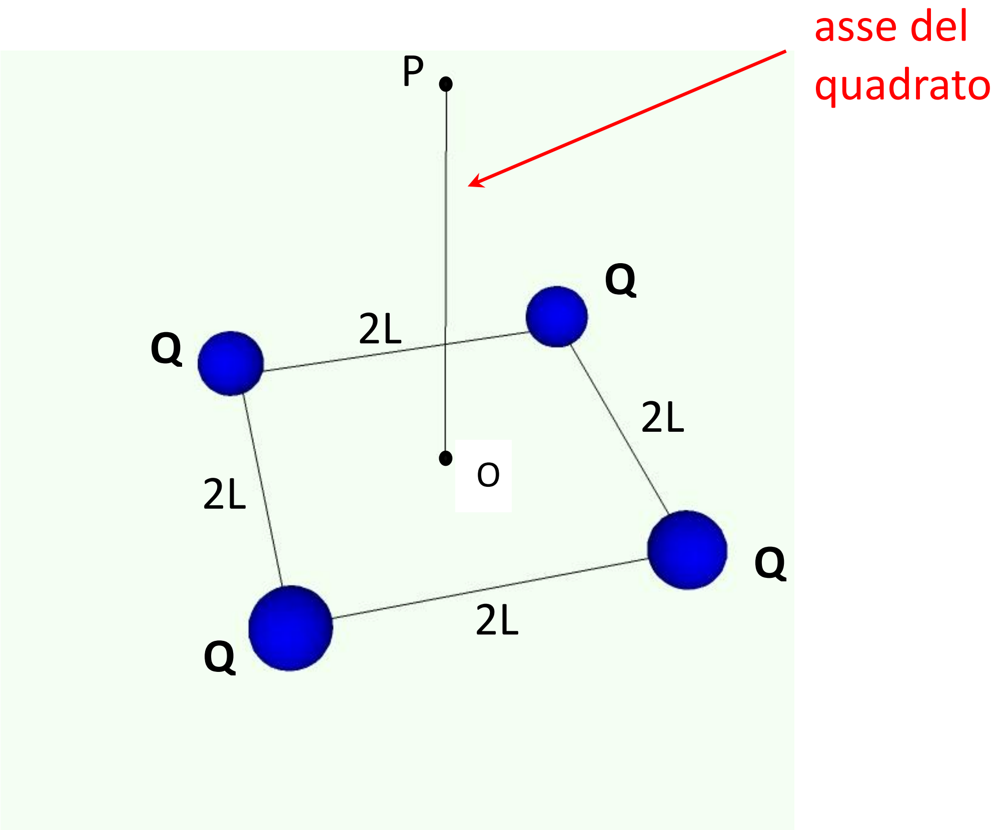
ESERCIZIO 1

AI VERTICI DI UN QUADRATO DI LATO 2L SONO POSTE 4 CARICHE UGUALI Q. DETERMINARE:

