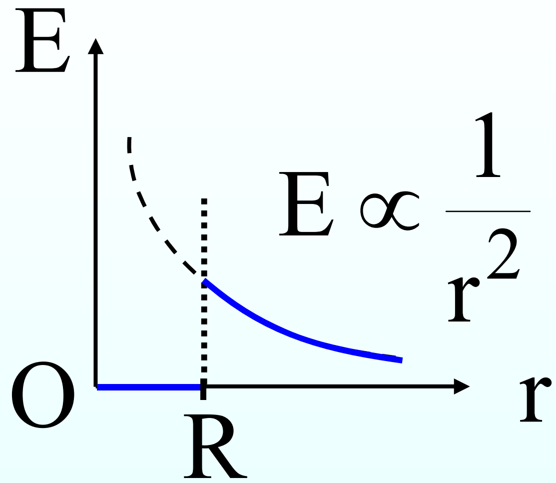
$$\boxed{\Phi_E = \oint_\Sigma \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, d\Sigma = E \oint_\Sigma d\Sigma = E \cdot 4\,\pi\, r^2 = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Per i punti esterni alla sfera,
E è uguale al campo che avrebbe prodotto una carica puntiforme pari a Q posta nel centro

In un generico punto P' interno alla sfera carica

$$Q_{INT} = 0 \Rightarrow \Phi_E = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0$$



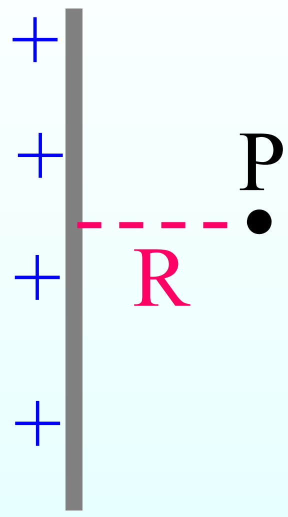
Discontinuità del campo elettrico attraverso la superficie sferica

$$\boxed{\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{EST} - \mathbf{E}_{INT} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}}$$

Campo elettrico generato da una **distribuzione lineare uniforme di carica**

Campo **E** in P

R distanza di P dalla linea



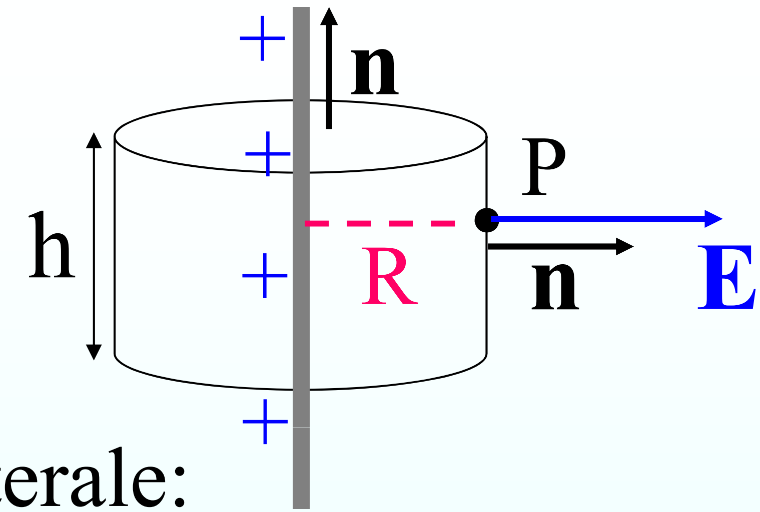
La simmetria della distribuzione di carica e l'isotropia dello spazio vuoto per i fenomeni elettrici

E ⊥ alla linea

E = E(R)

E ha la stessa intensità in punti equidistanti dalla linea

Flusso attraverso una superficie cilindrica Σ di raggio R e altezza h ∍' $P \in \Sigma$



Flusso attraverso le basi = 0
$(\mathbf{E} \perp \mathbf{n})$

Flusso attraverso la superficie laterale:

E // n, modulo di E costante

Per il teorema di Gauss

$$\Phi_E = \oint_\Sigma \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, d\Sigma = E \oint_\Sigma d\Sigma = E \cdot 2\pi R h = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$