

Corso di Fisica Teorica dello Stato Solido
Laurea Specialistica in Fisica
Indirizzo Fisica della Materia
Università di Bari, A.A. 2006-2007

Introduzione alla Teoria dello Stato Condensato

Giuseppe Nardulli

This work is licensed under a [Creative Commons](#)
“Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Un-
ported” license.



Indice

I	Teoria quantistica dei campi in materia condensata	1
1	Le teoria a molti corpi: Preliminari	3
1.1	Motivazioni per la formulazione a molti corpi	3
1.2	Spazio di Fock per un sistema di bosoni identici	5
1.3	Seconda quantizzazione di un sistema di fermioni identici	11
1.4	Esercizi	13
2	Superfluidità	15
2.1	Superfluidità	15
2.1.1	Modello microscopico	15
2.1.2	Trasformazioni di Bogoliubov	18
2.1.3	Spettro delle quasiparticelle	21
2.2	Lagrangiana per i superfluidi	23
2.3	Rottura spontanea della simmetria e teorema di Goldstone	25
2.4	Esercizi	27
3	Superconduttività	29
3.1	Descrizione fenomenologica della superconduttività . . .	29
3.1.1	Funzione d'onda del condensato	29
3.1.2	Effetto Meissner	31
3.1.3	Quantizzazione del flusso del campo magnetico .	33
3.2	Coppie di Cooper	35
3.3	Teoria BCS	37
3.3.1	Il modello	37
3.3.2	Trasformazione di Bogoliubov	38
3.3.3	Equazione di gap	40
3.3.4	Soluzioni dell'equazione di gap a $T = 0$	41
3.3.5	Significato fisico del parametro di gap	42
3.3.6	Proprietà termodinamiche	44
3.4	Simmetria di gauge locale e meccanismo di Higgs Anderson	45

3.5	Esercizi	47
II	Solidi	49
4	Introduzione alla teoria dell'elasticità	51
4.1	Tensore delle deformazioni	51
4.2	Tensore degli sforzi	53
4.3	Tensore di elasticità	56
4.4	Compressioni uniformi, deformazioni omogenee	59
4.5	Proprietà elastiche dei cristalli	61
4.6	Equazioni del moto in un corpo elastico	62
4.7	Soluzione delle equazioni del moto: onde elastiche nei solidi	64
4.8	Azione per un solido cristallino isotropo	66
4.9	Esercizi	68
4.10	Soluzioni di esercizi scelti	68
5	Fononi e loro interazioni	71
5.1	Quantizzazione del campo fononico libero	71
5.2	Interazioni e schema d'interazione	74
5.3	Formula di Dyson	77
5.4	Second'ordine perturbativo	79
5.5	Teorema di Wick	79
5.6	Propagatore del fonone	82
5.7	Teoria perturbativa	86
5.8	Diagrammi di Feynman	90
5.9	Esercizi	92
III	Fluidi	95
6	Meccanica dei fluidi non viscosi	97
6.1	Statica dei fluidi	97
6.2	Fluidi perfetti	99
6.3	Vorticità, moto potenziale, circuitazione	102
6.4	Soluzione delle equazioni del moto per fluidi perfetti non viscosi	103
6.5	Flusso stazionario, linee di flusso e teorema di Bernoulli	104
6.6	Linee di vortice	106
6.7	Flusso di energia	107

6.8	Flusso d'impulso	108
6.9	Esercizi e complementi	109
7	Moti browniani	111
7.1	Moti browniani	111
7.2	Random walk	112
7.3	Relazione diffusione-dissipazione	115
7.4	Legge di Fick e legge di diffusione	117
7.5	Distribuzione gaussiana	118
7.6	Trasporto di calore ed altri fenomeni di trasporto	120
7.7	Esercizi e complementi	121
8	Dinamica dei fluidi viscosi	123
8.1	Fluidi viscosi	123
8.2	Equazione di Navier-Stokes	125
8.3	Leggi di scala e numero di Reynolds	126
8.4	Il caso limite di bassi numeri di Reynolds	128
8.5	Moto ad alti numeri di Reynolds: strato limite e turbolenza	129
8.6	Esercizi e complementi	131

Premessa

Oltre ai volumi richiamati nelle note si possono consultare, ad integrazione di queste lezioni:

- Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin, *Thermodynamics, Statistical Physics, and Kinetics*, Mir Pub., Moscow, 1980.
- A. Zee, *Quantum Field theory in a Nutshell*, Princeton Un. Press, 2003.
- E. Lifschitz, L.P.Pitaevskij *Fisica Statistica: parte seconda*, Edd. Riuniti Mir, Roma 1981 (si tratta del IX volume del corso di Fisica Teorica di Landau e Lifschitz).
- L. Landau et E. Lifschitz, *Théorie de l'élasticité*, Ed. Mir, Moscou, 1967.
- *The Feynman lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1965, Voll. II, III.
- C. Nayak, Lectures, Physics 242, Univ. California, reperibili on line sul sito dell'autore (o da Altman Simons).
- L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique des fluides*, Ed. Mir, Moscou, 1971.
- P. Nelson, *Biological Physics*, New York, USA, 2004.
- A.H. Shapiro, *Profili veloci*, Bologna, 1965.

Parte I

Teoria quantistica dei
campi in materia
condensata

Capitolo 1

Le teoria a molti corpi: Preliminari

1.1 Motivazioni per la formulazione a molti corpi

Scopo del corso è fornire un'introduzione alla **teoria quantistica dei campi** (o **teoria a molti corpi**) in fisica dello stato condensato. La teoria quantistica dei campi è una tecnica largamente diffusa, la si utilizza infatti non solo in fisica dello stato solido o dei liquidi quantistici (studieremo esempi in entrambi i casi), ma anche in fisica nucleare ed in fisica delle particelle elementari. L'elemento che distingue la teoria a molti corpi dagli approcci elementari (ad esempio la meccanica quantistica non relativistica: MQ) è il seguente. In MQ si studia l'interazione di una o più particelle con un potenziale esterno. La reazione della/e particelle interagenti con la sorgente del potenziale non viene presa in considerazione o, quando lo si fa, si assume che la trasmissione dell'interazione avvenga con velocità infinita (forze agenti a distanza). Si tratta ovviamente di una approssimazione. Quando è necessario tener conto degli effetti relativistici, ad esempio perché le velocità delle particelle sono elevate, questa approssimazione non è più valida, dato che nessuna interazione può propagarsi con velocità maggiore della velocità della luce nel vuoto. In fisica delle particelle elementari le velocità sono di norma relativistiche e questa è la prima ragione per usare la teoria quantistica dei campi, un approccio che va oltre la MQ e tien conto simultaneamente di tutte le particelle. Una seconda ragione è la seguente. Quando si tien conto della relatività il numero delle particelle

in gioco non può essere considerato fisso, perché è possibile la trasformazione di massa in energia e viceversa. Se quindi consideriamo, ad esempio, l'urto di due particelle, occorre tener conto degli effetti di tutte le particelle che potrebbero essere prodotte durante l'urto o mediante la trasformazione dell'energia delle due particelle collidenti in massa o anche in violazione della legge di conservazione dell'energia per tempi molto brevi¹. La MQ non consente una descrizione del genere perché il numero delle particelle è sempre fisso. Occorre una descrizione più avanzata, ed essa è offerta dalla teoria quantistica dei campi.

Anche in fisica dello stato condensato è necessario, per una descrizione accurata, andare oltre la MQ. In questo caso la motivazione non risiede nell'elevata velocità delle particelle, dal momento che, in questo caso, esse sono non relativistiche. Per trovare anche in questo caso una motivazione facciamo un esempio. Consideriamo lo stato fondamentale di un sistema di bosoni identici a temperatura $T = 0$. Supponiamo che essi siano liberi e non relativistici. Essi tenderanno ad occupare tutti lo stesso livello energetico fondamentale caratterizzato da $\mathbf{p}=0$ (in meccanica statistica questo fenomeno viene chiamato condensazione di Bose-Einstein). Se ora introduciamo nel formalismo l'interazione tra i bosoni, si comprende subito che sarebbe artificioso descrivere il moto di un singolo bosone mediante un potenziale. Tutti i bosoni sono infatti tra loro interagenti e sono tutti sullo stesso piano. Analogamente se consideriamo degli elettroni in un reticolo cristallino, in prima approssimazione possiamo descriverli mediante la MQ, immaginando gli elettroni immersi in un una regione di spazio in cui è presente un potenziale periodico. Questa descrizione elementare, tuttavia, non tien conto del fatto che il moto degli elettroni altera la disposizione degli ioni nei siti reticolari e di questa retroazione occorre tener conto. Anche in questi casi sono le tecniche della teoria quantistica dei campi o teoria a molti corpi a fornire gli strumenti adatti.

A parte l'uso o il non uso della relatività, c'è un altro aspetto che distingue l'utilizzo della teoria di campo in fisica delle particelle ed in fisica dello stato condensato. In fisica delle particelle normalmente di lavora a $T = 0$, il che vuol dire che si tien conto delle fluttuazioni quantistiche, ma non delle fluttuazioni termiche². Invece in fisica dello stato solido occorre tener conto di entrambe. Un'altra differenza tra

¹Ciò è consentito dalla relazione di incertezza energia tempo, che asserisce che per in un tempo Δt sono ammesse violazioni della legge di conservazione dell'energia dell'ordine di $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$.

²In meccanica statistica classica invece si tien conto delle fluttuazioni termiche, ma non di quelle quantistiche.

queste parti della fisica è costituita dalle scale di energia coinvolte. In fisica delle particelle energie tipiche sono il GeV (10^9 eV) (o il TeV= 10^{12} eV); in fisica nucleare il MeV (10^6 eV), in fisica dello stato solido, le energie tipiche sono inferiori all'elettron-Volt. Le scale spaziali sono invece tipicamente $r \gg \text{\AA}$. Ovviamente scale energetiche e spaziali (o temporali) sono collegate: se una aumenta l'altra deve diminuire in ragione delle relazioni di indeterminazione.

1.2 Spazio di Fock per un sistema di bosoni identici

Consideriamo un sistema di N bosoni identici, ad esempio un sistema costituito da atomi di ${}^4\text{He}$; supponiamo per ora che si possa trascurare la loro interazione. Se $N = 1$ siano $\hat{\mathbf{P}}$ e $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m}$ gli operatori impulso ed energia. Se $|\mathbf{k}\rangle$ sono gli autoket dell'impulso con

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') , \quad (1.1)$$

si ha³

$$\hat{\mathbf{P}}|\mathbf{k}\rangle = \mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle \quad (1.2)$$

$$\hat{H}|\mathbf{k}\rangle = \frac{k^2}{2m}|\mathbf{k}\rangle \quad (1.3)$$

Se invece $N = 2$ scriveremo

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{j=1}^2 \hat{\mathbf{P}}_j \quad (1.4)$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \frac{\mathbf{P}_j^2}{2m} \quad (1.5)$$

e se $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$ sono gli autoket dell'impulso con

$$\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2 \rangle = \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1)\delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_2) + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_2)\delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) , \quad (1.6)$$

³Notiamo che in teoria quantistica dei campi si usa comunemente il seguente sistema di unità di misura, detto *relativistico*:

$$\hbar = c = 1 ,$$

che nel seguito adotteremo.

si avrà

$$\hat{\mathbf{P}}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle \quad (1.7)$$

$$\hat{H}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle = \left(\frac{k_1^2}{2m} + \frac{k_2^2}{2m} \right) |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle . \quad (1.8)$$

È evidente che se il numero delle particelle del sistema non è fisso, questa procedura non risulta praticabile. Consideriamo allora lo spazio di Hilbert generato dalle combinazioni lineari dei ket $|\mathbf{k}\rangle$, $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle$, $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle$. L'insieme dei vettori

$$\{|0\rangle, |\mathbf{k}\rangle, |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle, |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle, |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle, \dots\} \quad (1.9)$$

dicesi **spazio di Fock**. La rappresentazione in cui i vettori di base siano i vettori dello spazio di Fock si chiama di **seconda quantizzazione**. Lo spazio di Fock è costituito da tutti gli stati che risultano autostati di impulso ed energia, qualunque sia il numero delle particelle del sistema. Occorre definire ora l'azione degli operatori impulso ed energia sui vettori di questo spazio. Per far questo introduciamo l'operatore di creazione $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ definito nel modo seguente

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle &= |\mathbf{k}\rangle, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger|\mathbf{k}_1\rangle &= |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

In generale si ha

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_n}^\dagger \dots \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \quad (1.11)$$

di modo che gli operatori di creazione generano tutti i vettori dello spazio di Fock a partire dallo stato di minima energia (*stato di vuoto*) avente ket $|0\rangle$. Si noti che gli operatori $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ commutano tutti tra di loro perché il sistema è costituito da bosoni identici.

Introduciamo inoltre un nuovo operatore, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, che chiameremo operatore di distruzione. Esso opera nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle &= 0, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}\rangle &= |0\rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

In generale si ha

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_n} \dots \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{k}_1} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = |0\rangle . \quad (1.13)$$

Anche gli operatori $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ commutano tra di loro.

Occorre infine postulare una regola di commutazione tra operatori di creazione e di distruzione. Assumiamo

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_1}, \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger] \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (1.14)$$

mentre, come abbiamo già notato,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}_1}, \hat{a}_{\mathbf{k}_2}] = 0. \quad (1.15)$$

Proprietà.

Energia ed impulso si possono scrivere nel modo seguente:

$$\hat{H} = \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \int d^3k \mathbf{k} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (1.16)$$

con

$$\omega_k = \frac{k^2}{2m}. \quad (1.17)$$

Dim. Occorre provare che, qualunque sia n , se (1.16) definiscono $\hat{\mathbf{P}}$ e \hat{H} , si ha

$$\hat{\mathbf{P}}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n)|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \quad (1.18)$$

$$\hat{H}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle = \left(\frac{k_1^2}{2m} + \frac{k_2^2}{2m} + \dots + \frac{k_n^2}{2m} \right) |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n\rangle \quad (1.19)$$

La prova è per induzione e la svolgeremo solo per l'eq. (1.19). Si vede subito che

$$\hat{H}|0\rangle = \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad (1.20)$$

e che inoltre

$$\begin{aligned} \hat{H}|\mathbf{k}_1\rangle &= \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger |0\rangle = \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) |0\rangle \\ &= \omega_{k_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger |0\rangle = \frac{k_1^2}{2m} |\mathbf{k}_1\rangle. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dunque, la proprietà vale per $n = 0, 1$. Supponiamo che la (1.19) sia vera per $n = m$. Allora :

$$\begin{aligned} \hat{H}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{m+1}\rangle &= \hat{H} \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \\ &= \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \\ &= \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \left(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{m+1}) + \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_{k_{m+1}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{m+1}\rangle + \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger \int d^3k \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \\
&= \omega_{k_{m+1}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{m+1}\rangle + \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger \hat{H} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \\
&= \omega_{k_{m+1}} |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{m+1}\rangle + \hat{a}_{\mathbf{k}_{m+1}}^\dagger \sum_{k=1}^m \omega_k |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \omega_k |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{m+1}\rangle \quad \dots
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Definiamo ora l'operatore numero d'occupazione \hat{N}

$$\hat{N} = \int d^3k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \tag{1.23}$$

mentre

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \tag{1.24}$$

dicesi operatore numero d'occupazione dello stato di numeri quantici \mathbf{k} . È chiaro che tutti i vettori dello spazio di Fock sono autoket di \hat{N} con autovalore pari al numero totale di particelle nello stato. La prova è simile a quella della proprietà precedente ed è omessa per brevità. Notiamo infine che anziché $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger, N_{\mathbf{k}}$ scriveremo anche talora $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}), N(\mathbf{k})$.