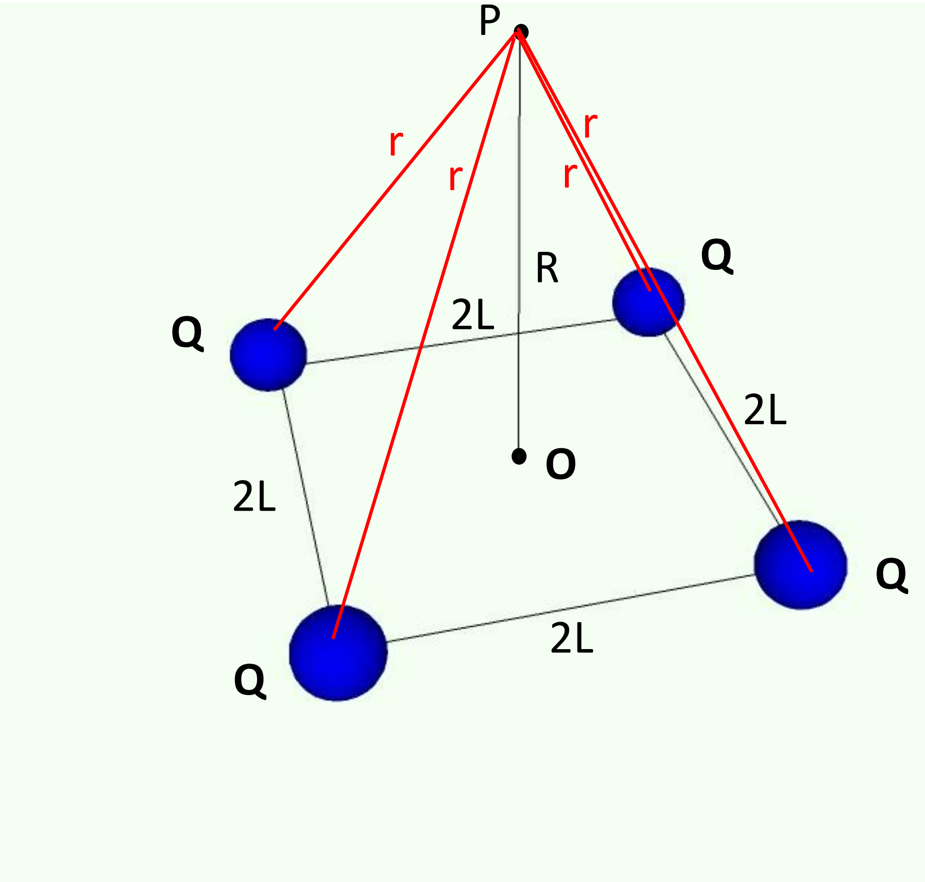
A) IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO P DELL'ASSE.

4 cariche Q uguali sono poste ai vertiti di un quadrato. L' asse di un quadrato è quell'asse passante per il centro O del quadrato e perpendicolare al quadrato stesso. La disposizione delle cariche è rappresentata in figura:

