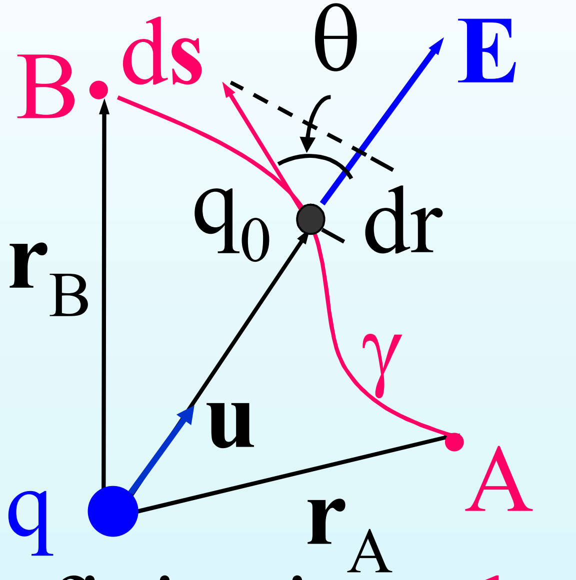
POTENZIALE ELETTROSTATICO

Lavoro delle forze elettrostatiche

$\mathbf{E}$ campo generato da una carica puntiforme q

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}$$



$\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$

forza elettrostatica agente su q_0

dW lavoro per uno spostamento infinitesimo ds di q_0 nel campo della carica q

$$dW = \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s} = q_0\,\mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}$$

$$dW = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\mathbf{u}\bullet d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}dr$$

dove $dr = \mathbf{u} \bullet d\mathbf{s}$

proiezione di d**s** lungo la direzione del campo **E**

Lavoro delle forze elettrostatiche per spostare q_0 da A a B:

$$\boxed{W = q_0 \int_A^B \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} =} \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

W, indipendente dal percorso,
dipende solo da r_A e da r_B

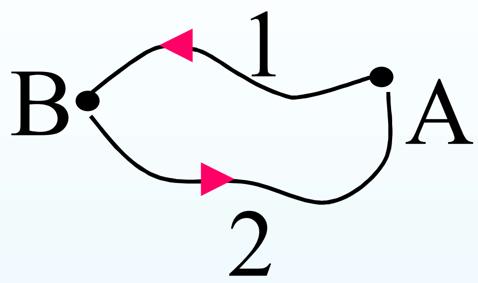
E campo conservativo

È possibile definire
U energia potenziale elettrostatica,
in modo che sia

$$\boxed{W = U(A) - U(B) = -\Delta U}$$

In maniera equivalente si può affermare che

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = 0}$$



L'integrale di linea del campo elettrostatico
prodotto da una carica puntiforme
su un percorso chiuso (circuitazione di **E**)
è nullo

$$U(A) - U(B) = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

$$U(B) - U(A) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} =$$

$$= \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W}{q_0}$$

V potenziale elettrostatico

Unità di misura: joule/ coulomb (volt)

A distanza infinita possiamo assumere

$F(\infty) = 0$, $E(\infty) = 0$, $U(\infty) = 0$, $V(\infty) = 0$

Per $r_A \to \infty$, $r_B = r$, $V_A = 0$, $V_B = V(r)$

$$V(r) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{U(r)}{q_0}$$

potenziale elettrostatico generato dalla carica q nel punto P a distanza r, pari al lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per trasportare una carica unitaria da P all'infinito

Per il principio di sovrapposizione

i risultati ottenuti per il campo di una carica puntiforme si estendono al campo elettrostatico generato da una distribuzione qualsiasi di cariche

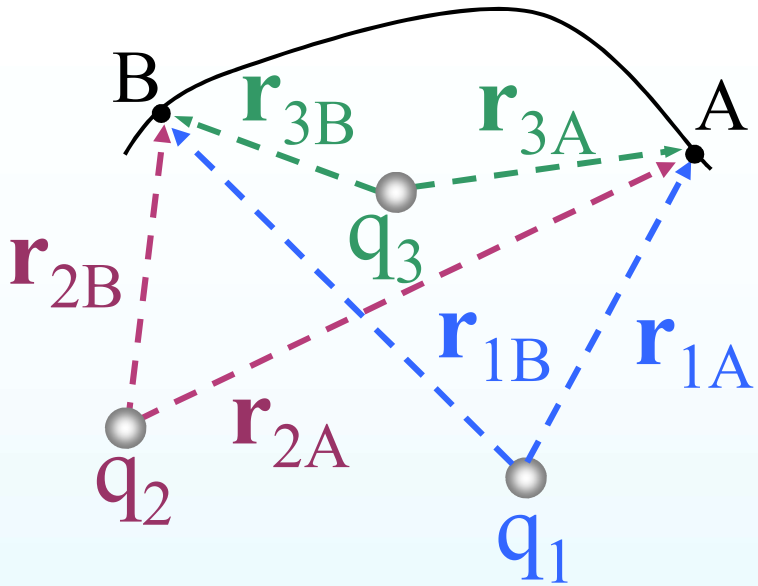
Campo generato da più cariche puntiformi q_i

$$\boxed{\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i}$$

$$W = q_0 \int_A^B E \bullet d s = q_0 \int_A^B \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) \bullet d\mathbf{s} = q_0 \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_\mathbf{i} \bullet d\mathbf{s}$$