A partire dagli operatori di creazione e distruzione costruisco i seguenti campi:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \tag{1.25}$$

$$\hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} . \tag{1.26}$$

$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ soddisfa l'equazione

$$i \frac{\partial \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m} \hat{\Phi}(\mathbf{x}, t) \tag{1.27}$$

Questa equazione è formalmente analoga all'equazione di Schroedinger, ma, al posto della funzione d'onda abbiamo qui un operatore⁴.

Questo risultato permette di guardare all'intera procedura secondo un altro punto di vista, quello di una teoria di campo. Questo punto di vista sarà da noi seguito adottato nel seguito.

⁴Per questa ragione Φ vien detta funzione d'onda di seconda quantizzazione.

Infatti $\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ è un operatore cui classicamente corrisponde un campo $\Phi(\mathbf{x}, t)$. L'esistenza di un analogo classico per $\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ deriva dal fatto che stiamo considerando un sistema di bosoni. Infatti i bosoni identici manifestano la tendenza ad addensarsi nello stesso stato quantistico, cioè a possedere gli stessi umeri quantici. Questo implica che la funzione d'onda di un sistema di bosoni ha un significato macroscopico⁵. In questo caso essa non è un operatore ma una vera e propria funzione, derivabile da una azione. Si vede subito che l'azione classica sarà nel nostro caso

$$S[\Phi, \Phi^\dagger] = \int dt d^3r \Phi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \Phi \quad (1.28)$$

che permette di ottenere un'equazione per Φ , che è poi l'equazione di Schrödinger per la particella libera. Per ottenere invece l'equazione (1.27) occorre passare ad una teoria quantistica e fare una ulteriore ipotesi, cioè che Φ e Φ^\dagger siano operatori. Ovviamente, quando si promuovono le funzioni al rango di operatori, le decomposizioni (1.26), che nel caso classico hanno il significato di trasformate di Fourier di funzioni, divengono equazioni operatoriali e i coefficienti di Fourier $a_{\mathbf{k}}$ e i loro complessi coniugati assumono il significato di operatori.

Prima di riassumere i risultati ottenuti osserviamo che nel seguito supporremo spesso che il nostro sistema di bosoni identici sia contenuto in una volume finito V . Quindi i numeri quantici \mathbf{k} sono quantizzati:

$$\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n} ; \quad (1.29)$$

le autofunzioni dell'impulso sono⁶

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.30)$$

e soddisfano

$$\int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

mentre l'analogo delle eqq. (1.14)-(1.15) è dato da

$$[a_{\mathbf{k}_1}, a_{\mathbf{k}_2}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}, \quad [a_{\mathbf{k}_1}^\dagger, a_{\mathbf{k}_2}^\dagger] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}_1}, a_{\mathbf{k}_2}] = 0 \quad (1.31)$$

⁵Ad esempio la funzione d'onda di un gas di fotoni è nel limite classico il campo elettromagnetico. Il carattere classico deriva dal fatto che, assumendo \mathbf{k} discreto, $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + 1 = \hat{N}_{\mathbf{k}} + 1 \simeq N_{\mathbf{k}}$, dal momento che sullo spazio di Fock $\hat{N}_{\mathbf{k}}$ è un numero ed è molto grande ($\hat{N}_{\mathbf{k}}$ conta il numero di particelle con impulso \mathbf{k}). Ne segue che $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$ commutano. Dunque tutti gli operatori della teoria commutano tra di loro e siamo perciò in fisica classica, caratterizzata per l'appunto da osservabili che sono funzioni e non operatori.

⁶A rigore queste sono autofunzioni dell'impulso solo per $V \rightarrow \infty$.

Si osservi che per ogni fissato \mathbf{k} $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ soddisfano le stesse regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione per l'oscillatore armonico. È questa la ragione per cui, come abbiamo osservato, l'operatore

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (1.32)$$

ha autovalori $N = 0, 1, 2, \dots$ e va interpretato come operatore numero di particelle con impulso \mathbf{k} .

Riscriviamo l'operatore di campo introdotto in (1.25) nel caso discreto e calcoliamolo al tempo $t = 0$:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) a_{\mathbf{p}} . \quad (1.33)$$

L'operatore di campo è utile perché permette di esprimere gli operatori relativi al sistema di particelle in maniera semplice. Consideriamo ad esempio l'operatore

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{N}_{\mathbf{p}} \quad (1.34)$$

Si ha

$$\hat{N} = \int d\mathbf{r} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Phi}(\mathbf{r}) . \quad (1.35)$$

Difatti

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \sum_{\mathbf{p}} \hat{N}_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \\ &= \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Phi}(\mathbf{r}) . \end{aligned}$$

Questo risultato si generalizza facilmente a tutti gli operatori additivi, cioè della forma

$$\mathbf{A} = \sum A \quad (1.36)$$

in cui la somma è estesa a tutte le particelle. Si ha infatti

$$\mathbf{A} = \int d\mathbf{r} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}) A \hat{\Phi}(\mathbf{r}) . \quad (1.37)$$

Per provare questa formula supponiamo di aver scelto come funzioni ψ_p le autofunzioni di A :

$$A\psi_p = A_p\psi_p . \quad (1.38)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}) A \hat{\Phi}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} A_q a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} A_q a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}} \delta_{pq} = \sum_p A_p a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}} A_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} . \end{aligned}$$

E' chiaro che questo operatore è proprio \mathbf{A} nella rappresentazione della seconda quantizzazione, e ciò termina la prova. Abbiamo già incontrato due esempi: l'operatore impulso totale e l'energia cinetica:

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k}} , \quad (1.39)$$

$$\hat{H}_{cin} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2}{2m} \hat{N}_{\mathbf{k}} . \quad (1.40)$$

Si prova infine che se tra le particelle c'è una energia d'interazione che dipende solo dalla distanza reciproca

$$H_{int} = \sum_{i \neq j} W(r_{ij}) , \quad (1.41)$$

allora nella rappresentazione della seconda quantizzazione si ha:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}_2) W(r_{12}) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1) , \quad (1.42)$$

che si può scrivere anche nel modo seguente:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \vec{k}'_2) a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}'_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1} , \quad (1.43)$$

in cui la somma è su tutti gli impulsi e

$$W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2) = V \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_1+\mathbf{k}'_2} \int d\mathbf{r} W(r) e^{i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}'_1)\mathbf{r}} . \quad (1.44)$$

La dimostrazione di queste formule è lasciata come problema al lettore.

1.3 Seconda quantizzazione di un sistema di fermioni identici

Esaminiamo ora il formalismo della seconda quantizzazione per un sistema di fermioni identici. Il formalismo bosonico si estende facilmente,

ma c'è una differenza sostanziale. Gli operatori di creazione e distruzione devono soddisfare in questo caso a regole di anticommutazione, anziché di commutazione:

$$a_p a_{p'} + a_{p'} a_p = 0 , \quad (1.45)$$

$$a_p^\dagger a_{p'}^\dagger + a_{p'}^\dagger a_p^\dagger = 0 , \quad (1.46)$$

$$a_p a_{p'}^\dagger + a_{p'}^\dagger a_p = \delta_{pp'} . \quad (1.47)$$

Si noti che in questo caso p denota un set completo di numeri quantici, incluso lo spin. Introduciamo, accanto a questi operatori, l'operatore numero di occupazione:

$$\hat{N}_p = a_p^\dagger a_p . \quad (1.48)$$

Sussiste l'identità

$$\left(\hat{N}_p\right)^2 = \hat{N}_p . \quad (1.49)$$

Difatti

$$\left(\hat{N}_p\right)^2 = a_p^\dagger a_p a_p^\dagger a_p = a_p^\dagger (1 - a_p^\dagger a_p) a_p ; \quad (1.50)$$

abbiamo qui usato la proprietà che segue dalle relazioni di anticommutazione

$$a^2 = a^{\dagger 2} = 0 . \quad (1.51)$$

A causa di questa equazione gli autovalori di N_p sono 0 e 1: in altre parole le relazioni di anticommutazione assicurano la validità del principio di esclusione di Pauli.

I vettori di base dello spazio di Fock hanno ora la forma

$$| N_1 N_2, \dots, N_p, \dots \rangle , \quad (1.52)$$

con $N_k = 0, 1$. Gli operatori a e a^\dagger operano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} a_k | N_1 N_2, \dots, 1_k, \dots \rangle &= | N_1 N_2, \dots, 0_k, \dots \rangle ; \\ a_k | N_1 N_2, \dots, 0_k, \dots \rangle &= 0 ; \\ a_k^\dagger | N_1 N_2, \dots, 1_k, \dots \rangle &= 0 ; \\ a_k^\dagger | N_1 N_2, \dots, 0_k, \dots \rangle &= | N_1 N_2, \dots, 1_k, \dots \rangle . \end{aligned}$$

E' ovvio che le funzioni d'onda di questi sistemi di particelle risultano antisimmetriche per scambio di una coppia qualsiasi di particelle; supponiamo infatti di scambiare due particelle negli stati k e j ; partiamo dallo stato

$$| N_1 N_2, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots \rangle , \quad (1.53)$$

e supponiamo che tra 1_k e 1_j vi siano un certo numero di zeri e ℓ 1. Si ha chiaramente

$$| N_1 N_2, \dots, 1_k, \dots, 1_j, \dots \rangle = a_{n_1}^\dagger a_{n_2}^\dagger \dots a_k^\dagger a_{m_1}^\dagger \dots a_{m_\ell}^\dagger \dots a_j^\dagger a_{n'_1}^\dagger \dots | 0 \rangle, \quad (1.54)$$

in cui abbiamo scritto tutti gli operatori di creazione relativi ai livelli occupati

$$n_1, n_2, \dots, k, m_1, \dots, m_\ell, j, \dots, n'_1, \dots$$

Ora scambiare le particelle j e k implica un fattore $(-1)^{2\ell+1}$, come è immediato accorgersi, e, quindi un segno meno, il che è all'origine dell'antisimmetria della funzione d'onda di un sistema di fermioni identici.

Non ci soffermiamo ulteriormente sulla seconda quantizzazione di un sistema di fermioni identici, che ripercorre il formalismo già descritto per i bosoni.

1.4 Esercizi

- 1) Provare che dall'azione (1.28) deriva l'equazione di Schroedinger.

Capitolo 2

Superfluidità

2.1 Superfluidità

La superfluidità è la proprietà che ha l'elio liquido a basse temperature di scorrere nei capillari senza attrito e, quindi, senza perdita di energia. L'elio 4 manifesta questa proprietà al di sotto di una temperatura critica pari a circa 2.2 K (l'altro isotopo, l'elio 3, diviene superfluido a temperature molto inferiori).

2.1.1 Modello microscopico

Esporremo ora la trattazione teorica della superfluidità dell'elio 4 basata sulle idee di Landau, nella formulazione di N. N. Bogoliubov. Essa si basa sull'ipotesi che le molecole di He^4 costituiscano un gas di bosoni con una debole interazione dipendente dalla distanza:

$$V_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W(r_{ij}) . \quad (2.1)$$

Nel formalismo della seconda quantizzazione, questa energia d'interazione dà luogo al seguente operatore hamiltoniano, espresso mediante gli operatori di creazione e di distruzione di quanti di impulso \vec{k} :

$$H = H_{cin} + H_i ,$$

con

$$H_{cin} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \hat{N}(\mathbf{k}) , \quad (2.2)$$

$$H_i = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}'_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}'_2} W(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1|) a^\dagger(\mathbf{k}'_1) a^\dagger(\mathbf{k}'_2) a(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1) \quad (2.3)$$

in cui la somma è su tutti gli impulsi, $\hat{N}(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ è l'operatore numero relativo all'impulso \mathbf{k} , ω_k l'energia cinetica del singolo atomo:

$$\omega_k = \frac{k^2}{2m}, \quad (2.4)$$

e

$$W(k) = \int d\vec{r} W(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.5)$$

è la trasformata di Fourier dell'energia di interazione. Ovviamente ci poniamo nell'ipotesi di basse ($T \simeq 0$ K) temperature. Sappiamo che i bosoni tendono ad addensarsi negli stessi stati quantici; per temperature vicine allo zero assoluto si tratta dello stato di minima energia, cioè lo stato fondamentale. Se N è il numero totale di molecole, allora

$$N_0 \simeq N, \quad (2.6)$$

se N_0 è il numero di molecole nello stato fondamentale; in altre parole

$$\frac{N - N_0}{N_0} \ll 1. \quad (2.7)$$

Il significato fisico dell'eq. (2.6) è il seguente: l'operatore *numero di particelle dello stato fondamentale* $\hat{N}(0)$ cessa di essere un operatore giacché in ogni stato quantico esso ha sempre lo stesso valore $N_0 \simeq N$. Se ora $|N_0\rangle$ è l'autoket dell'operatore $\hat{N}(0)$ relativo all'autovalore N_0 :

$$\hat{N}(0)|N_0\rangle = a^\dagger(0)a(0)|N_0\rangle = N_0|N_0\rangle, \quad (2.8)$$

si ha

$$a(0)a^\dagger(0)|N_0\rangle = (1 + a^\dagger(0)a(0))|N_0\rangle = (N_0 + 1)|N_0\rangle. \quad (2.9)$$

Dal momento che $N_0 \simeq N \gg 1$, possiamo porre $N_0 + 1 \simeq N_0$. Ne segue che non solo $N(0)$ è un numero, ma tali sono anche gli operatori di creazione e distruzione dello stato fondamentale $a^\dagger(0)$ e $a(0)$, dal momento che essi commutano tra di loro (oltre che con tutti gli altri operatori $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$, con $\mathbf{k} \neq 0$). Ne segue che possiamo porre

$$a^\dagger(0) = a(0) = \sqrt{N_0} = \sqrt{N(0)}. \quad (2.10)$$

L'approssimazione della teoria di Bogoliubov consiste nel considerare gli operatori $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$ (con $\mathbf{k} \neq 0$) piccoli rispetto a $a^\dagger(0) = a(0)$ e,

quindi nel conservare nelle somme (2.2) e (2.3) solo i termini i termini quartici e quadratici in $a(0)$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
H_i &= \frac{1}{2V} \left\{ W(0) \left[a^\dagger(0)a(0) \right]^2 + \right. \\
&+ 2 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [W(0) + W(k)] a^\dagger(0)a(0)a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \\
&+ \sum_{\mathbf{k} \neq 0} W(k) \left\{ [a(0)]^2 a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) + [a^\dagger(0)]^2 a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right\} \left. \right\} = \\
&= \frac{1}{2V} \left\{ W(0)N_0^2 + \right. \\
&+ N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [W(0) + W(k)] \left[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right] + \\
&+ N_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} W(k) \left\{ a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right\} \left. \right\}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Difatti nella somma

$$\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2} W(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1|) a^\dagger(\mathbf{k}'_1) a^\dagger(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) a(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1), \quad (2.12)$$

esistono 6 possibilità di ottenere due degli argomenti degli operatori di creazione/distruzione nulli: 1) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 = 0$; 2) $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0$; 3) $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 = 0$; 4) $\mathbf{k}_2 = 0$ e $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1$; 5) $\mathbf{k}_1 = 0$ e $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1$; 6) $\mathbf{k}'_1 = 0$ e $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$.

Consideriamo ora l'operatore numero di particelle, che indichiamo con \hat{N} ; si ha

$$\hat{N} = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right\}. \quad (2.13)$$

Da questa equazione ricaviamo N_0 e lo sostituiamo nella precedente, trascurando tutti i termini che non contengono \hat{N}^2 o \hat{N} :

$$\begin{aligned}
H_i &= \frac{1}{2V} \left\{ W(0)\hat{N}^2 + \hat{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} W(k) \left[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right] + \right. \\
&+ \hat{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} W(k) \left\{ a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right\} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Per ottenere l'operatore hamiltoniano occorre sommare a questo risultato l'energia cinetica; si ottiene:

$$H = \frac{W(0)N^2}{2V} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right] \left[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a^\dagger(-\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{W(k)N}{V} \left[a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k}) \right] . \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Si noti che abbiamo scritto nuovamente $\hat{N} = N$ sfruttando il fatto che $N \simeq N_0$.

