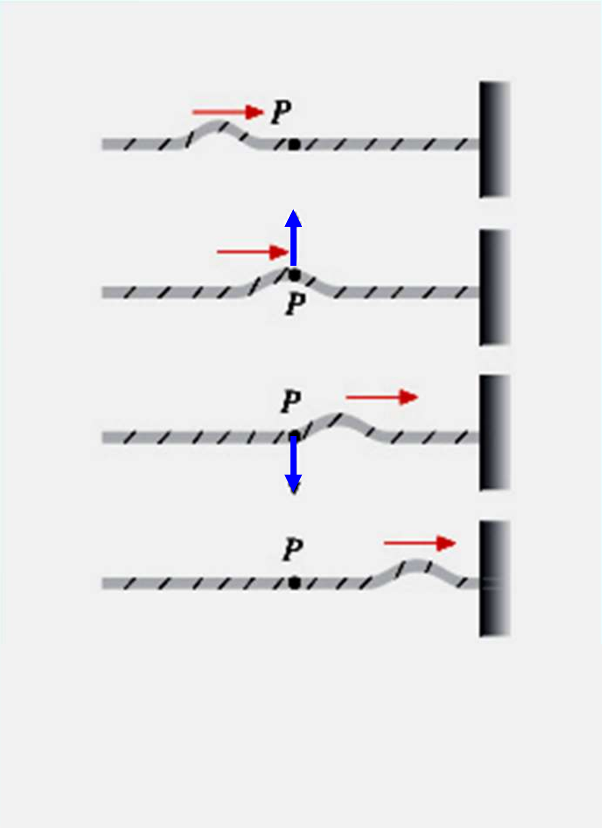
ONDE MECCANICHE

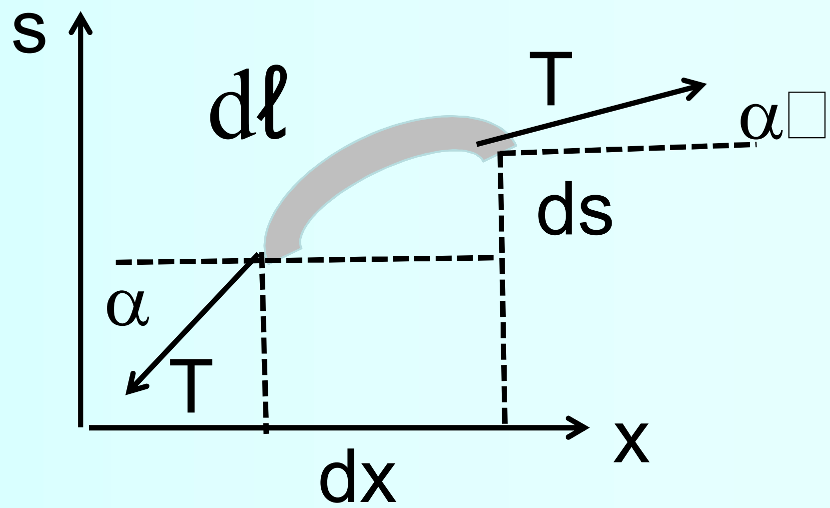
Si propagano in un mezzo materiale a causa dell'interazione tra gli atomi e le molecole del mezzo

Esempio:
Propagazione di un'onda lungo una corda tesa



Asse x coincidente con la posizione di equilibrio della corda

s(x,t) funzione che descrive lo spostamento dall'equilibrio



$d\ell$ lunghezza di un piccolo tratto di corda

T tensione agli estremi di $d\ell$

Risultante delle forze di tensione su $d\ell$

$$F_X = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) \qquad F_Y = T(\text{sen}\alpha' - \text{sen}\alpha)$$

Per piccoli spostamenti e, quindi, piccoli angoli

$$\cos\alpha = 1$$

$$\cos\alpha' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$F_X = 0$$

$$\Downarrow$$

non c'è spostamento
lungo la direzione della corda

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha' = \alpha'$$

$$\Downarrow$$

$$F_Y = T\left(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha\right)$$

$$= T\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg}\alpha\, dx$$

essendo

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg}\alpha\, dx$$

Poiché $\quad \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\partial s}{\partial x} \qquad F_Y = T\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}dx$

Legge di Newton applicata all'elemento di lunghezza dℓ e massa dm $\quad (\rho_\ell$ densità lineare di massa)

$$F_Y = T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}dx = dm\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_\ell\, dx\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_\ell}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = v^2\,\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

dove $\quad v^2 = \dfrac{T}{\rho_\ell}$

Lo spostamento trasversale generato in un estremo della corda si propaga con velocità v lungo la corda

Onda trasversale

Verifichiamo infatti che solamente una funzione del tipo

$$f(x \pm vt)$$

è soluzione dell’ equazione

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}}$$

equazione di D’Alambert

equazioni formalmente identica
a quella ottenuta per l’onda
che si propaga in una corda tesa

$$\boxed{f(x \pm vt)}$$

rappresenta un'onda piana che si propaga lungo l'asse x

Poniamo $u = x \pm vt$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \pm v}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{df}{du} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2 f}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\,\frac{d^2 f}{du^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm v\frac{df}{du}$$

Quindi

$$\boxed{\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}}$$

Soluzione generale dell'equazione di D'Alambert:

$$\boxed{f(x,t) = Af_1(x - vt) + Bf_2(x + vt)}$$

sovrapposizione di due funzioni che rappresentano un'onda progressiva e un'onda regressiva