W indipendente dal percorso, **E campo conservativo**

r_{iA} distanza di q_i da A
r_{iB} distanza di q_i da B



Valutiamo la d.d.p. tra due punti A e B come somma delle d.d.p. relative alle singole cariche

$$\Delta V = V(B) - V(A) = \sum_i \left(V_{iB} - V_{iA} \right) =$$

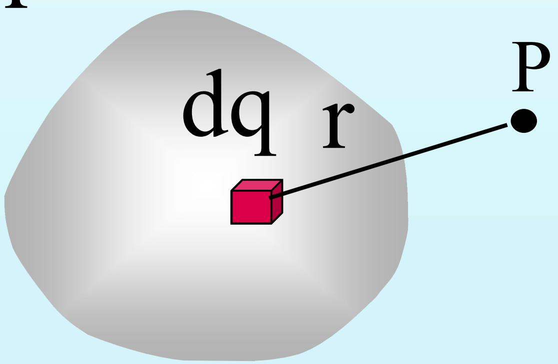
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\frac{1}{r_{iB}} - \frac{1}{r_{iA}} \right)$$

Potenziale generato dal sistema di cariche in P, distante r_i da q_i

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

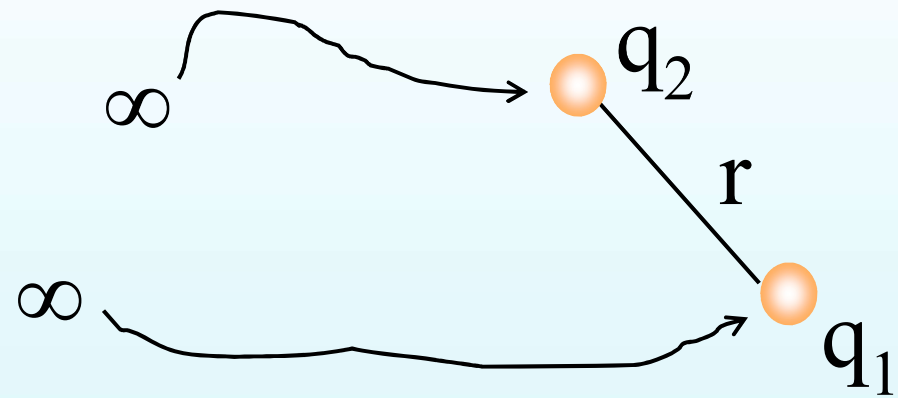
Per una distribuzione continua di cariche

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)\,dV}{r}$$



Energia potenziale elettrostatica

Lavoro per costruire un sistema di due cariche fisse q_1 e q_2, trasportandole da distanza infinita in posizioni prefissate poste a distanza r



Il lavoro per portare q_1 nella posizione finale è nullo

$\mathbf{F}_{12}$ forza elettrica esercitata da q_1 su q_2

Lavoro per portare q_2 a distanza r da q_1:

$$W_{EST} = -W = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}_{12} \bullet d\mathbf{s} = \Delta U = U(r) - U(\infty) =$$

$$= U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{r}^{\infty} \mathbf{F}_{12} \bullet d\mathbf{s}$$

$U(r)$	energia potenziale elettrostatica del sistema di due cariche q_1 e q_2

a) q_1 e q_2 dello stesso segno: $U(r) > 0$

il lavoro delle forze elettriche repulsive per portare q_2 da r a ∞ è > 0

b) q_1 e q_2 di segno opposto: $U(r) < 0$

il lavoro delle forze elettriche attrattive per portare q_2 da r a ∞ è < 0

Energia di un sistema con N cariche:

Per ciascuna coppia i,j

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

Sommando su tutte le coppie

$$\boxed{U(\text{sistema}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{j\neq i=1}^{N}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

Determinazione del campo elettrico noto il potenziale

dW lavoro compiuto dal campo **E** per spostare una **carica unitaria** di d**s**

$$d\mathbf{s} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$$

$$dW = \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = E_x dx + E_Y dy + E_Z dz$$

$$dV = -\,dW = -\,E_x dx - E_Y dy - E_Z dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$E_X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = E_X\,\mathbf{i} + E_Y\,\mathbf{j} + E_Z\,\mathbf{k} = -\mathbf{grad}\,V = -\nabla V$$

Superficie equipotenziale

Superficie equipotenziale ≡ luogo dei punti
in cui il potenziale ha lo stesso valore

Il lavoro delle forze de1 campo per spostare
una carica unitaria su una superficie equipotenziale,
risulta nullo