2.1.2 Trasformazioni di Bogoliubov

Si presti attenzione al terzo termine nella (2.14). Mentre i primi due descrivono termini di conteggio, il terzo descrive la formazione (o la distruzione) di una coppia di particelle con $\mathbf{k} \neq 0$. Per semplificare la trattazione si ricorre allora ad una trasformazione degli operatori a^\dagger e a in favore di nuovi operatori ξ^\dagger e ξ . Questi descrivono la creazione e la distruzione di eccitazioni collettive (dette anche *quasiparticelle*) del liquido quantistico. Tale trasformazione dicesi di Bogoliubov-Valatin ed è definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{k}) &= \xi(\mathbf{k}) \cosh \phi(k) + \xi^\dagger(-\mathbf{k}) \sinh \phi(k) , \\
a^\dagger(\mathbf{k}) &= \xi^\dagger(\mathbf{k}) \cosh \phi(k) + \xi(-\mathbf{k}) \sinh \phi(k) , \quad (2.15)
\end{aligned}$$

in cui ϕ è una funzione reale di $|\mathbf{k}|$ (non un operatore). Si prova facilmente che

$$\begin{aligned}
[\xi(\mathbf{k}), \xi(\mathbf{k}')] &= 0 , \\
[\xi^\dagger(\mathbf{k}), \xi^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0 , \\
[\xi(\mathbf{k}), \xi^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} . \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Queste equazioni esprimono il fatto che la trasformazione di Bogoliubov-Valatin è canonica. Ricavando a e a^\dagger dalle (2.15) e sostituendo nella equazione precedente si ottiene

$$\begin{aligned}
H &= \frac{W(0)N^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right] \left\{ 2 \sinh^2 \phi + \right. \\
& + (\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi) \left[\xi^\dagger(\mathbf{k})\xi(\mathbf{k}) + \xi^\dagger(-\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) \right] + \\
& + 2 \sinh \phi \cosh \phi \left[\xi(\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) + \xi^\dagger(\mathbf{k})\xi^\dagger(-\mathbf{k}) \right] \left. \right\} + \\
& + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{W(k)\hat{N}}{2V} \left\{ 2 \sinh \phi \cosh \phi \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + \xi^\dagger(-\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) + \xi^\dagger(\mathbf{k})\xi(\mathbf{k}) \right] + \\ & + \left(\cosh^2 \phi(k) + \sinh^2 \phi(k) \right) \left[\xi^\dagger(\mathbf{k})\xi^\dagger(-\mathbf{k}) + \xi(-\mathbf{k})\xi(\mathbf{k}) \right] \}. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle ben note relazioni $\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi = \cosh 2\phi$, $2 \cosh \phi \sinh \phi = \sinh 2\phi$, e $2 \sinh^2 \phi = -1 + \cosh 2\phi$, si ricava, quindi, il seguente risultato:

$$\begin{aligned} H &= \frac{W(0)N^2}{2V} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right] \left[-1 + \cosh 2\phi \right] + \right. \\ &+ \left. \sinh 2\phi \frac{W(k)N}{V} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\left(\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right) \cosh 2\phi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sinh 2\phi \frac{W(k)N}{V} \right] \left[\xi^\dagger(\mathbf{k})\xi(\mathbf{k}) + \xi^\dagger(-\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left\{ \left[\left(\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right) \sinh 2\phi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cosh 2\phi \frac{W(k)N}{V} \right] \left[\xi(\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) + \xi^\dagger(\mathbf{k})\xi^\dagger(-\mathbf{k}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finora non abbiamo fatto ipotesi sulla dipendenza funzionale di $\phi(k)$. Se però scegliamo $\phi(k)$ soluzione della seguente equazione

$$\left(\omega_k + \frac{W(k)N}{V} \right) \sinh 2\phi + \frac{W(k)N}{V} \cosh 2\phi = 0, \quad (2.17)$$

ossia, equivalentemente

$$\tanh 2\phi(k) = - \frac{W(k)N}{V \omega_k + W(k)N}, \quad (2.18)$$

allora, utilizzando un risultato discusso nella sezione dei problemi, si ottiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{W(0)N^2}{2V} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\omega_k + \frac{W(k)N}{V} - \omega(k) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \omega(k) \left[\xi^\dagger(\mathbf{k})\xi(\mathbf{k}) + \xi^\dagger(-\mathbf{k})\xi(-\mathbf{k}) \right], \quad (2.19) \end{aligned}$$

avendo posto

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \sqrt{\left[\frac{k^2}{2m} + \frac{W(k)N}{V}\right]^2 - \left[\frac{W(k)N}{V}\right]^2} = \\ &= \sqrt{\frac{k^4}{4m^2} + \frac{k^2W(k)N}{mV}} .\end{aligned}\quad (2.20)$$

A parte un termine costante, non operatoriale:

$$H_0 = \frac{W(0)N^2}{2V} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\omega_{\mathbf{k}} + \frac{W(\mathbf{k})N}{V} - \omega(k) \right] ,$$

che rappresenta l'energia dello stato fondamentale (si tratta di una costante additiva inessenziale), questo hamiltoniano coincide con quello di un gas di quasiparticelle (aventi operatori di creazione e distruzione ξ^\dagger e ξ), libere (mancano infatti i termini di interazione) e con energia data dalla (2.20).

L'equazione

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{k^4}{4m^2} + \frac{k^2W(k)N}{mV}} ,$$

che fornisce la dipendenza dell'energia dall'impulso per le quasiparticelle dicesi *legge di dispersione*. Studiamo il comportamento della legge di dispersione per vari valori di k . Per $k \sim 0$ si ha, se $W(0)$ è finito,

$$\omega(k) \sim v_s k , \quad (2.21)$$

con

$$v_s = \sqrt{\frac{W(0)N}{mV}} . \quad (2.22)$$

ω è l'energia delle quasiparticelle alle quali, essendo sistemi quantici, competono proprietà sia ondulatorie, sia corpuscolari; in particolare la loro frequenza è proporzionale all'energia. Una dipendenza della frequenza dall'impulso di tipo lineare è tipica delle onde sonore nei materiali. Le quasiparticelle si comportano, per questi valori dell'impulso, come onde sonore e sono dette, per questa ragione, *fononi*. Per grandi valori dell'impulso noi vogliamo che queste onde si comportino come vere e proprie particelle (si noti l'analogia con l'ottica: per grandi impulsi ($\lambda \rightarrow 0$) i fotoni hanno proprietà spiccatamente corpuscolari: è l'approssimazione dell'ottica geometrica). Se allora supponiamo che $W(k)$ cresca al più come $\sim k$ (per $k \rightarrow \infty$), si ha:

$$\omega(k) \sim \frac{k^2}{2m} .$$

2.1.3 Spettro delle quasiparticelle

Assumiamo quindi¹ la seguente forma per la trasformata di Fourier dell'energia di interazione tra le molecole

$$W(k) = c_1 - c_2 k .$$

Sotto questa ipotesi la legge di dispersione ha la forma in figura 4.1.

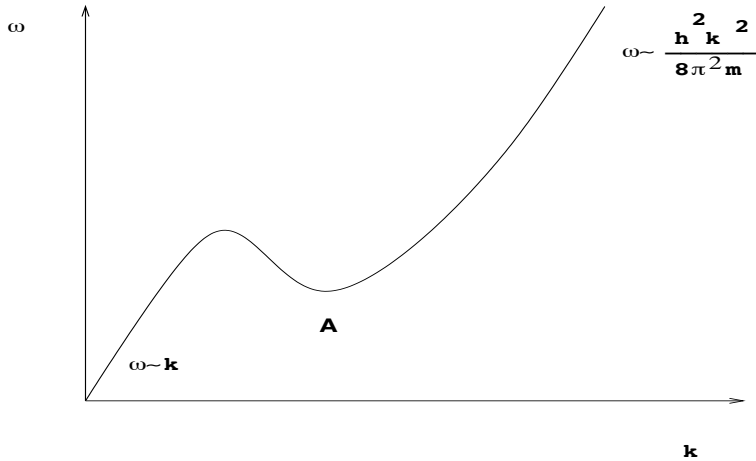


Fig. Legge di dispersione per le quasi particelle responsabili della superfluidità secondo l'ipotesi di Landau Per piccoli k l'andamento risulta lineare, per grandi k quadratico $\omega \sim \hbar^2 k^2 / (2m)$.

Dimostriamo ora che con una legge di dispersione del tipo di quella ipotizzata da Landau il gas di bosoni debolmente interagenti manifesta la proprietà della superfluidità. Supponiamo che l'elio 4 liquido scorra in un capillare con una temperatura inferiore alla temperatura critica. Se la temperatura del liquido è esattamente $T = 0$ K, N_0 è *esattamente* (non approssimativamente come nella trattazione precedente) uguale a N e non vi sono quasiparticelle. Per T piccolo, ma diverso da zero, possono esistere invece le quasiparticelle.

Supponiamo che il fluido scorra nel capillare con velocità \mathbf{V} . Poniamoci nel sistema di riferimento in cui il liquido è in quiete e le pareti si muovono con velocità $\mathbf{v} = -\mathbf{V}$ rispetto al liquido. Supponiamo che, per attrito, le pareti perdano una certa quantità di impulso $\Delta \mathbf{P}$ e di energia ΔE , quantità che vengono assorbite dal liquido. Dal momento che il liquido è costituito da quasiparticelle libere, l'unico modo in

¹Questa ipotesi è dovuta a L.D. Landau.

cui il liquido può aumentare la sua energia è costituito dalla *creazione* di quasiparticelle. Sia $n(\mathbf{k})$ il numero di quasiparticelle di impulso $\hbar\mathbf{k}$ create in questo modo; si avrà:

$$\Delta\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k})\hbar\mathbf{k} \quad (2.23)$$

$$\Delta E = \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k})\omega(k) . \quad (2.24)$$

Tra l'energia di queste quasiparticelle, il loro impulso e la velocità delle pareti sussiste una relazione notevole. Infatti si ha

$$\Delta E = \Delta \left(\frac{Mv^2}{2} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}$$

ossia

$$\Delta E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} = 0 .$$

Ne segue che

$$\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) [\omega(k) - \hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] = 0 .$$

Si deve quindi avere, introducendo l'angolo θ tra \mathbf{v} e \mathbf{k} :

$$\omega(k) = \hbar\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \hbar vk \cos \theta .$$

Possiamo ricavare quindi v :

$$v = \frac{\omega(k)}{\hbar k \cos \theta} \geq \frac{\omega(k)}{\hbar k} ,$$

in cui l'ultimo passaggio segue dal fatto che $1 \geq \cos \theta > 0$. Introduciamo ora la velocità critica v_{cr} così definita:

$$v_{cr} = \min \frac{\omega(k)}{\hbar k} .$$

Ne segue che perché il liquido possa cedere impulso ed energia alle pareti del recipiente deve risultare

$$v \geq v_{cr} \quad (2.25)$$

mentre in caso contrario tale cessione non avviene ed il fluido risulta un superfluido. In conclusione abbiamo provato che condizione necessaria dell'esistenza di attrito tra il liquido e le pareti del capillare è che il liquido scorra con una velocità superiore a v_{cr} . Se $v_{cr} = 0$, questa

condizione è sempre verificata ed il fenomeno della superfluidità non può aver luogo. Se, invece, $v_{cr} \neq 0$, e se la velocità del liquido non supera v_{cr} allora la creazione di quasiparticelle non avviene ed il liquido quantistico scorre senza attrito nel capillare, cioè è superfluido. In conclusione il fenomeno della superfluidità ha luogo se

$$v_{cr} \geq v > 0 ; \quad (2.26)$$

quindi, necessariamente deve risultare

$$v_{cr} > 0 \quad (2.27)$$

perché ci sia la superfluidità. Ora a piccole temperature solo le particelle meno energetiche (i fononi) possono essere eccitate, e per esse

$$v_{cr} = v_s > 0. \quad (2.28)$$

Dunque per velocità del fluido non troppo elevate e basse temperature l'elio 4 è superfluido.

Le considerazioni fin qui svolte si riferivano alla temperatura $T \simeq 0$ K; a temperature superiori, ma inferiori alla temperatura critica 2.2 K, oltre a quelle già descritte, che non possono scambiare energia ed impulso con le pareti, esistono anche quasiparticelle che possono invece farlo. Il liquido quantistico ha un comportamento simile ad una miscela di due fluidi: uno superfluido (e di questo comportamento sono responsabili le quasiparticelle non interagenti con le pareti) e l'altro normale, di cui sono responsabili le quasi particelle che possono scambiare energia con le pareti. Il ruolo di queste ultime cresce al crescere della temperatura, fino a che, raggiunta la temperatura di transizione, il fenomeno della superfluidità scompare.

Osserviamo infine che mentre le quasiparticelle con legge di dispersione $\omega(k) = v_s k$ sono dette fononi, le quasiparticelle con legge di dispersione corrispondente al minimo della figura 2.1.3 sono dette rotoni. In realtà fononi e rotoni non sono quasiparticelle distinte, ma quasiparticelle che si riferiscono a parti diverse dello spettro. E' chiaro, comunque che alle basse temperature il ruolo dei rotoni risulta trascurabile, mentre esso cresce col crescere della temperatura.

2.2 Lagrangiana per i superfluidi

La densità di lagrangiana per un gas di bosoni liberi che appare in (1.28) può essere riscritta nel modo seguente, a meno di una divergenza totale

$$\mathcal{L}_0 = \Phi^\dagger i \partial_t \Phi - \frac{1}{2m} \partial_i \Phi^\dagger \partial_i \Phi . \quad (2.29)$$

Vogliamo ora includere il termine d'interazione ². Sulla base della (1.42) il termine d'interazione è presente nell'azione con un termine di lagrangiana (non di densità di lagrangiana)

$$L_{int} = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Phi}^\dagger(\mathbf{r}_2) W(r_{12}) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_2) \Phi(\mathbf{r}_1) \quad (2.30)$$

in cui W è l'interazione responsabile della repulsione tra i bosoni. Poiché essa è a corto raggio possiamo fare l'approssimazione

$$\frac{1}{2} W(r_{12}) = g^2 \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.31)$$

Notiamo incidentalmente che nella (2.30) gli operatori di campo sono calcolati ad un istante di tempo fissato; nello schema di Heisenberg essi ovviamente hanno anche una dipendenza temporale. Quindi la densità di lagrangiana per un sistema di bosoni a spin zero con repulsione è

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger i \partial_t \Phi - \frac{1}{2m} \partial_i \Phi^\dagger \partial_i \Phi - g^2 \left(\Phi^\dagger \Phi - \bar{\rho} \right)^2. \quad (2.32)$$

Abbiamo aggiunto un termine $+2g^2 \bar{\rho} \Phi^\dagger \Phi$ corrispondente ad un potenziale chimico $\mu = 2g^2 \bar{\rho} > 0$ ed un termine costante inessenziale.

L'eq. (2.32) mostra che la configurazione di campo

$$\Phi = \sqrt{\bar{\rho}} \quad (2.33)$$

rende nulla la lagrangiana e minima l'energia. Infatti la densità di hamiltoniana vale

$$\frac{1}{2m} \partial_i \Phi^\dagger \partial_i \Phi + g^2 \left(\Phi^\dagger \Phi - \bar{\rho} \right)^2, \quad (2.34)$$

è definita positiva e si annulla in corrispondenza della soluzione (2.34). Incidentalmente questa equazione mostra anche che il termine $+2g^2 \bar{\rho} \Phi^\dagger \Phi$ da noi aggiunto corrisponde ad un termine $-\mu \Phi^\dagger \Phi$ con μ il potenziale chimico, dato da $\mu = 2g^2 \bar{\rho} > 0$ (si vedano gli esercizi 3), 4) nella sezione finale del capitolo).