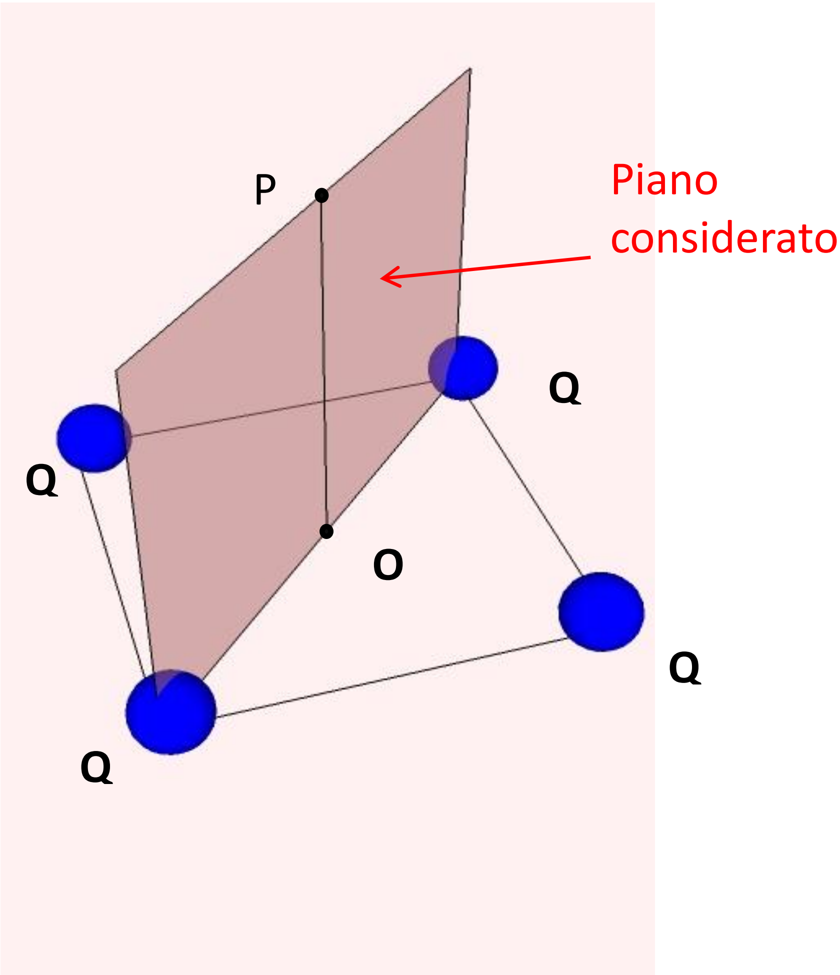


Per la risoluzione del problema ricordiamo il principio di sovrapposizione: ciascuna carica farà sentire la propria influenza nel punto P indipendentemente dalle altre cariche presenti. Ne segue che possiamo considerare il contributo di ciascuna carica Q nel punto P come se le altre cariche non ci fossero, e poi sommare i singoli contributi ottenuti.

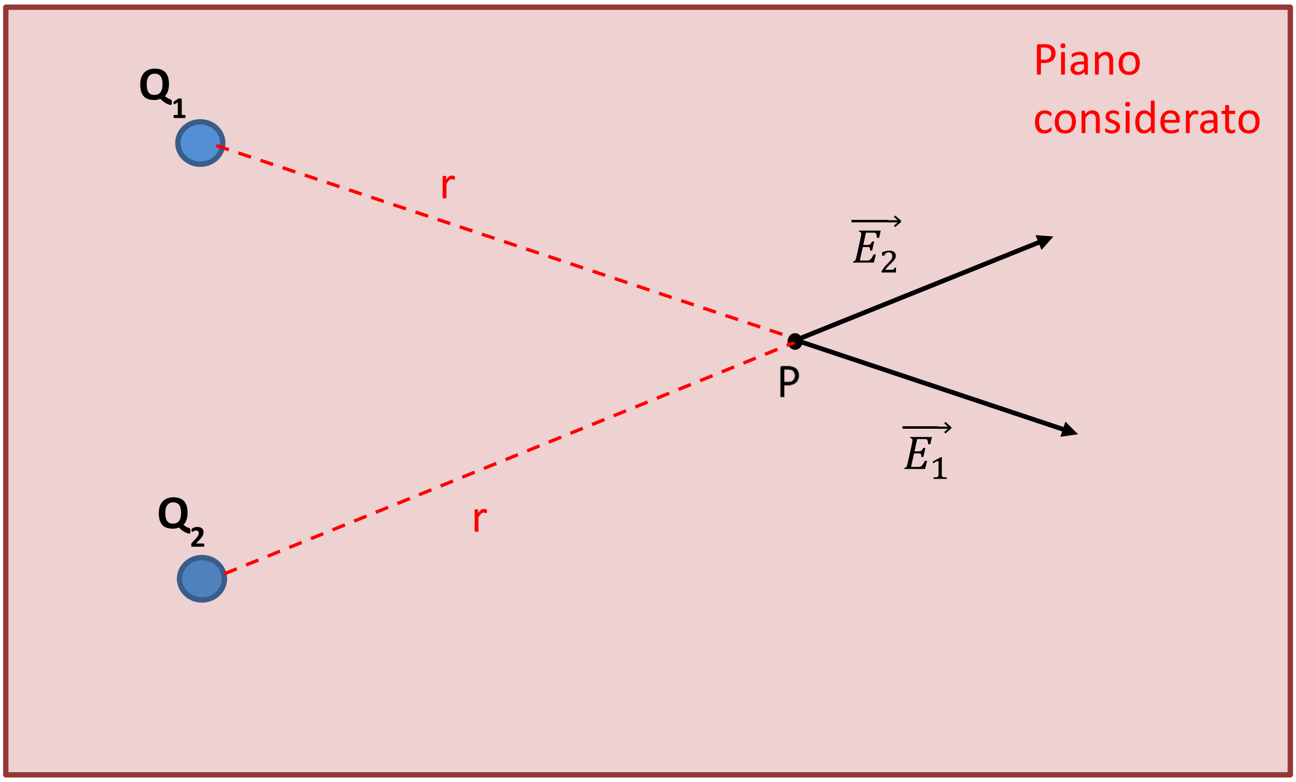
Semplifichiamo la geometria del sistema. Le cariche sono disposte ai vertici di un quadrato. Fissato un punto generico P sull'asse che dista R dal centro, le 4 cariche avranno tutte la stessa distanza r dal punto P dell'asse.