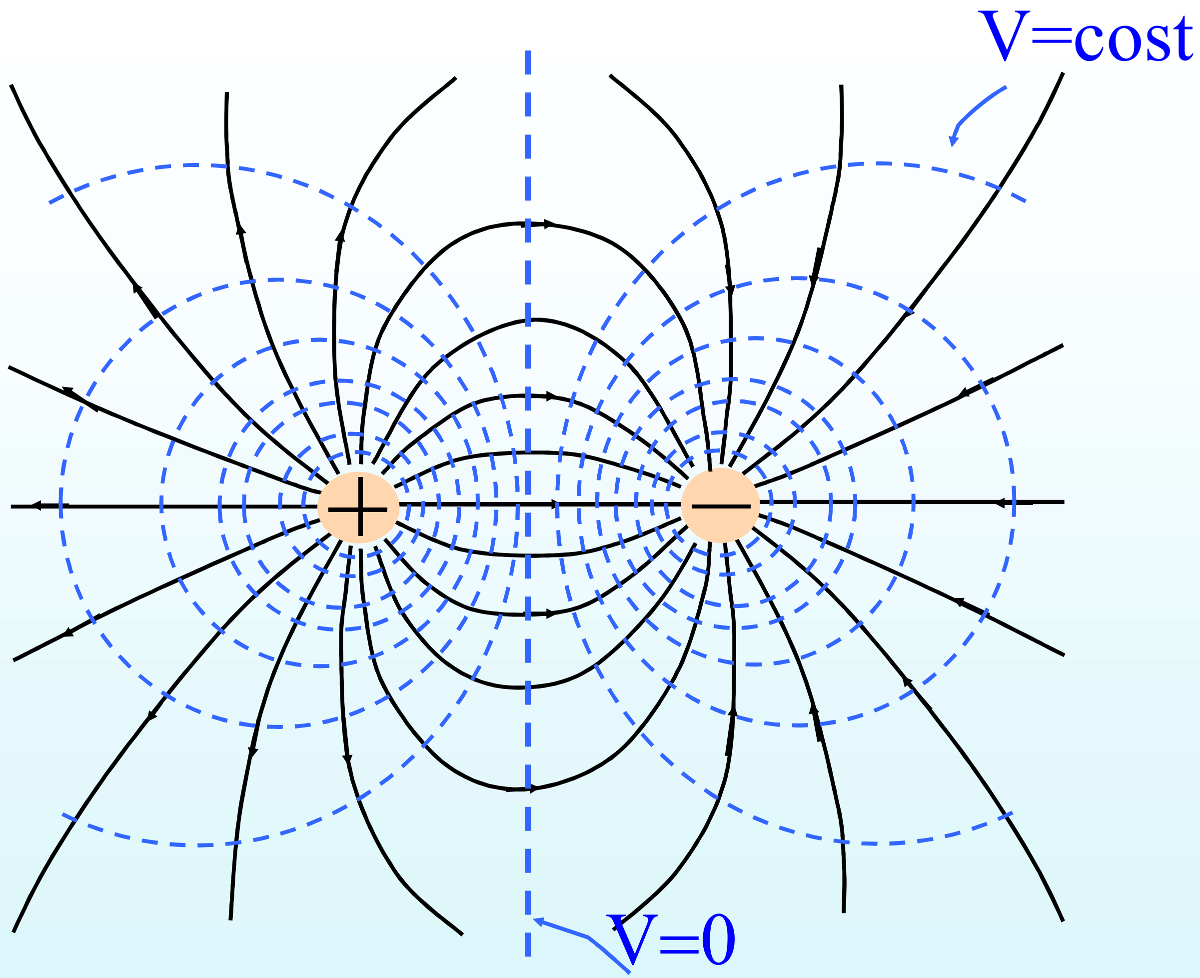
$$\boxed{W = -\Delta V = 0}$$

Per uno spostamento infinitesimo d**s** su una superficie equipotenziale si ha

$$dW = \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = E ds \cos\theta = -\, dV = 0$$

$$E \neq 0,\ \ ds \neq 0 \ \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pm\pi}{2}}$$

In ogni punto di una superficie equipotenziale la direzione del campo elettrico è $\perp$ alla superficie



Linee di forza e superfici equipotenziali sono ortogonali

n versore della normale alla superficie equipotenziale, orientata **verso i potenziali crescenti**

Per uno spostamento elementare dn dell'unità di carica nella direzione di **n** si ha

$$dV > 0$$

$$dV = -\,dW = -\,\mathbf{E} \bullet \mathbf{n}dn = -Edn$$

$$\boxed{E = -\frac{\partial V}{\partial n}}$$

$$dV > 0$$

dW lavoro delle forze del campo elettrico < 0

E diretto in verso opposto ad **n**

La direzione di **E** in ogni punto P è definita dalla normale alla superficie equipotenziale passante per il punto

Il verso è quello che punta verso i potenziali decrescenti