Il valore del campo $\sqrt{\bar{\rho}}$ che minimizza l'energia classica corrisponde in MQ, in cui il campo è un operatore, al valor medio di questo operatore nello stato di vuoto, cioè di minima energia. La configurazione di campo (2.33) viene detta valore d'attesa del campo nel vuoto o in inglese *vacuum expectation value* (vev). Dunque, classicamente la configurazione favorita è la (2.33).

²L'interazione descritta dalla funzione W è repulsiva, come si vede dal fatto che $W > 0$ e che, con $W > 0$, il sistema diventa maggiormente stabile se il termine d'interazione diminuisce, il che avviene se le particelle si allontanano, dato che l'interazione è a corto raggio.

2.3 Rottura spontanea della simmetria e teorema di Goldstone

La lagrangiana mostra una invarianza sotto il gruppo $U(1)$, che trasforma il campo nel modo seguente:

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi . \quad (2.35)$$

La configurazione di vuoto (2.33) non è invece invariante sotto $U(1)$. Ogni qualvolta questo avviene, cioè ogni volta che la lagrangiana ha proprietà di simmetria, ma gli stati fisici, in particolare lo stato di vuoto, non sono invarianti sotto il gruppo di simmetria, si parla di **rottura spontanea di simmetria**.

In presenza di rottura spontanea di simmetria un importante teorema, il teorema di Goldstone, assicura l'esistenza di modi a massa nulla³. Abbiamo già in precedenza, cfr. (2.21) l'esistenza di questo modo, il fonone, caratterizzata da una legge di dispersione lineare

$$\omega = v_s k \quad (2.36)$$

Vogliamo ora riottenere questa caratteristica a partire dalla lagrangiana (2.32). Per far ciò facciamo un cambiamento di variabili

$$\Phi = \sqrt{\rho} e^{i\theta} \quad (2.37)$$

in modo da avere

$$\mathcal{L} = -\rho \partial_t \theta - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{4\rho} (\partial_i \rho)^2 + \rho (\partial_i \theta)^2 \right) - g^2 (\rho - \bar{\rho})^2 \quad (2.38)$$

dopo aver trascurato un termine di derivata totale $\frac{i}{2} \partial_t \rho$ che non modifica le equazioni di campo.

In meccanica quantistica altre configurazioni sono possibili⁴ ed in genere esse differiranno poco dalla configurazione classica. Scriviamo quindi⁵

$$\sqrt{\rho} = \sqrt{\bar{\rho}} + h \quad (2.39)$$

³Il teorema di Goldstone è generale ed assicura l'esistenza di tante particelle senza massa (o modi gapless) quanti sono i generatori rotti spontaneamente. Nel nostro caso il gruppo di simmetria ha un solo generatore.

⁴La situazione è analoga alla meccanica quantistica di una particella: accanto alla traiettoria classica esistono altre traiettorie, proibite classicamente, ma possibili in MQ, si pensi all'effetto tunnel.

⁵Le quantità che appaiono in queste equazioni sono funzioni e non operatori, ma teniamo in conto gli effetti quantistici considerando non solo la configurazione classica, ma anche configurazioni che vi si discostano di poco.

ed espandiamo (2.38) attorno al valore $\sqrt{\bar{\rho}}$: Si ottiene

$$\mathcal{L} = -2\sqrt{\bar{\rho}}h\partial_t\theta - \frac{h}{2m}(\partial_i\theta)^2 - \frac{\bar{\rho}}{2m}(\partial_i\theta)^2 - \frac{1}{2m}(\partial_i h)^2 - 4g^2\bar{\rho}h^2 + \dots \quad (2.40)$$

dove abbiamo trascurato un termine $\bar{\rho}\partial_t\theta$ che è una derivata temporale e non modifica le equazioni di Euler-Lagrange e abbiamo tenuto conto che $h \ll \sqrt{\bar{\rho}}$. Ci si accorge subito che il campo h non è un campo dinamico. Esso può quindi essere eliminato mediante le equazioni di Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} = \partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i h} , \quad (2.41)$$

che nel presente caso danno

$$h = -\frac{\sqrt{\bar{\rho}}}{-\frac{\partial^2}{2m} + 4g^2\bar{\rho}^2} \left(\partial_t\theta + \frac{1}{4m}(\partial_i\theta)^2 \right) \quad (2.42)$$

Sostituendo nella (2.40) si ha all'ordine più basso negli impulsi⁶ del campo θ

$$\mathcal{L} = (2-1)\bar{\rho}\partial_t\theta\frac{1}{4g^2\bar{\rho}}\partial_t\theta - \frac{\bar{\rho}}{2m}(\partial_i\theta)^2 \approx \frac{1}{4g^2}(\partial_t\theta)^2 - \frac{\bar{\rho}}{2m}(\partial_i\theta)^2 . \quad (2.43)$$

Dunque, abbiamo un solo campo, $\theta(t, \mathbf{r})$ con equazioni di campo

$$\left(\frac{1}{4g^2}\partial_t^2 - \frac{\bar{\rho}}{2m}\partial_i^2 \right)\theta = 0 . \quad (2.44)$$

In altri termini, mentre il modulo di Φ non è un campo, la sua fase lo è.

Per trovare la legge di dispersione delle particelle associate al campo, cerchiamo soluzioni di tipo onda piana $e^{i\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Si ha

$$\omega(k) = v_s k \quad (2.45)$$

con

$$v_s = \sqrt{\frac{2g^2\bar{\rho}}{m}} . \quad (2.46)$$

E' chiaro che questa equazione riproduce la (2.22) dal momento che $\bar{\rho} = N/V$ e $W(0) = \frac{g^2}{2}$. Dunque il campo θ ha modi gapless (o massless) e le particelle associate (cioè i fononi in questo caso) sono note come i **bosoni di Goldstone** o di Nambu-Goldstone.

⁶Siamo interessati ai modi di grande lunghezza d'onda, ossia di piccolo impulso.

2.4 Esercizi

- 1) Dimostrare le (2.16).
- 2) Si dimostri l'identità

$$\alpha \cosh \psi + \beta \sinh \psi = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

valida purché

$$\alpha \sinh \psi + \beta \cosh \psi = 0.$$

Si utilizzi questa identità per provare che con una scelta opportuna della funzione $\phi(k)$ la hamiltoniana che descrive il fenomeno della superfluidità è costituita da quasiparticelle libere, si veda l'eq. (2.19).

- 3) Calcolare l'energia dello stato fondamentale H_0 nell'approssimazione in cui $W(k) = W(0)$.

Suggerimento Con la sostituzione $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow V \int d^3k / (2\pi)^3$ si ha

$$H_0 = \frac{mv_s^2 N}{2} + \frac{V}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\omega(k) - \frac{k^2}{2m} - mv_s^2 + \frac{m^3 v_s^4}{k^2} \right) \quad (2.47)$$

in cui

$$\omega(k) = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + v_s^2 k^2} \quad (2.48)$$

e si è aggiunta una costante di sottrazione per rendere l'integrale convergente.

- 4) Effettuare il calcolo dell'integrale (2.48) e dalla formula

$$\mu = \frac{\partial H_0}{\partial N} \quad (2.49)$$

che fornisce il potenziale chimico dell'elio 4 a $T = 0$, provare che $\mu > 0$.

- 5) Provare la (2.40).

Capitolo 3

Superconduttività

3.1 Descrizione fenomenologica della superconduttività

3.1.1 Funzione d'onda del condensato

Alcuni metalli, a basse temperature diventano superconduttori: la corrente elettrica vi può circolare senza dissipazione di energia. Questo fenomeno, la superconduttività, fu scoperto nel 1911 da K. Onnes. La temperatura critica al di sotto della quale alcuni metalli diventano superconduttori dipende dal metallo ed è in genere di alcuni gradi K . Negli anni '80 del secolo scorso il fenomeno della superconduttività è stato osservato in un'altra classe di materiali: in questo caso il comportamento superconduttore si può osservare a temperature relativamente più elevate (comunque al di sotto dello 0 C): noi ci occuperemo qui solo della superconduttività a basse temperature che è fenomeno relativamente ben compreso teoricamente. Nelle prime sezioni di questo capitolo ci limitiamo ad una descrizione fenomenologica, mentre alla fine del capitolo esporremo la teoria microscopica dovuta a Bardeen, Cooper e Schrieffer.

Gli elettroni di conduzione sono relativamente liberi di muoversi nei metalli, mentre i nuclei occupano posizioni fisse, aventi simmetrie definite che danno al metallo una caratteristica struttura di reticolo cristallino. E' possibile provare, ma ce ne asteniamo per brevità, che gli elettroni, interagendo con il reticolo, subiscono delle forze che, tendono a legarli debolmente in coppie ¹. Queste coppie di elettroni, dette

¹Le forze sono dovute allo scambio di fononi, presenti nel metallo a causa delle vibrazioni dei nodi reticolari, si vedano i capitoli successivi di queste lezioni.

coppie di Cooper, possono esistere nonostante la repulsione elettrostatica dovuta alla forza di Coulomb. In effetti gli elettroni di una coppia sono separati in media da una distanza superiore alla distanza media tra le coppie e gli effetti repulsivi non sono significativi.

Come vedremo le coppie di Cooper sono alla base del fenomeno della superconduttività; il motivo per cui questo fenomeno si instaura solo a basse temperature nasce dal fatto che gli elettroni possono acquistare per fluttuazioni termiche energie dell'ordine di kT ($k =$ costante di Boltzmann). Le fluttuazioni termiche, al crescere della temperatura, possono risultare maggiori dell'energia di legame delle coppie di Cooper e, quindi, distruggerle.

Le coppie di Cooper hanno spin intero e sono quindi bosoni. Dunque, essi tendono ad occupare tutti lo stesso stato. In queste condizioni, poiché tutti i bosoni hanno la stessa funzione d'onda, essa acquista un significato macroscopico (i bosoni tendono ad avere gli stessi numeri quantici). Per ragioni che saranno chiare in seguito la funzione d'onda ψ dicesi *funzione d'onda del condensato*. A causa del suo carattere macroscopico si può interpretare $|\psi|^2 dV$ come la frazione di bosoni presenti nel volumetto dV ; se scriviamo

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (3.1)$$

possiamo allora interpretare $\rho = |\psi|^2$ non come densità di probabilità, ma come densità di carica divisa per q .

Esaminiamo il significato fisico di θ . Sostituiamo la (3.1) nell'equazione

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} (\psi^* \mathbf{v} \psi + \psi (\mathbf{v} \psi)^*) , \quad (3.2)$$

che dà la densità di corrente di probabilità per una particella in un campo elettromagnetico; a questo proposito ricordiamo che

$$m\mathbf{v} = -i\hbar\nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} . \quad (3.3)$$

Notiamo che in questa sezione ripristiniamo la costante di Planck e la velocità della luce c . L'espressione 3.3 deriva dal fatto che, in presenza di un campo magnetico, se \mathbf{P} è l'impulso canonico coniugato alla posizione, allora l'impulso cinetico $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ non coincide con \mathbf{P} ma è dato da $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}$. La sostituzione

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad (3.4)$$

è talvolta detta regola di spostamento minimo² e fornisce la regola con cui il campo e.m. si accoppia alla materia, sia in fisica classica, sia in fisica quantistica. Dunque, otteniamo

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar\rho}{m} \left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \right) . \quad (3.5)$$

Se ρ può essere interpretata, a meno di un fattore, come densità di carica, \mathbf{j} nella (3.2) si potrà interpretare come densità di corrente. Densità di corrente e di carica di una particella sono legate in elettromagnetismo classico dalla formula $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Ne segue che il vettore velocità è dato da

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \quad (3.6)$$

e, quindi $\hbar\nabla\theta$ si può identificare con l'impulso canonico della particella. Si noti che in questa approssimazione l'impulso canonico e la velocità sono funzioni e non operatori. Notiamo altresì che, con questa interpretazione, il gradiente della fase della funzione d'onda diventa una quantità misurabile.

3.1.2 Effetto Meissner

Una proprietà fondamentale della superconduttività è costituita dall'effetto Meissner. Nel 1933 Meissner e Ochsenfeld osservarono il seguente fenomeno. Si consideri un metallo superconduttore al di sopra della temperatura critica, nella fase cioè in cui esso è un comune conduttore. Immergiamo il metallo in una regione in cui è presente un campo magnetico \mathbf{B} e, successivamente, abbassiamo la temperatura al di sotto della temperatura critica. Il fenomeno che si osserva è che, alla fine dell'esperimento, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ all'interno del superconduttore: il campo \mathbf{B} viene espulso da metallo e si trova solo al suo esterno. Per spiegare questo effetto partiamo dalla (3.5). Osserviamo che si può assumere ρ uniforme nel cristallo, cioè indipendente da \mathbf{r} , dal momento che il cristallo è un reticolo regolare e non ci si aspetta che esistano forti disomogeneità nella distribuzione degli elettroni. Appliciamo il rotore ad ambo i membri della (3.5), tenendo conto del fatto che $\text{rot grad } f = 0$, qualunque sia f . Otteniamo

$$\nabla \wedge \mathbf{j} = -\frac{q\rho}{mc} \nabla \wedge \mathbf{A} , \quad (3.7)$$

²La regola dello spostamento minimo vale anche per l'energia H e il potenziale scalare φ : $H \rightarrow H + q\varphi$, cfr. la sezione esercizi di questo capitolo.

ossia

$$\nabla \wedge \mathbf{j} = -\frac{q\rho}{mc} \mathbf{B} , \quad (3.8)$$

equazione ottenuta da London e London nel 1935. Prendiamo il rotore di ambo i membri dell'equazione di Maxwell $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ (siamo nel caso $\mathbf{E} = 0$); utilizziamo l'identità

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{B} ; \quad (3.9)$$

otteniamo in questo modo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} \nabla \wedge \mathbf{j} . \quad (3.10)$$

Mediante l'equazione di London si ricava

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{d^2} \mathbf{B} , \quad (3.11)$$

con

$$d^2 = \frac{mc^2}{4\pi q\rho} . \quad (3.12)$$

Per risolvere questa equazione scegliamo il piano yz tangente alla superficie del metallo superconduttore in un punto assegnato ed orientiamo gli assi in modo che l'asse x sia rivolto verso l'interno del metallo. Per ragioni di simmetria \mathbf{B} dipende solo da x e non da y e z . La condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

fornisce

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 .$$

Derivando rispetto alla variabile x otteniamo

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} = 0$$

che, assieme all'equazione di London, dà:

$$B_x = 0 .$$

Dunque, le uniche componenti non nulle del campo magnetico sono quelle tangenti alla superficie: B_y e B_z . Questo risultato teorico è in accordo con i dati sperimentali. Torniamo ora alla (3.11) che, per quanto detto sinora, ha la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{1}{d^2} \mathbf{B} . \quad (3.13)$$

Questa equazione si integra e si ottiene, per la componente tangenziale del campo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-x/d} . \quad (3.14)$$

Dunque, ad una distanza di poche unità di d , il campo \mathbf{B} all'interno del metallo risulta praticamente trascurabile. Ciò spiega l'effetto Meissner.

Una stima numerica di d si può ottenere dalla densità del piombo che è di circa $11g/cm^3$, da cui, ponendo $\rho = N$, numero di atomi per cm^3 , si ha $\rho = 3 \cdot 10^{22}$ atomi/ cm^3 . Se ciascun atomo contribuisce con 1 elettrone, si ottiene, ponendo $q =$ carica dell'elettrone e $m =$ massa dell'elettrone,

$$d = 10^{-6} - 10^{-5} \text{ cm} . \quad (3.15)$$

Questo numero fornisce l'ordine di grandezza dello spessore a contatto con la superficie esterna nel quale può trovarsi un piccolo campo magnetico.