Il problema presenta una geometria 3D abbastanza complessa. Come possiamo ricondurlo ad una geometria bidimensionale? Poiché possiamo avvalerci del principio di sovrapposizione, possiamo considerare il contributo di due cariche nel punto P, poi quello delle altre due e sommare i due contributi che otterremo. Questa semplificazione ci consente di considerare il piano passante per il punto P e per due cariche Q diametralmente opposte:



Nel piano considerato in figura, indico con $\overrightarrow{E_1}$ il campo elettrico generato dalla carica Q_1 nel punto P e con $\overrightarrow{E_2}$ il campo elettrico generato dalla carica Q_2 nel medesimo punto P. Non si può prescindere dalla natura vettoriale del problema, in quanto, come discende dalla definizione della forza di Coulomb sappiamo che la direzione della forza è diretta lungo la congiungente delle due cariche:



Dalla teoria di Coulomb sappiamo che il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q ad una distanza r è pari a:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\widehat{u_r}$$

quindi, detto:

$\widehat{u_{r1}}$ il versore parallelo a $\overrightarrow{E_1}$

$\widehat{u_{r2}}$ il versore parallelo a $\overrightarrow{E_2}$

si ha:

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\widehat{u_{r1}}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\widehat{u_{r2}}$$

Se calcoliamo i moduli, si ottiene (le cariche sono uguali ed entrambe distano r dal punto P):

$$\left|\overrightarrow{E_1}\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\left|\overrightarrow{E_2}\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Ovvero:

$$\left|\overrightarrow{E_1}\right| = \left|\overrightarrow{E_2}\right| \qquad (1)$$

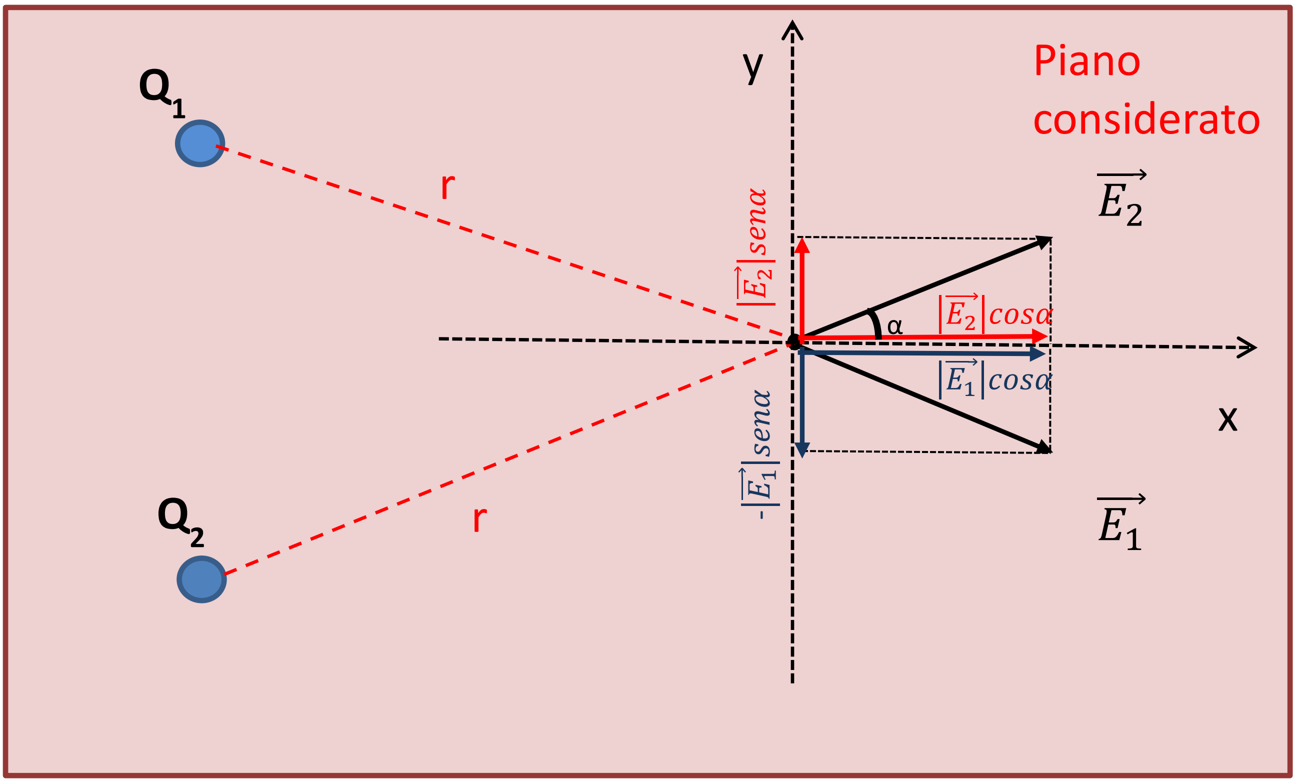
Il campo elettrico generato da Q_1 nel punto P ha lo stesso modulo del campo elettrico generato da Q_2 nel punto P, ma direzioni diverse. A questo punto è utile introdurre un sistema di riferimento cartesiano con centro nel punto O e asse y parallelo all'asse che congiunge le due cariche Q_1 e Q_2 .