3.1.3 Quantizzazione del flusso del campo magnetico

Descriviamo ora un effetto particolarmente interessante, che mostra come, in determinate circostanze, in presenza di superconduttori, il flusso magnetico risulta quantizzato. Supponiamo di avere un materiale superconduttore avente la forma di un cilindro cavo; il superconduttore sia immerso in un campo magnetico le cui linee di forza siano rette parallele all'asse del cilindro. Se raffreddiamo il materiale sotto della temperatura critica, il campo sarà espulso dall'interno del materiale superconduttore e le linee di forza avvolgeranno il materiale fino alla sua superficie laterale, sia quella rivolta verso l'esterno, sia quella rivolta verso la cavità. Se infine eliminiamo la sorgente del campo magnetico, le linee di flusso che si trovavano all'interno della cavità restano intrappolate; esse si chiuderanno su se stesse, avvolgendo completamente il cilindro cavo; osserviamo che le linee devono richiudersi su se stesse per effetto della natura solenoidale del campo magnetico.

Il motivo per cui le linee di campo restano intrappolate è il seguente. Consideriamo la legge di Faraday

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

e scegliamo la curva chiusa all'interno del metallo, in cui, come in tutti i conduttori, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Ne segue che il flusso magnetico attraverso una superficie che si appoggi sulla curva chiusa deve restare costante, e ciò implica che le linee di campo devono restare nella cavità. In assenza di

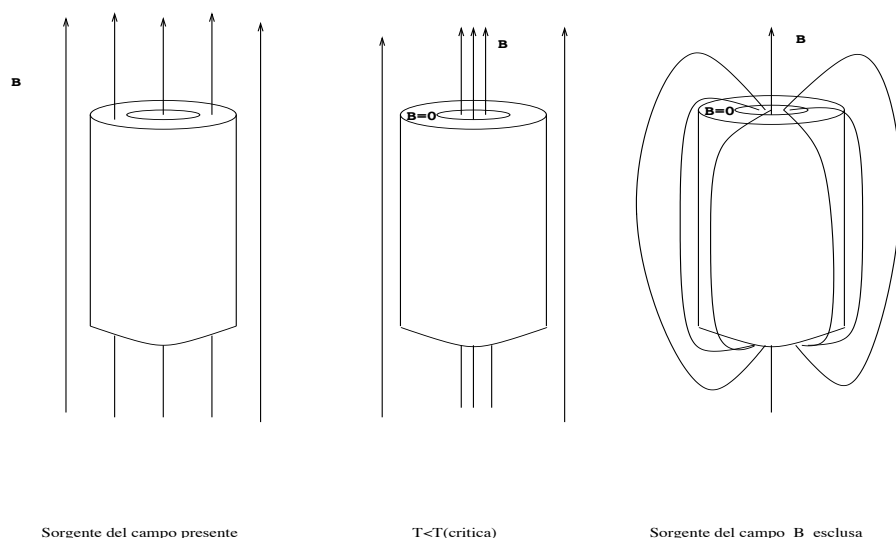


Fig. 4.3 Quantizzazione del flusso.

ogni causa esterna (non si dimentichi che la sorgente originaria del campo è stata eliminata) la causa del campo \mathbf{B} va ricercata in una corrente che circola nel superconduttore; inoltre, dal momento che il flusso deve restare costante, questa corrente deve circolare senza la dissipazione energetica dovuto all'effetto Joule che caratterizza il passaggio di corrente nei conduttori normali. Il metallo si comporta, quindi, come un conduttore perfetto; di qui, appunto, il nome di superconduttori.

Le correnti superconduttrici scorrono sulla superficie dei superconduttori, non al loro interno. La ragione va ricercata ancora nell'equazione di London. Infatti, dalla formula $rot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ e dal fatto che $\mathbf{B} = 0$ all'interno del materiale, segue che

$$\mathbf{j} = 0 \quad (3.16)$$

all'interno del metallo superconduttore.

Torniamo ora a quanto ci eravamo ripromessi, ossia provare che il flusso è quantizzato. Dalla (3.16) otteniamo:

$$0 = \mathbf{j} = \frac{\hbar}{m} \left(\nabla\theta - \frac{q}{\hbar c} \mathbf{A} \right),$$

da cui

$$\hbar \nabla\theta = \frac{q}{c} \mathbf{A}.$$

Integriamo questa equazione lungo una curva chiusa γ interna al cilindro e che ne racchiuda la cavità :

$$\oint_{\gamma} \nabla \theta d\ell = \frac{q}{\hbar c} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\ell .$$

Il secondo membro di questa equazione può essere valutato mediante il teorema di Stokes; si ha

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\ell = \int_S \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \Phi_B ,$$

in cui S è una superficie che si appoggia su γ . Consideriamo il primo membro; l'integrale su di una curva chiusa del gradiente di una funzione continua fornisce risultato nullo, ma questo risultato è inaccettabile perché implicherebbe $\Phi_B = 0$. Tuttavia, essendo

$$\int_1^2 \nabla \theta d\ell = \theta_2 - \theta_1 ,$$

si ha

$$\oint_{\gamma} \nabla \theta d\ell = 2\pi n ,$$

con n intero, a causa del fatto che θ è una funzione periodica di periodo 2π . Ne segue la seguente condizione di quantizzazione del flusso magnetico intrappolato nella cavità:

$$\Phi_B = \frac{2\hbar c \pi n}{q} . \quad (3.17)$$

Si tratta di un effetto puramente quantistico, come è reso evidente dal fatto che esso svanisce nel limite $\hbar = 0$. Fu misurato nel 1961 da Deaver e collaboratori. I risultati sperimentali sono in accordo con la previsione teorica (3.17) purché si ponga $q = 2e$: interpretiamo questo risultato come una conferma della teoria di Cooper, in base alla quale responsabili delle correnti superconduttrici sono non gli elettroni, ma le coppie di Cooper di elettroni.

3.2 Coppie di Cooper

Come abbiamo detto, alla base del fenomeno della superconduttività vi è l'effetto Cooper. Gli elettroni nel metallo interagiscono con il reticolo cristallino. Gli atomi del reticolo possono vibrare, emettendo onde

elastiche che in teoria quantistica hanno associate delle quasiparticelle, dette fononi (dei fononi nei metalli parleremo più in dettaglio in seguito). L'interazione tra due elettroni mediata dallo scambio di un fonone risulta **attrattiva, a corto raggio e di debole intensità**. Gli elettroni che subiscono questa attrazione sono solo quelli i cui impulsi sono vicini all'impulso di Fermi p_F . Infatti, dal momento che il sistema è debolmente interagente e vicino allo zero assoluto, esso sarà caratterizzato da una superficie di Fermi simile a quella di un gas di fermioni degeneri liberi. Dal momento che l'interazione non può conferire alle particelle grandi quantità di impulso, le particelle che si trovano lontane dalla superficie di Fermi non interagiscono dal momento che tutti gli stati energetici finali risultano occupati ed il principio di Pauli esclude che due fermioni siano nello stesso stato. Dunque, le estremità dei due vettori impulso degli elettroni che formano la coppia, \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , giacciono all'interno di un guscio sferico, attorno alla superficie di Fermi, con uno spessore dell'ordine di ω_D/v_F ($\hbar = 1$), ove ω_D è la frequenza di Debye e $v_F = \epsilon_F/p_F$ è la velocità di Fermi. Altre proprietà delle coppie di Cooper sono le seguenti:

1. Le coppie hanno preferibilmente spin totale 0. Infatti le coppie con $S = 1$ hanno parte orbitale antisimmetrica: $\ell = 0$ e $\psi(\mathbf{r}) \sim \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, se \mathbf{r} è la distanza relativa tra i due elettroni. Ma a questa funzione d'onda orbitale corrisponde una bassa probabilità che gli elettroni siano vicini. Dal momento che la forza d'attrazione è a corto raggio, l'accoppiamento con spin 1 risulta soppresso.
2. L'impulso totale della coppia è nullo: $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$. Se infatti l'impulso totale fosse $\mathbf{P} \neq 0$ lo spazio delle fasi a disposizione della coppia sarebbe un anello e non un intero guscio sferico, cfr. la figura 3.1.

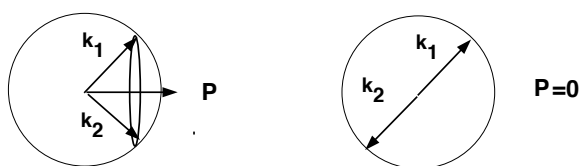


Figura 3.1: - I due casi $\mathbf{P} \neq 0$ e $\mathbf{P} = 0$.

3.3 Teoria BCS

3.3.1 Il modello

Sulla base dei risultati della sezione precedente possiamo quindi assumere il seguente hamiltoniano (*Bardeen, Cooper, Schrieffer, 1957*) che include tutte le proprietà finora elencate:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} \quad (3.18)$$

in cui $\omega_{\mathbf{k}} = k^2/2m$, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, $a_{\mathbf{k}}$ sono operatori di creazione e distruzione di elettroni con impulso \mathbf{k} e $S_z = +1/2$ mentre $b_{\mathbf{k}}^\dagger$, $b_{\mathbf{k}}$ sono operatori di creazione e distruzione di elettroni con impulso \mathbf{k} e $S_z = -1/2$. La somma è estesa agli impulsi interni al guscio sferico di cui abbiamo parlato. Assumiamo che $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w(\mathbf{k}', \mathbf{k})$.

Il termine d'interazione in (3.18) corrisponde ad una attrazione. Cooper (1956) provò che si formano coppie anche se questo termine risulta piccolissimo. Si può comprendere questo risultato nel modo seguente. Se si allontanano l'uno dall'altro i due elettroni della coppia, l'energia potenziale diminuirà in modulo ed aumenterà in valore e segno, essendo negativa. Dunque, l'energia cinetica ed anche gli impulsi delle particelle devono diminuire. Ma non possono diminuire oltre un certo valore perché gli stati più profondi nella sfera di Fermi sono occupati. Dunque gli elettroni restano legati anche se l'interazione è molto piccola.

Per effettuare i calcoli supporremo che il numero di particelle non sia fisso; in questo caso l'hamiltoniano da usare è

$$\hat{H} - \mu \hat{N} \quad (3.19)$$

corrispondente all'uso dell'*ensemble* gran canonico in meccanica statistica. Qui

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}) . \quad (3.20)$$

Dunque, questo corrisponde a sostituire $\omega_{\mathbf{k}}$ con $\epsilon_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} - \mu$ in (3.18). Definiamo ora gli operatori

$$\hat{\Delta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') b_{-\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} , \quad (3.21)$$

$$\hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{-\mathbf{k}'}^\dagger . \quad (3.22)$$

Ne segue che

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger \Delta(\mathbf{k}) + \Delta^\dagger(\mathbf{k}) b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right). \quad (3.23)$$

Per le ipotesi fatte, lo stato fondamentale (stato di vuoto) deve contenere un gran numero, diciamo N , di coppie di Cooper. Denotiamo con $|0_N\rangle$ tale stato. Ora il valor medio di $\hat{\Delta}$ nello stato di vuoto, denotato con $\Delta(\hat{k})$ risulta non nullo

$$\Delta(\hat{k}) = \langle 0_N | \Delta(\mathbf{k}) | 0_N \rangle = \frac{1}{2V} \sum w \langle 0_N | 0_{N-1} \rangle \neq 0 \quad (3.24)$$

in virtù del fatto che N è molto grande. Nella teoria BCS si fa l'approssimazione di **campo medio**, il che corrisponde a sostituire gli operatori Δ con i valori medi. Dunque, a meno di termini costanti la (3.23) diviene

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_k (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger b_{-\mathbf{k}}^\dagger \Delta(\mathbf{k}) + \Delta^*(\mathbf{k}) b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right), \quad (3.25)$$

in cui Δ, Δ^* sono numeri complessi.

3.3.2 Trasformazione di Bogoliubov

Effettuiamo anche in questo caso una trasformazione di Bogoliubov-Valatin scrivendo

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \xi_{\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} + \eta_{-\mathbf{k}}^\dagger \sin \phi_{\mathbf{k}} \\ b_{-\mathbf{k}} &= -\xi_{\mathbf{k}}^\dagger \sin \phi_{\mathbf{k}} + \eta_{-\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ed analoghe equazioni per a^\dagger, b^\dagger . I nuovi operatori ξ, η si ottengono invertendo queste equazioni:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}} &= a_{\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} - b_{-\mathbf{k}}^\dagger \sin \phi_{\mathbf{k}} \\ \eta_{-\mathbf{k}}^\dagger &= a_{\mathbf{k}} \sin \phi_{\mathbf{k}} + b_{-\mathbf{k}}^\dagger \cos \phi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si noti che $\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}}^\dagger, \eta_{\mathbf{k}}, \eta_{\mathbf{k}}^\dagger$ sono operatori di creazione e distruzione di quasi particelle, ottenute sovrapponendo a e b . Ad esempio $\xi_{\mathbf{k}}$ corrisponde o a distruggere un elettrone di spin $+1/2$ ed impulso $+\mathbf{k}$ o a creare un elettrone di spin $-1/2$ ed impulso $-\mathbf{k}$. Cioè $\xi_{\mathbf{k}}$ riduce di una unità lo spin e di \mathbf{k} l'impulso (analogamente $\eta_{\mathbf{k}}$ incrementa di una unità lo spin e diminuisce di \mathbf{k} l'impulso). Lasciamo al lettore la prova che

le trasformazioni di Bogoliubov sono canoniche nel senso che lasciano invariate le regole di anticommutazione

$$\begin{aligned}\{\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}\}_+ &= 0 \\ \{\xi_{\mathbf{k}}^\dagger, \xi_{\mathbf{k}'}^\dagger\}_+ &= 0 \\ \{\xi_{\mathbf{k}}, \xi_{\mathbf{k}'}^\dagger\}_+ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} .\end{aligned}\quad (3.28)$$

Relazioni analoghe valgono per gli operatori η, η^\dagger mentre gli operatori ξ, ξ^\dagger anticommutano con tutti gli operatori η, η' .

Se ora esprimiamo l'eq. (3.26) mediante i nuovi operatori, otteniamo dopo un poco di algebra:

$$\begin{aligned}\hat{H} - \mu\hat{N} &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\epsilon_k [1 - \cos 2\phi_{\mathbf{k}}] - \Delta(\mathbf{k}) \sin 2\phi_{\mathbf{k}} \right) \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} \left(\epsilon_k \cos 2\phi_{\mathbf{k}} + \Delta(\mathbf{k}) \sin 2\phi_{\mathbf{k}} \right) \left(\xi_{\mathbf{k}}^\dagger \xi_{\mathbf{k}} + \eta_{-\mathbf{k}}^\dagger \eta_{-\mathbf{k}} \right) \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} \left(\epsilon_k \sin 2\phi_{\mathbf{k}} - \Delta(\mathbf{k}) \cos 2\phi_{\mathbf{k}} \right) \left(\xi_{\mathbf{k}}^\dagger \eta_{-\mathbf{k}}^\dagger + \eta_{-\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \right)\end{aligned}\quad (3.29)$$

Per ragioni che saranno chiare in seguito abbiamo supposto Δ reale.

Scegliamo inoltre ϕ in modo che³

$$\tan 2\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta(\mathbf{k})}{\epsilon_k}\quad (3.30)$$

da cui si trae

$$\sin 2\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta(\mathbf{k})}{E_k}, \quad \cos 2\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_k}{E_k},\quad (3.31)$$

con

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2(\mathbf{k})} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2(\mathbf{k})} .\quad (3.32)$$

In questo modo si ottiene subito

$$\begin{aligned}\hat{H} - \mu\hat{N} &= \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_k - E_k) + \sum_{\mathbf{k}} E_k \left(\xi_{\mathbf{k}}^\dagger \xi_{\mathbf{k}} + \eta_{-\mathbf{k}}^\dagger \eta_{-\mathbf{k}} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_k - E_k) + \sum_{\mathbf{k}} E_k \left(\hat{N}_\xi(\mathbf{k}) + \hat{N}_\eta(\mathbf{k}) \right).\end{aligned}\quad (3.33)$$

Il primo termine è l'energia del vuoto, il secondo descrive un sistema di quasi particelle non interagenti con operatori numero $\hat{N}_\xi, \hat{N}_\eta$. Il termine che conteneva la creazione o la distruzione di una coppia di quasi particelle è sparito.

³Questa condizione corrisponde ad un minimo dell'energia libera per un dato valore dell'entropia, si veda L.D. Landau, E.M. Lifšits, Vol. IX, Edd. Riuniti, Ed. Mir, Roma, 1981, pag. 193.

3.3.3 Equazione di gap

Torniamo ora alla (3.21). Si ha

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') b_{-\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'} = \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') [-\xi_{\mathbf{k}'}^\dagger \sin \phi(k') + \eta_{-\mathbf{k}'} \cos \phi(k')] \times \\
&\times [\xi_{\mathbf{k}'} \cos \phi(k') + \eta_{-\mathbf{k}'}^\dagger \sin \phi(k')] \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \left[-\sin \phi(k') \cos \phi(k') \{ \xi_{\mathbf{k}'}^\dagger \xi_{\mathbf{k}'} - \eta_{-\mathbf{k}'} \eta_{-\mathbf{k}'}^\dagger \} \right. \\
&\quad \left. - \sin^2 \phi(k') \xi_{\mathbf{k}'}^\dagger \eta_{-\mathbf{k}'}^\dagger + \cos^2 \phi(k') \eta_{-\mathbf{k}'} \xi_{\mathbf{k}'} \right]. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Stiamo lavorando nell'approssimazione di campo medio, in cui Δ è un numero, non un operatore. Nella base delle quasi particelle questo implica che gli ultimi due termini sono assenti e si ha

$$\Delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \sin 2\phi(k') [1 - n_\xi - n_\eta] \tag{3.35}$$

Allo zero assoluto non vi sono quasiparticelle, esse appaiono se $T = 1/\beta > 0$ (costante di Boltzmann=1). In tal caso Δ risulta funzione anche di T mentre

$$n_\xi = n_\eta \equiv n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{E_{\mathbf{k}}\beta} + 1}, \tag{3.36}$$

in cui è evidente che allo zero assoluto non vi sono quasi particelle. In (3.36) $E_{\mathbf{k}}$ differisce dall'espressione in (3.32) per il fatto che ora $\Delta = \Delta(\mathbf{k}, T)$. In conclusione $\Delta(\mathbf{k}, T)$ soddisfa l'equazione integrale (detta **equazione di gap**, perché Δ dicesi **parametro di gap**):

$$\Delta(\mathbf{k}, T) = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\Delta(\mathbf{k}', T)}{E_{\mathbf{k}'}} \tanh \frac{E_{\mathbf{k}'}}{2T} \tag{3.37}$$

che segue dal fatto che

$$1 - 2n_{\mathbf{k}} = \tanh \frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} \tag{3.38}$$

e dalla prima delle (3.31):

$$\sin 2\phi(k') = \frac{\Delta(\mathbf{k}', T)}{E_{\mathbf{k}'}}. \tag{3.39}$$

Per trovare una soluzione dell'equazione di gap facciamo un'approssimazione, ossia sostituiamo $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ con un suo valore medio, chiamiamolo g . Questo risulta lecito perché questa funzione risulta non nulla solo quando \mathbf{k} e \mathbf{k}' si trovano in sottili gusci sferici intorno alla superficie di Fermi. Si ha allora

$$\Delta(\mathbf{k}, T) = \frac{g}{4V} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\Delta(\mathbf{k}', T)}{E_{k'}} \tanh \frac{E_{k'}}{2T} \quad (3.40)$$

e, dal momento che il secondo membro non dipende da \mathbf{k} , non vi dipende neanche il primo. Dunque, in questa approssimazione, il parametro di gap dipende solo dalla temperatura. L'equazione di gap ammette sempre la soluzione $\Delta = 0$ che corrisponde alla fase normale, ma, se $\Delta \neq 0$ si ha

$$1 = \frac{g}{4V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\tanh \frac{E_k}{2T}}{E_k} \quad (3.41)$$

con

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2(T)} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2(T)}. \quad (3.42)$$

3.3.4 Soluzioni dell'equazione di gap a $T = 0$

Scrivendo $\Delta(0) = \Delta_0$ e tenendo conto che nel limite $V \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (3.43)$$

si ha

$$1 = \frac{g}{8\pi^2} \int_{k_F - \tau}^{k_F + \tau} \frac{k^2 dk}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}} \quad (3.44)$$

in cui k_F è l'impulso di Fermi, definito da $\mu = \frac{k_F^2}{2m}$, $\tau \ll k_F$ è un parametro di cutoff introdotto per l'ipotesi che solo le particelle attorno alla superficie di Fermi partecipano all'interazione, e

$$\epsilon_k = \frac{k^2 - k_F^2}{2m}. \quad (3.45)$$

Con buona approssimazione possiamo scrivere

$$\epsilon_k \simeq v_F(k - k_F) \quad (3.46)$$

in cui $v_F = k_F/m$ è la velocità di Fermi. Si ha

$$1 = \frac{gk_F^2}{8\pi^2} \int_{k_F-\tau}^{k_F+\tau} \frac{dk}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}} = \frac{gk_F^2}{8\pi^2 v_F} \int_{-v_F\tau}^{+v_F\tau} \frac{d\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}} \quad (3.47)$$

Con le posizioni

$$\Lambda = \frac{4v_F\pi^2}{k_F^2} = \frac{4\pi^2}{mk_F} \quad (3.48)$$

ed il cambio di variabile $\epsilon_k = \Delta_0 \sinh \theta$ in modo che $\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2} = \Delta_0 \cosh \theta$ e $d\epsilon_k = \Delta_0 \cosh \theta d\theta$ si ha

$$1 = \frac{g}{\Lambda} \operatorname{arcsinh} \frac{v_F\tau}{\Delta_0} . \quad (3.49)$$

Dal momento che sperimentalmente di norma risulta $v_F\tau \gg \Delta_0$ e che, per $x \gg 1$, $\operatorname{arcsinh} x \equiv \log[x + \sqrt{x^2 + 1}] \approx \log 2x$ si ottiene

$$\Delta_0 = 2v_F\tau e^{-\Lambda/g} \quad (3.50)$$

equazione che mostra il carattere non perturbativo del parametro di gap.

3.3.5 Significato fisico del parametro di gap

Consideriamo la media termica (con l'ensemble di Gibbs) dell'operatore $\hat{H} - \mu$ in (3.33). Il risultato è una energia libera

$$\mathcal{E}_T = \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon_k - E(k, T)] + 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{E_k}{e^{E_k/T} + 1} \quad (3.51)$$

in cui sono state usate le(3.36); E_k è dato dalla (3.42) mentre ϵ è dato dalla (3.45), equazioni che qui riscriviamo

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2(T)} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2(T)} \quad (3.52)$$

$$\epsilon_k = \frac{k^2 - k_F^2}{2m} \quad (3.53)$$

per comodità del lettore.

A $T = 0$ si ha semplicemente l'energia libera (a rigore: il gran potenziale) dello stato di vuoto

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \left[\epsilon_k - \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_0^2} \right] . \quad (3.54)$$

nel caso $\Delta_0 = 0$ si ha

$$\mathcal{E}_0 \Big|_{\Delta_0=0} = \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon_k - |\epsilon_k|] = 2 \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{k}_F} \epsilon_k \quad . \quad (3.55)$$

Questa soluzione corrisponde a tutti i livelli nella sfera di Fermi occupati e tutti quelli esterni liberi. È chiaro comunque che

$$\mathcal{E}_0 \Big|_{\Delta_0 \neq 0} < \mathcal{E}_0 \Big|_{\Delta_0=0} \quad , \quad (3.56)$$

il che implica che allo zero assoluto la soluzione energeticamente favorita è quella in cui $\Delta_0 \neq 0$.

Le leggi di dispersione E_k con e senza gap a $T = 0$ sono riportate in Fig. 3.2. La porzione di figura in alto, che si riferisce al caso $\Delta_0 \neq 0$, mostra l'esistenza di un gap energetico, da cui il nome del parametro Δ . Osserviamo ora che a T appena al disopra dello zero

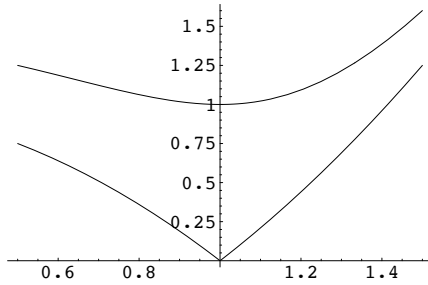


Figura 3.2: - *Le leggi di dispersione con e senza gap. In ascissa k/k_F .*

assoluto cominciano ad apparire le quasiparticelle; la figura si modifica, ma continua a sussistere un gap energetico Δ . La più piccola energia delle quasiparticelle è proprio Δ . Quindi perché l'energia del sistema si modifichi occorre cedere almeno l'energia 2Δ (occorre creare una coppia per avere spin 0).

L'esistenza di un gap energetico implica il fenomeno della superconduttività. Infatti supponiamo che vi sia una corrente nel metallo. Perché ci sia perdita di energia per effetto Joule, cioè una perdita di energia da parte della corrente a causa della resistenza elettrica, una certa quantità di energia δ deve essere ceduta alle quasiparticelle. Ma se $\delta < 2\Delta$ questa energia non è sufficiente a creare la coppia. Dunque la corrente non può dissipare energia e diviene superconduttrice. La

situazione è simile al fenomeno della superfluidità; in effetti si può dire che la superfluidità si manifesta in questo caso sotto la forma della superconduttività.

3.3.6 Proprietà termodinamiche

Scriviamo le equazioni gap per il caso $T \neq 0$ e per $T = 0$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta_0^2}} \\ 1 &= \frac{g}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1 - 2n_{\mathbf{p}}}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

In cui $n_{\mathbf{p}}$ è dato dall (3.36), Δ viene calcolato alla temperatura T e Δ_0 a $T = 0$. Se ne trae

$$\frac{g}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta_0^2}} \right) = \frac{g}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(e^{\epsilon_p/T} + 1) \sqrt{\epsilon_p^2 + \Delta^2}} \quad (3.58)$$

in cui ϵ_p è dato da (3.53). Si ricava che

$$\frac{g}{\Lambda} \ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{g}{\Lambda} 2I \left(\frac{\Delta}{T} \right) \quad (3.59)$$

con

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^2 + x^2} (\exp \sqrt{x^2 + y^2} + 1)} . \quad (3.60)$$

Calcoliamo la temperatura critica, ossia la temperatura T_c alla quale si ha la transizione dalla fase superconduttrice alla fase normale, caratterizzata da $\Delta = 0$. Occorre sviluppare in serie $I(x)$ per x piccolo (si veda il problema in sezione 3.5). Si ha

$$I(x) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{\pi T}{\gamma \Delta} + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{\Delta^2}{T^2} \quad (3.61)$$

in cui $\ln \gamma = C = 0.577$ è la costante di Eulero-Mascheroni, $\zeta(3) = 1.205$. Si ricava

$$\ln \frac{\gamma \Delta_0}{\pi T} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{\Delta^2}{T^2} \quad (3.62)$$

e la temperatura critica è

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} \Delta_0 = 0.57 \Delta_0 . \quad (3.63)$$

Sviluppando poi la (3.62) attorno a T_c si ricava subito che nelle vicinanze del punto critico

$$\Delta = T_c \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} = 3.06 T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, \quad (3.64)$$

il che implica che la transizione di fase è del secondo ordine, cioè continua. Il parametro di gap è quindi il parametro d'ordine della transizione: Se $\Delta \neq 0$ si è nella fase superconduttrice, altrimenti nella fase normale.

3.4 Simmetria di gauge locale e meccanismo di Higgs Anderson

Nel paragrafo 3.1.1 abbiamo osservato che la funzione d'onda del sistema bosonico costituito dalle coppie di Cooper ha un significato macroscopico. Ad essa corrisponde un campo Ψ ed una densità di hamiltoniana (o meglio di energia libera) che in analogia con quanto detto nel caso della superfluidità ha la forma (2.34)

$$\mathcal{F} = \partial_i \Psi^\dagger \partial_i \Psi + b^2 \left(\Psi^\dagger \Psi - \bar{\rho} \right)^2. \quad (3.65)$$

Supponiamo ora che sia presente un campo magnetico, descritto dal tensore $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$. La densità di energia del campo vale $\frac{1}{4} F_{ij}^2$ che va sommata a secondo membro della (3.65). V'è tuttavia un'altra modifica da apportare. Essa riguarda il fatto che, dal momento che le coppie di Cooper hanno carica elettrica $2e$ e quindi si accoppiano al campo magnetico. L'accoppiamento è dato dalla regola (3.4), che in meccanica quantistica diviene ($c = 1$)

$$\partial_i \Psi \rightarrow D_i \Psi = (\partial_i - i2eA_i) \Psi. \quad (3.66)$$

La derivata D_i dicesi derivata gauge covariante. Con questa sostituzione l'energia libera diviene

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{ij}^2 + |D_i \Psi|^2 + b^2 \left(\Psi^\dagger \Psi - \bar{\rho} \right)^2. \quad (3.67)$$

L'energia libera (3.67) possiede invarianza sotto il gruppo di trasformazioni $U(1)$, ma essa è più forte che nel caso del campo superfluido, dal momento che, a differenza che in (2.35) ora α può dipendere dalla

posizione \mathbf{r} . Occorre tuttavia che il campo elettromagnetico sia sottoposto allo stesso tempo ad una trasformazione di gauge, in altri termini c'è invarianza sotto la trasformazione

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow e^{2ie\alpha} \Psi \\ A_i &\rightarrow A_i + \partial_i \alpha.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Questa proprietà si dice simmetria di gauge locale.

Anche in questo caso il gruppo di simmetria è $U(1)$ ed esso è rotto spontaneamente dal momento che la configurazione di minima energia ha $F_{ij} = 0$ e $\Psi = \sqrt{\bar{\rho}} = \text{cost}$ con un valore dell'energia del vuoto pari a

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{4} F_{ij}^2 + 4e^2 \bar{\rho} A_i^2.\tag{3.69}$$

Questo stato di vuoto è degenere ($\Psi = \sqrt{\bar{\rho}} e^{i\beta}$ è anch'esso uno stato di vuoto, qualunque sia β) e chiaramente non è invariante sotto trasformazioni di gauge locali.

Ci si può chiedere se il teorema di Goldstone valga anche in questo caso. La risposta è positiva, ma il teorema assume una nuova forma. Infatti la (3.69) mostra che non c'è nessun modo gapless, cioè nessun bosone di Goldstone. In compenso appare un termine

$$\frac{m^2}{2} A_i^2\tag{3.70}$$

con $m = 2e\sqrt{2\bar{\rho}}$. Questo termine rappresenta un termine di massa per il campo magnetico. Infatti esso modifica l'equazione per il potenziale vettore che anziché essere (nella gauge $\phi = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)

$$\square \mathbf{A} = 0\tag{3.71}$$

ha la forma

$$(\square + m^2) \mathbf{A} = 0.\tag{3.72}$$

Dal momento che la (3.72) determina la legge di dispersione del fotone, concludiamo che il fotone ha acquistato una massa m . Dunque, il grado di libertà scalare predetto dal teorema di Goldstone appare qui come grado di libertà longitudinale del fotone.