Dalla geometria del problema si intuisce che entrambi i vettori $\overrightarrow{E_1}$ e $\overrightarrow{E_2}$ formano lo stesso angolo α con l'asse delle x. Possiamo quindi scomporre i due campi lungo l'asse x e lungo l'asse y del sistema di riferimento scelto. Denotando con:

$\widehat{u_x}$ il versore parallelo all'asse x

$\widehat{u_y}$ il versore parallelo all'asse y

si ottiene:



$$\overrightarrow{E_1} = \left|\overrightarrow{E_1}\right| cos\alpha\widehat{u_x} - \left|\overrightarrow{E_1}\right| sen\alpha\widehat{u_y}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \left|\overrightarrow{E_2}\right| cos\alpha\widehat{u_x} + \left|\overrightarrow{E_2}\right| sen\alpha\widehat{u_y}$$

Sommiamo vettorialmente i due contributi:

$$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = |\overrightarrow{E_1}|cos\alpha\widehat{u_x} - |\overrightarrow{E_1}|sen\alpha\widehat{u_y} + |\overrightarrow{E_2}|cos\alpha\widehat{u_x} + |\overrightarrow{E_2}|sen\alpha\widehat{u_y} =$$

$$\left(|\overrightarrow{E_1}| + |\overrightarrow{E_2}|\right) cos\alpha\widehat{u_x} + \left(|\overrightarrow{E_2}| - |\overrightarrow{E_1}|\right) sen\alpha\widehat{u_y}$$

Utilizzando la (1):

$$\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = 2|\overrightarrow{E_1}|cos\alpha\widehat{u_x} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} cos\alpha\widehat{u_x}$$

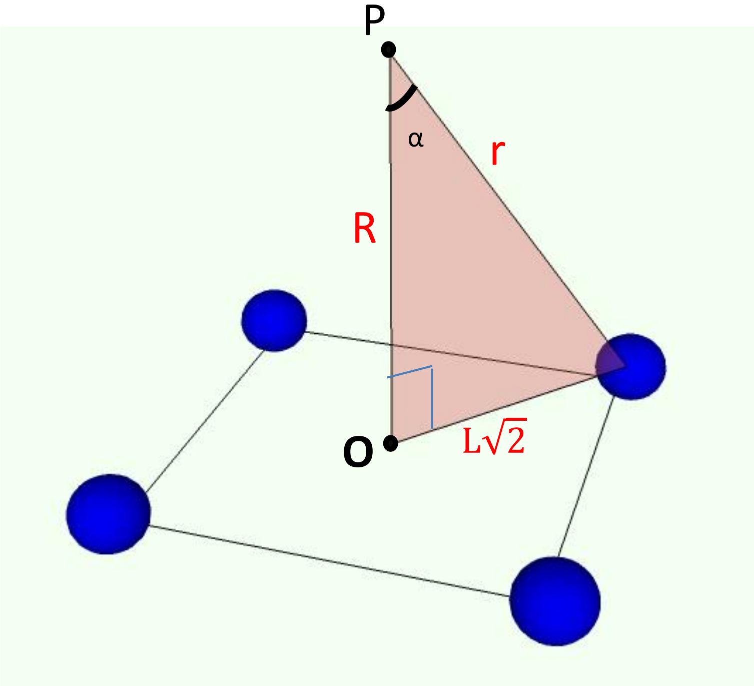
Questo è il contributo dovuto a due sole cariche. Ripetendo gli stessi passaggi per le altre due cariche diametralmente oppostte, per ovvie ragioni di simmetria si otterrà il medesimo risultato. In conclusione, il campo elettrico $\overrightarrow{E_{TOT}}$ generato da 4 cariche Q uguali in un punto P dell'asse avrà la seguente espressione:

$$\overrightarrow{E_{TOT}} = 4|\overrightarrow{E_1}|cos\alpha\widehat{u_x} = \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} cos\alpha\widehat{u_x} \qquad (2)$$

In base al sistema di riferimento scelto, l'asse x coincide con l'asse del quadrato.

Per tale motivo è conveniente riscrivere $\overrightarrow{E_{TOT}}$ in funzione della distanza R del punto P dal centro O.

Consideriamo il triangolo in figura:



Dal teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2} \qquad (3)$$

Dalla trigonometria:

$$cos\alpha = \frac{R}{r}$$

Usiamo la (3):

$$cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2}} \qquad (4)$$

L'espressione per $\overrightarrow{E_{TOT}}$ della (2) diventa, utilizzando (3) e (4):

$$\overrightarrow{E_{TOT}} = \frac{4Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} cos\alpha\widehat{u_x} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2} \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2}} \widehat{u_x} = \frac{QR}{\pi\varepsilon_0\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{3/2}} \widehat{u_x} \qquad (5)$$

B) IL CAMPO ELETTRICO AL CENTRO DEL QUADRATO.

Per determinare il campo elettrico al centro del quadrato, ovvero nel punto O, possiamo utilizzare l'espressione (5) che esprime $\overrightarrow{E_{TOT}}$ sull'asse in funzione della distanza R del punto P da O.

$\overrightarrow{E_{TOT}}$ in O significa che il punto P deve coincidere con il punto O, ovvero che R = 0.

Se nella (5) poniamo R = 0, discende immediatamente che:

$$\overrightarrow{E_{TOT}}(R = 0) = \vec{0}$$

Il campo elettrico nel centro del quadrato è quindi nullo.

C) IL PUNTO P DELL'ASSE IN CUI IL CAMPO ELETTRICO E' MASSIMO

L'espressione (5) è una funzione del campo elettrico rispetto alla distanza R dal centro del quadrato, con una natura vettoriale.

D'altro canto, il campo sull'asse giace solo lungo l'asse del quadrato: questo ci consente di "dimenticare" la natura vettoriale del campo, in quanto al variare del punto P sull'asse, la direzione e il verso dell' $\overrightarrow{E_{TOT}}$ non cambiano.

Quindi considero solo il modulo:

$$E_{TOT}(R) = \frac{QR}{\pi\varepsilon_0\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{3/2}}$$

E_{TOT} è una funzione scalare di R. Per determinare il punto dell'asse in cui E_{TOT} è massimo, utilizziamo un risultato noto dell'analisi matematica sulle funzioni scalari: i punti di massimo di una funzione rispetto ad una variabile si calcolano ponendo la derivata prima della funzione rispetto alla variabile uguale a zero.

Nel nostro caso dobbiamo derivare E_{TOT} rispetto a R e poi porre il risultato uguale a zero.

$$\frac{dE_{TOT}}{dR} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dR}\left(\frac{R}{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - R\frac{3}{2}\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} 2R}{\left\{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}^2}\right] =$$

$$= \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - 3R^2\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^3}\right]$$

Poniamola ora uguale a zero. Considerando che $\frac{Q}{\pi\varepsilon_0}$ non può essere nullo, si ha:

$$\frac{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - 3R^2\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^3} = 0$$

Conviene riscriverla nel modo seguente:

$$\frac{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^3} - 3R^2\frac{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^3} = 0$$

$$\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} - 3R^2\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{5}{2}} = 0$$

Raccogliamo $\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$ a fattor comune:

$$\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[1 - 3R^2\left[R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-1}\right] = 0$$

$$\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[1-\frac{3R^2}{R^2+2L^2}\right]=0 \qquad (6)$$

Considero il fattore $\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$:

$$\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left[R^2+\left(\sqrt{2}L\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

e non può essere nullo.