Il meccanismo descritto è generale: ogni volta che una simmetria di gauge locale viene rotta spontaneamente, il ruolo dei bosoni di Goldstone viene giocato dai gradi di libertà longitudinali dei bosoni vettoriali di gauge (in questo caso il fotone), che acquistano massa.

Questo meccanismo viene detto detto **meccanismo di Higgs** o di **Higgs-Anderson**⁴.

Concludiamo osservando che il meccanismo di Higgs-Anderson spiega naturalmente l'effetto Meissner. Supponiamo infatti di essere a $T > T_c$. Allora non ci sono coppie di Cooper, nello stato di minima energia il valor medio del campo del condensato di coppie si annulla $\Psi = 0$ (valore invariante di gauge). Dunque, non c'è rottura spontanea di simmetria e $\bar{\rho} = 0$. Quanto all'energia dello stato di vuoto, se c'è un campo magnetico costante B , essa vale⁵ $\sim VB^2$ (V = volume del materiale), Supponiamo invece che $T < T_c$, che implica $\bar{\rho} \neq 0$. Il meccanismo obbligherebbe allora il fotone ad acquistare massa.

Ma se $B = \text{rot}\mathbf{A} = \text{cost.}$, allora A_i cresce con la distanza ed il termine di massa del fotone cresce come $V^{5/3} \gg V$ (V è grande). Questa situazione non è energeticamente favorita ed il superconduttore preferisce espellere il campo dal suo interno, in modo da raggiungere il minimo dell'energia. Dunque l'effetto Meissner si spiega con il meccanismo di Higgs e con il fatto che il fotone acquista una massa. A causa della sua origine la massa del fotone m viene detta massa di Meissner.

3.5 Esercizi

- 1) Dimostrare che la forza di Lorentz si può ottenere mediante le equazioni di Hamilton a partire dalla seguente hamiltoniana:

$$H(\vec{r}, \vec{P}) = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi, \quad (3.73)$$

che si ottiene dalla hamiltoniana della particella libera

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m}$$

mediante la regola dello spostamento minimo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (3.74)$$

$$H \rightarrow H + q\varphi. \quad (3.75)$$

Qui \mathbf{P} è l'impulso generalizzato, cioè la coordinata canonicamente coniugata a \mathbf{r} , mentre \mathbf{p} dicesi *impulso cinetico*.

⁴Il meccanismo di Higgs è alla base del modello standard di Glashow, Salam e Weinberg delle interazioni elettrodeboli.

⁵Infatti sotto queste ipotesi la densità di energia vale $\mathcal{F} = \frac{1}{2}B^2$.

Suggerimento Introdurre la velocità \mathbf{v} di componenti $v^j = \frac{dr^j}{dt}$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] = \frac{\mathbf{P} - q/c\mathbf{A}}{m} . \quad (3.76)$$

Notiamo esplicitamente che l'impulso generalizzato \mathbf{P} non coincide con $m\mathbf{v}$, ma è dato dalla formula

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} , \quad (3.77)$$

in accordo con la (3.74) in cui $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

- 2) Provare lo sviluppo (3.61).
- 3) Provare l'invarianza della (3.67) per trasformazioni di gauge locali (3.68).

Parte II

Solidi

Capitolo 4

Introduzione alla teoria dell'elasticità

4.1 Tensore delle deformazioni

Consideriamo un corpo solido che, sottoposto ad un campo di forze esterne, ne sia deformato. Ogni punto del corpo subirà uno spostamento, che, per campi di forze non troppo intensi, ha la forma:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u} . \quad (4.1)$$

Il vettore di componenti

$$u_i = u_i(x, y, z) \quad (4.2)$$

dicesi **vettore spostamento**. Si tratta ovviamente di un **campo vettoriale** (per ora studieremo il caso statico e non includeremo la dipendenza temporale). Calcoliamo la distanza (al quadrato) tra due punti del corpo infinitamente vicini¹ prima della deformazione²:

$$d\ell^2 = dx_i dx_i = dx_i^2, \quad (4.3)$$

e dopo, assumendo che si tratti di una deformazione infinitesima du_i :

$$d\ell'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right)^2$$

¹Nella maggior parte dei casi i solidi mantengono la loro integrità solo per deformazioni piccole, quindi non si tratta di un'ipotesi restrittiva.

²Usiamo la convenzione di sommazione, con indici ripetuti sommati da 1 a 3.

$$\begin{aligned}
&= d\ell^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_k dx_m \\
&= d\ell^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) dx_k dx_m \\
&= d\ell^2 + 2 e_{km} dx_k dx_m .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Il tensore simmetrico

$$e_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \tag{4.5}$$

dicesi **tensore delle deformazioni** (*tensor of strain* in inglese). L'ipotesi di piccole deformazioni implica che le componenti del tensore e_{km} sono piccole. Nella maggior parte dei casi³ risultano piccole non solo le e_{km} , ma anche le componenti del vettore deformazione u_k . Ne segue che si può trascurare nella (4.5) il termine quadratico e scrivere semplicemente

$$e_{km} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) . \tag{4.6}$$

Consideriamo la matrice simmetrica e_{km} . In ogni punto dello spazio occupato dal solido esiste una scelta del sistema di coordinate per la quale essa diviene diagonale⁴:

$$e_{km} = e_{(k)} \delta_{km} . \tag{4.7}$$

Ne segue che in un intorno di questo punto si può scrivere

$$d\ell'^2 = (1 + 2e_{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2e_{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2e_{(3)}) dx_3^2 . \tag{4.8}$$

Dunque, in quell'intorno

$$dx'_k \approx dx_k + e_{(k)} dx_k \tag{4.9}$$

e

$$e_{(k)} \approx \frac{dx'_k - dx_k}{dx_k} . \tag{4.10}$$

³Fanno eccezione le flessioni delle sbarre sottili. Una sbarra sottile può avere alle estremità deformazioni spaziali u_k importanti senza che le distanze tra i suoi punti siano alterate molto, ossia con e_{km} piccole. Non ci occupiamo di questo caso.

⁴In un altro punto la trasformazione di coordinate sarà diversa in ragione del fatto che il tensore dipende da x, y, z . La diagonalizzazione della matrice e_{km} è anche detta la sua *riduzione agli assi principali*.

Dunque, la riduzione agli assi principali mostra che gli autovalori di e_{km} sono gli allungamenti relativi del solido nelle tre direzioni degli assi. Inoltre per un volume infinitesimo

$$dV' = \prod_k dx'_k \approx \prod_k (1 + e_{(k)}) dx_k \approx \left(1 + \sum_k e_{(k)}\right) dV ; \quad (4.11)$$

in altri termini la traccia ⁵ di $e_{km}(\mathbf{r})$ rappresenta la variazione relativa di volume del solido nel punto \mathbf{r} :

$$e_{kk} = \frac{\Delta V}{V} . \quad (4.12)$$

.

4.2 Tensore degli sforzi

Consideriamo un elemento di volume dV del solido. Se \mathbf{f} è la forza per unità di volume, la forza risultante su dV è $\mathbf{f}dV$. In assenza di forze esterne tale risultante si annulla. In effetti consideriamo un elemento di superficie interna al corpo, cfr. fig. 4.1. La forza \mathbf{F} , dovuta all'azione delle parti del corpo alla destra della superficie considerata, è bilanciata, per la legge di azione e reazione, dalla forza $-\mathbf{F}$ dovuta all'azione delle parti alla sinistra. Se, invece, il corpo è deformato, $\mathbf{f}dV$ è diversa

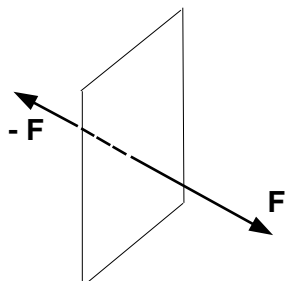


Figura 4.1: - *Le forze su di una superficie interna di un solido non deformato sono in equilibrio.*

da zero, dal momento che ci sono forze, dette **sforzi**, che cercano di

⁵Osserviamo che la traccia di una matrice è invariante per trasformazioni di coordinate.

riportare il corpo nella sua posizione di equilibrio. Consideriamo ora lo sforzo su un volume finito V :

$$\int_V dV f_i \neq 0 . \quad (4.13)$$

Possiamo assumere che il vettore in (4.13) sia il risultante di forze agenti solo sulla superficie Σ che racchiude il volume V . Infatti le forze che tendono a riportare il corpo deformato nella sua posizione di equilibrio sono di norma a corto raggio. Tutte le forze agenti sui punti interni al volume considerato sono a due a due uguali ad opposte, e, quindi le uniche forze non bilanciate dal principio di azione e reazione sono proprio quelle superficiali (esse sono dovute solo all'azione di molecole vicine alla superficie Σ , ma esterne al volume V). Dunque,

$$\int_V dV f_i = \oint_{\Sigma} ds_k \sigma_{ik} \quad (4.14)$$

e, per ragioni di covarianza, σ_{ik} è un tensore. Esso dicesi **tensore degli sforzi** (*stress tensor* in inglese). Per ottenere una relazione tra il tensore degli sforzi e la forza f_i applichiamo il teorema di Gauss. Si ottiene

$$\oint_{\Sigma} ds_k \sigma_{ik} = \int_V dV \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k_k} \quad (4.15)$$

e dal confronto con (4.14) segue che la componente i -esima f_i della forza per unità di volume è data da

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} . \quad (4.16)$$

E' facile accorgersi che questa equazione dà a σ_{ik} il significato di componente i -esima della forza agente sull'unità di superficie avente normale lungo l'asse x_k . In figura 4.2 sono mostrate le componenti σ_{xy} , σ_{yy} e σ_{zy} del tensore nel punto P .

Il tensore degli sforzi è simmetrico:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} . \quad (4.17)$$

Per provarlo, consideriamo ad esempio le quattro facce perpendicolari agli assi x e y nella figura 4.2 e limitiamoci a considerare le componenti x e y del tensore degli sforzi. Se il cubo è infinitesimo le componenti del tensore degli sforzi su facce parallele sono uguali (le componenti delle forze sono invece uguali, ma opposte; si noti che i vettori normali alle due superfici sono anch'essi opposti). La disposizione delle forze

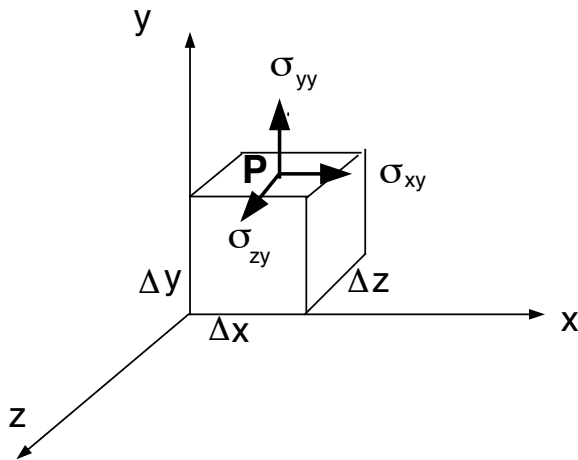


Figura 4.2: - Tre delle componenti del tensore σ_{ik} valutato nel punto P .

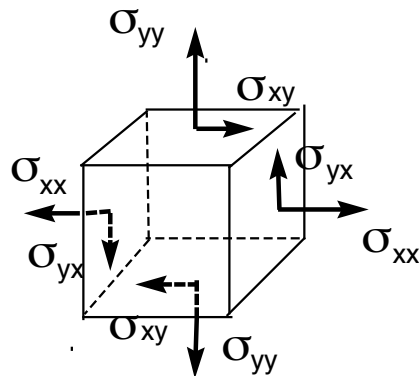


Figura 4.3: - Le componenti x e y delle forze agenti sulle quattro facce di un cubo di lato unitario disposte perpendicolarmente agli assi x e y . Qui σ_{ik} sono componenti delle forze. I loro moduli coincidono con le componenti del tensore degli sforzi.

è riportata in fig. 4.3. Il momento risultante delle forze σ_{xy} e σ_{yx} è $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ (i lati del cubo hanno lunghezza unitaria); se fosse diverso da zero esso farebbe ruotare il cubo attorno all'asse z . Siccome non avvengono rotazioni, deve necessariamente risultare $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ e, piú in generale, deve valere la (4.17).

Se diagonalizziamo la matrice simmetrica σ_{ik} mediante una rotazione, otteniamo in generale tre autovalori distinti. Essi possono essere interpretati come tre assi di un ellissoide. Nel sistema di coordinate ruotato in cui σ_{ik} risulta diagonale, le forze agenti su superfici perpendicolari agli assi dell'ellissoide sono normali alle superfici, in altri termini su queste superfici non sono presenti sollecitazioni di taglio (parallele cioè alla superficie). Se scegliamo tuttavia superfici orientate in modo arbitrario saranno presenti anche le sollecitazioni di questo genere. Un'eccezione è costituita dal caso in cui i tre autovalori coincidono. In tal caso la matrice σ_{ik} è un multiplo dell'unità:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} . \quad (4.18)$$

È evidente che p è una pressione e precisamente una pressione idrostatica, cfr. ad esempio la (4.16) che mostra come le dimensioni sono quelle di una forza per unità di superficie. Notiamo esplicitamente che con la scelta del segno effettuata nella (4.18), la pressione p va interpretata come la pressione esercitata dall'interno del volume considerato sulla superficie che lo delimita, e non, invece, dalle altre parti del solido sul volume considerato .

L'espressione (4.18) corrisponde ad una compressione uniforme e corrisponde ad un caso particolare. Infatti in genere⁶ nei solidi sono presenti forze di taglio e l'ellissoide non degenera in una sfera.

4.3 Tensore di elasticità

Nelle ipotesi di elasticità, cioè di piccole deformazioni, la relazione che sussiste tra i due tensori finora incontrati è lineare

$$\sigma_{ik} = C_{iklm}e_{lm} \quad (4.19)$$

(somma su indici ripetuti). Il tensore di rango 4 C_{iklm} dicesi **tensore di elasticità**.

Un tensore di rango 4 ha in generale $3^4 = 81$ componenti; il numero delle componenti indipendenti è tuttavia in questo caso assai minore,

⁶Questa considerazione vale anche per i fluidi viscosi, ma non per i fluidi perfetti, cfr. la Sez. 6.2.

a causa delle proprietà di simmetria di cui gode C_{iklm} . Queste ultime, a loro volta, dipendono dalle proprietà di simmetria dei tensori σ_{ik} e e_{lm} . Un caso particolarmente semplice ed importante è costituito dai solidi isotropi. Esso è interessante non solo di per sé, ma anche perché, in una certa approssimazione, anche i cristalli, che sono i solidi per i quali l'invarianza per rotazioni non sussiste (o, come si usa dire, è rotta), possono essere considerati isotropi. È sufficiente infatti limitarsi a considerare scale di lunghezze molto maggiori del passo reticolare.

Mostriamo che nel caso di un solido isotropo il numero delle componenti indipendenti è due. Infatti se il solido è isotropo, C_{iklm} può essere costruito solo a partire dagli scalari invarianti per rotazioni δ_{ik} e δ_{lm} . Inoltre $C_{iklm} = C_{kilm}$, $C_{iklm} = C_{ikml}$, relazioni che seguono dalle proprietà di σ_{ik} e di e_{lm} . Le uniche combinazioni possibili sono $\delta_{ik}\delta_{lm}$ e $\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{lk}$, sicché

$$C_{iklm} = \lambda \delta_{ik}\delta_{lm} + \mu(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{lk}) \quad (4.20)$$

e, conseguentemente

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \sum_{\ell} e_{\ell\ell} + 2\mu e_{ik} . \quad (4.21)$$

I coefficienti λ e μ diconsi **coefficienti di Lamé**; μ dicesi anche coefficiente di rigidità o *shear modulus*.