Quindi la (6) equivale a:

$$1-\frac{3R^2}{R^2+2L^2}=0$$

$$\frac{3R^2}{R^2+2L^2}=1$$

$$3R^2=R^2+2L^2$$

$$2R^2=2L^2$$

$$R=L$$

Il campo elettrico sarà massimo nel punto P dell'asse che dista L dal centro del quadrato, ovvero metà della lunghezza del lato del quadrato stesso.

D) IL POTENZIALE IN UN PUNTO P DELL'ASSE

E' noto che una carica puntiforme Q genera in un punto P distante r da Q un potenziale V pari a:

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (7)$$

Nel nostro caso, le 4 cariche ai vertici del quadrato sono identiche e distano tutte r da un fissato punto P dell'asse. Avvalendoci del principio di sovrapposizione, il potenziale V_p generato dalle 4 cariche in un punto P dell'asse distante r dalle 4 cariche sarà la somma scalare (perché il potenziale per definizione ha una natura scalare) dei 4 contributi indipendenti.

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + \left(\sqrt{2}L\right)^2}}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il risultato (3).

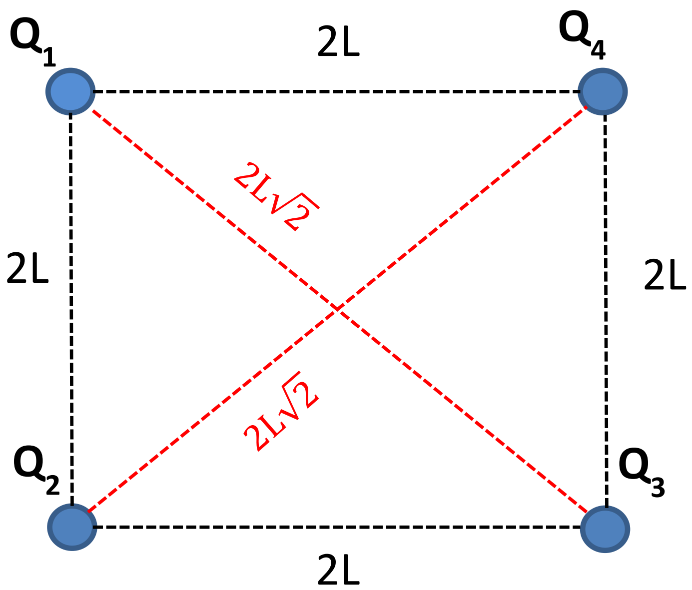
E) SE UNA CARICA q_0 E' POSTA NEL CENTRO DEL QUADRATO, CALCOLARE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA E IL LAVORO W PER PORTARE q_0 AD UNA DISTANZA INFINITA.

E' noto che l'energia potenziale elettrostatica U tra due cariche identiche Q distanti r l'una dall'altra è pari a:

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Per un sistema di N cariche Q, l'energia potenziale elettrostatica del sistema è data dalla somma dell'energia potenziale elettrostatica di tutte le coppie di cariche che posso considerare, prendendo ciascuna coppia una volta sola.

Calcoliamo l'energia elettrostatica U_{SIST} del nostro sistema :



Se indichiamo con:

$U_{i,j}$ l'energia elettrostatica tra la carica Q_i e la carica Q_j,

possiamo scrivere l'energia potenziale elettrostatica U_{SIST} del nostro sistema come:

$$U_{SIST} = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{4,1} + U_{1,3} + U_{2,4}$$

Dalla figura e utilizzando la (7) si evince che:

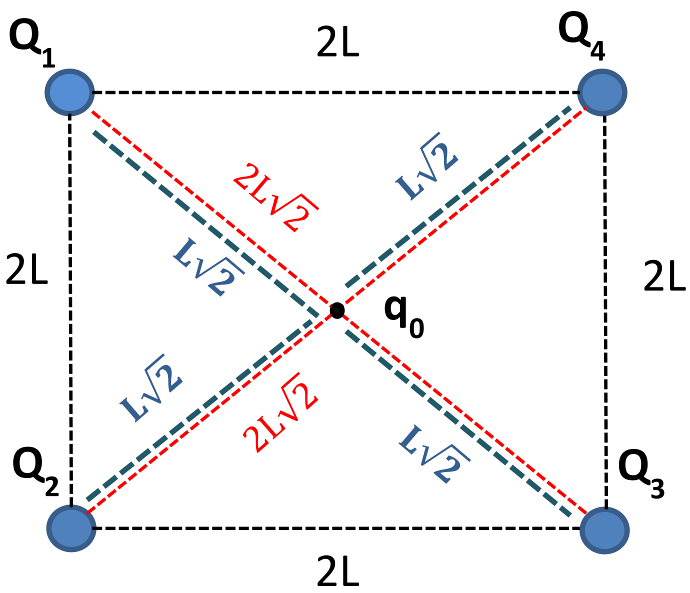
$$U_{1,2} = U_{2,3} = U_{3,4} = U_{4,1} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L}$$

$$U_{1,3} = U_{2,4} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L\sqrt{2}}$$

Quindi:

$$U_{SIST} = 4\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L} + 2\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 2L\sqrt{2}} = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}} \qquad (8)$$

Se aggiungo una carica q_0 nel centro del quadrato, l'energia potenziale elettrostatica U_{TOT}, del nuovo sistema la posso calcolare sommando a U_{SIST}, i 4 contributi derivanti dall'interazione di q_0 con le 4 cariche Q.



Se indichiamo con:

U_{Q_i,q_0} l'energia elettrostatica tra la carica Q_i e la carica q_0,

allora il contributo all'energia elettrostatica $U(q_0)$ dato dalla carica q_0 sarà:

$$U(q_0) = U_{Q_1,q_0} + U_{Q_2,q_0} + U_{Q_3,q_0} + U_{Q_4,q_0}$$

Dalla figura si evince che:

$$U_{Q_1,q_0} = U_{Q_2,q_0} = U_{Q_3,q_0} = U_{Q_4,q_0} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}}$$

e quindi:

$$U(q_0) = 4\frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}}$$

L'energia potenziale elettrostatica U_{TOT} del nuovo sistema sarà pari a :

$$U_{TOT} = U_{SIST} + U(q_0) = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}} + \frac{Qq_0}{\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}} \qquad (9)$$

E' noto che, detto:

U_{in} l'energia potenziale elettrostatica di un sistema nello stato iniziale

U_{fin} l'energia potenziale elettrostatica di un sistema nello stato finale

il lavoro è pari a:

$$W = -(U_{fin} - U_{in}) \qquad (10)$$

Il problema ci chiede di valutare il lavoro per portare la carica q_0 dal centro del quadrato sino ad una distanza infinita. Possiamo utilizzare la formula appena scritta per calcolare il lavoro.

Lo stato iniziale del sistema consiste nella carica q_0 al centro del quadrato: l'energia potenziale elettrostatica del sistema sarà pari a (9):

$$U_{in} = U_{TOT} = U_{SIST} + U(q_0) = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}} + \frac{Qq_0}{\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}}$$

Lo stato finale del sistema consiste nella carica q_0 a distanza infinita dalle 4 cariche Q: il sistema è quindi costituito dalle sole 4 cariche Q e l'energia potenziale elettrostatica è data dalla (0):

$$U_{fin} = U_{SIST} = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}}$$

Utilizzando la (10) e queste due ultime considerazioni si ottiene:

$$W = -\left(U_{fin} - U_{in}\right) = -\left(U_{SIST} - U_{SIST} - U(q_0)\right) = U(q_0) = \frac{Qq_0}{\pi\varepsilon_0 L\sqrt{2}}$$