La legge, incorporata nella (4.21), secondo la quale il tensore degli sforzi è direttamente proporzionale al tensore delle deformazioni non è altro che la **legge di Hooke** della fisica elementare.

Dal momento che σ_{ik} è la forza per unità di superficie, $\sigma_{ik}de_{ik}$ è il lavoro fatto dagli sforzi sul volume unitario $\Delta V = 1$ considerato⁷. Se p è la pressione necessaria per bilanciare gli sforzi, il lavoro sul volume unitario sarà

$$W = - \int pdV = \int \sigma_{ik}de_{ik} = \frac{1}{2} C_{iklm}e_{ik}e_{lm} . \quad (4.22)$$

Scriviamo anche un'espressione per l'energia libera del sistema. Essa si ricava da⁸

$$dF = -SdT - pdV . \quad (4.23)$$

In generale si avrà quindi

$$F = F_0 + \frac{1}{2} C_{iklm}e_{ik}e_{lm} . \quad (4.24)$$

⁷Notiamo che $\sigma_{ik}de_{ik}$ ha infatti le dimensioni di un'energia per unità di volume.

⁸Se U è l'energia interna, con $dU = TdS - pdV$, allora F si ottiene mediante una trasformazione di Legendre, e vale $F = U - TS$.

Nel caso di solidi isotropi si ottiene:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} (e_{kk})^2 + \mu e_{ik}^2 . \quad (4.25)$$

In queste equazioni F_0 è l'energia libera in assenza di deformazioni e sarà omessa nel seguito.

Notiamo esplicitamente che le grandezze termodinamiche W , F , S U sono tutte riferite ad un volume unitario e sono quindi delle densità. Per ottenere le osservabili, occorre integrare sul volume del solido le corrispondenti densità, ad esempio

$$\text{Energia libera} = \int d^3r F . \quad (4.26)$$

L'espressione (4.25) contiene un contributo proporzionale al quadrato di e_{kk} . Come abbiamo visto, cfr. eq. (4.12), e_{kk} è proporzionale alla variazione relativa del volume, per cui, se la deformazione è tale che $e_{kk} = 0$, allora il volume non cambia e si ha solo un cambiamento di forma del corpo.

È opportuno scrivere in modo diverso l'energia libera. La deformazione può essere espressa nel modo seguente;

$$e_{ik} = \left(e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} e_{mm} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ik} e_{mm} \quad (4.27)$$

in cui il primo termine è un tensore a traccia nulla e rappresenta quindi una deformazione di taglio ed il secondo una compressione uniforme. Conseguentemente la densità di energia libera è

$$F = \mu \left(e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} e_{mm} \right)^2 + \frac{K}{2} (e_{mm})^2 . \quad (4.28)$$

Il coefficiente K si chiama **modulo di compressione uniforme** (*bulk modulus*) ed è dato da

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu . \quad (4.29)$$

L'energia libera deve essere limitata inferiormente e, quindi,

$$\mu > 0, \quad K > 0 . \quad (4.30)$$

Notiamo infine che la (4.21) può essere invertita, con il risultato:

$$e_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{\ell\ell} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{mm} \right), \quad (4.31)$$

la cui prova è lasciata per esercizio.

4.4 Compressioni uniformi, deformazioni omogenee

Supponiamo di essere in presenza di una compressione uniforme su di un solido isotropo, e che quindi il tensore degli sforzi sia dato dalla (4.21):

$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \sum_{\ell} e_{\ell\ell} + 2\mu e_{ik} ; \quad (4.21)$$

usando il risultato (4.31):

$$e_{ik} = \frac{1}{9K} \delta_{ik} \sigma_{\ell\ell} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{mm} \right) \quad (4.31)$$

si ha subito

$$e_{mm} = \frac{1}{3K} \sigma_{mm} , \quad (4.32)$$

e, tenendo conto della (4.18), si ottiene

$$e_{mm} = -\frac{p}{K} . \quad (4.33)$$

e_{mm} è la variazione relativa di volume; poiché le deformazioni sono piccole, anche la pressione è piccola e quindi otteniamo la seguente formula per l'inverso di K :

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T . \quad (4.34)$$

$1/K$ si chiama **coefficiente di compressione uniforme**.

Consideriamo ora il caso delle deformazioni omogenee, quelle per le quali e_{ik} non dipende da \mathbf{r} . Consideriamo una sbarra, disposta parallelamente all'asse z e sottoposta a due forze esterne, uguali ed opposte, applicate alle estremità della sbarra e dirette lungo l'asse z ; il modulo della forza sia $P \cdot A$, se A è la sezione della sbarra, vedi fig. 4.4. Questa forza è bilanciata dagli sforzi interni. Se dA_k è un elemento della superficie che delimita il solido, si ha, in generale, un equilibrio tra la forza esterna applicata, che vale $P_i dA$ (si noti che $P = -p$) e lo sforzo,

$$P_i dA - \sigma_{ik} dA_k = 0 . \quad (4.35)$$

Dal momento che la deformazione è omogenea calcoleremo il tensore e_{ik} solo in punti particolari e precisamente sulla superficie della sbarra,



Figura 4.4: - *Deformazione omogenea di una sbarra.*

dove possiamo applicare la (4.35). Consideriamo le pareti laterali. Qui otteniamo

$$\sigma_{ik}dA_k = 0 \quad (4.36)$$

e dato che dA_k ha componenti solo lungo l'asse x e y , ricaviamo che $\sigma_{ix} = \sigma_{iy} = 0$. Dunque l'unica componente del tensore degli sforzi non nulla è σ_{zz} , che, in base alla (4.35), vale,

$$\sigma_{zz} = P. \quad (4.37)$$

Possiamo ora usare l'eq. (4.31), che fornisce il tensore delle deformazioni mediante il tensore degli sforzi, per ricavare e_{ik} . Le uniche componenti non nulle sono

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_{yy} = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu} \right) P, \\ e_{zz} &= \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3\mu} \right) P. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Si usa definire **modulo di Young** o modulo di trazione E il rapporto tra la pressione e la componente e_{zz} :

$$E = \frac{P}{e_{zz}} \quad (4.39)$$

e il **coefficiente di Poisson** σ dato da

$$\sigma = - \frac{e_{xx}}{e_{zz}}. \quad (4.40)$$

Si ha evidentemente

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (4.41)$$

4.5 Proprietà elastiche dei cristalli

L'eq. (4.20) mostra che nei solidi isotropi il tensore di elasticità C_{iklm} dipende da solo due parametri. Nei cristalli non c'è però invarianza per rotazioni e l'isotropia non sussiste. Tuttavia il cristallo resta invariante per trasformazioni appartenenti a gruppi finiti, i cosiddetti gruppi cristallografici.

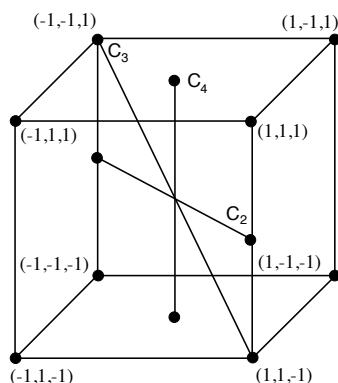


Figura 4.5: - Le tre classi di operazioni di simmetria in un cristallo cubico C_2 , C_3 e C_4 . Con (x, y, z) sono indicate le coordinate degli otto vertici della cella elementare del cristallo.

Queste proprietà d'invarianza, pur essendo meno ampie dell'invarianza per rotazioni, riducono tuttavia il numero delle componenti indipendenti del tensore C_{iklm} ⁹. In questa sezione ci limiteremo ad esaminare i cristalli cubici e scopriremo che per questi solidi il numero dei moduli è 3.

La fig. 4.5 mostra una cella elementare di un cristallo a simmetria cubica. Esistono tre tipi di assi di simmetrie: assi relativi alle rotazioni di tipo C_2 , C_3 e C_4 . Una rotazione è di tipo C_n se $C_n^n = 1$ (essa avviene attorno ad un asse di tipo C_n e presenta un angolo di rotazione di $2\pi/n$). Si noti che se C_n è una rotazione attorno ad un asse C_n , allora $C_n^{-1} = C_n^{n-1}$. Esistono sei assi di tipo C_2 e conseguentemente 1×6 rotazioni di tipo C_2 ; 4 assi di tipo C_3 e conseguentemente 2×4 rotazioni di tipo C_3 ; 3 assi di tipo C_4 e conseguentemente 3×3 rotazioni di tipo C_4 . Tutte queste rotazioni appartengono al gruppo di simmetria del

⁹Queste componenti sono dette *moduli*.

cubo, che indichiamo con la lettera \mathbf{O} . Il numero totale delle rotazioni che lasciano il cubo invariante è quindi

$$1 + 1 \times 6 + 2 \times 4 + 3 \times 3 = 24 \quad (4.42)$$

(alle rotazioni attorno agli assi di simmetria abbiamo aggiunto l'identità). Il numero totale degli elementi di \mathbf{O} è invece 48 giacché ogni rotazione può essere moltiplicata per l'operazione di inversione spaziale, ed il risultato è ancora una operazione di simmetria di \mathbf{O} .

L'invarianza per rotazioni impone dei vincoli al tensore di elasticità. Osserviamo preliminarmente che tutte e sole le operazioni che lasciano invariata l'energia libera (4.24) sono le operazioni di simmetria per un solido cristallino cubico. Ora evidentemente l'energia libera per unità di volume $F = 1/2 C_{iklm} e_{ik} e_{lm}$ in (4.24) è invariante per scambio, nel tensore di elasticità, di i con k , o di ℓ con m o della coppia i, k con ℓ, m a causa della simmetria del tensore e della presenza dei due fattori e_{ik} e e_{lm} :

$$\begin{aligned} C_{iklm} &= C_{kilm} , \\ C_{iklm} &= C_{ikml} , \\ C_{iklm} &= C_{lmik} . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Queste condizioni riducono il numero delle componenti del tensore di elasticità a 21 (cfr. esercizio 5). A seconda delle proprietà di simmetria del solido considerato sussistono altre relazioni che riducono ulteriormente il numero delle componenti indipendenti del tensore di elasticità. Nell'esercizio 6 si prova che per i cristalli a simmetria cubica il numero delle componenti indipendenti si riduce in realtà a 3. Possiamo scegliere quali moduli indipendenti C_{xxxx} , C_{xyxy} , C_{xyxy} ; quindi la densità di energia libera ha la forma

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left[C_{xxxx} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2C_{xyxy} (e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{zz}e_{yy}) \right. \\ &\quad \left. + 4C_{xyxy} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{xz}^2) \right] . \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.6 Equazioni del moto in un corpo elastico

L'equazione del moto in un corpo elastico è data dall'eq. (4.16) che qui riscriviamo per comodità del lettore

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} . \quad (4.16)$$

Supponiamo che il corpo sia isotropo. In questo caso il tensore di elasticità C_{iklm} dipende da due soli parametri indipendenti, ad esempio i due coefficienti di Lamè. Tenendo conto della (4.21) e della (4.6), la (4.16) assume la forma

$$\mathbf{f} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} . \quad (4.45)$$

\mathbf{f} è la forza per unità di volume, che risulta uguale, per la legge di Newton, alla densità di massa ρ (che assumiamo costante ed uniforme) moltiplicata per l'accelerazione; si ha quindi

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} . \quad (4.46)$$

Dividiamo per ρ in modo che l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (c_\ell^2 - c_t^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + c_t^2 \nabla^2\mathbf{u} \quad (4.47)$$

nella quale si è posto

$$c_\ell = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} , \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} . \quad (4.48)$$

Decomponiamo ora il vettore \mathbf{u} nella somma di due vettori \mathbf{u}_ℓ e \mathbf{u}_t :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\ell + \mathbf{u}_t \quad (4.49)$$

in modo che risulti (cfr. es. 7)

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{u}_\ell = 0 . \quad (4.50)$$

Dunque si ha

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\ell}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = (c_\ell^2 - c_t^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\ell) + c_t^2 \nabla^2(\mathbf{u}_\ell + \mathbf{u}_t) . \quad (4.51)$$

Applichiamo ora l'operatore divergenza:

$$\frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\ell}{\partial t^2} = (c_\ell^2 - c_t^2)\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}_\ell) + c_t^2 \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}_\ell) = c_\ell^2 \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}_\ell) . \quad (4.52)$$

Si ha dunque

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\ell}{\partial t^2} - c_\ell^2 \nabla^2 \mathbf{u}_\ell \right) = 0 . \quad (4.53)$$

Il vettore tra parentesi ha rotazionale nullo, a causa della seconda delle due eqq. (4.50). ma se un vettore ha divergenza e rotazionale nullo esso è il vettore nullo¹⁰, sicché

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\ell}{\partial t^2} - c_\ell^2 \nabla^2 \mathbf{u}_\ell = 0 . \quad (4.54)$$

Dunque il vettore \mathbf{u}_ℓ soddisfa l'equazione delle onde con velocità c_ℓ .

Applichiamo ora invece il rotazionale all'eq. (4.51). Otteniamo

$$\nabla \wedge \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t \right) = 0 . \quad (4.55)$$

Anche in questo caso il vettore tra parentesi è nullo:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t \right) = 0 , \quad (4.56)$$

ed il vettore \mathbf{u}_t soddisfa l'equazione delle onde con velocità c_t .

4.7 Soluzione delle equazioni del moto: onde elastiche nei solidi

Nell'approssimazione nella quale ci siamo posti (approssimazione elastica) le equazioni del moto sono lineari e quindi possiamo trovare la generica soluzione sovrapponendo soluzioni particolari. Una classe di soluzione è fornita dalle onde monocromatiche piane della forma

$$u_i(\mathbf{r}, t) \propto \epsilon_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t} \quad (4.57)$$

in cui è sottinteso che si sceglie o la parte reale o quella immaginaria. Qui ϵ_i è un versore. Sostituendo questa soluzione nella (4.46) si trova

$$\rho \omega^2 \epsilon_i = (\mu + \lambda) k_i k_j \epsilon_j + \mu k^2 \epsilon_i . \quad (4.58)$$

Sappiamo che esistono due classi di soluzioni: le onde longitudinali e le trasverse. Le condizioni che le definiscono corrispondono alle seguenti condizioni su ϵ_i

$$\begin{aligned} k_j &= k \epsilon_j && (\text{onde longitudinali}) \\ \epsilon_j k_j &= 0 && (\text{onde trasverse}) . \end{aligned} \quad (4.59)$$

¹⁰A rigore un vettore costante, ma non esiste alcun vettore costante che non rompa l'isotropia.

La relazione che lega ω al modulo k del vettore d'onda \mathbf{k} (*legge di dispersione*) è, nei due casi,

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_k^\ell \equiv \pm c_\ell k = \pm \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} k && \text{(onde longitudinali)} \\ \omega &= \omega_k^t \equiv \pm c_t k = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} k && \text{(onde trasverse)} .\end{aligned}\quad (4.60)$$

Se il solido è contenuto in un volume V , che, per semplicità, assumiamo di forma cubica ($V = L^3$), allora le soluzioni trovate devono soddisfare condizioni al contorno. Ne segue che non tutti i valori di \mathbf{k} sono ammessi, ma solo quelli dati da

$$\mathbf{k} = 2\pi/L \mathbf{n} , \quad (4.61)$$

con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $n_j \in \mathbf{N}$. Il teorema di Fourier ci assicura che la soluzione generale dell'equazione del moto è una serie di Fourier tripla ottenuta sovrapponendo le soluzioni periodiche:

$$u_j(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \frac{\epsilon_j^s}{\sqrt{2\rho\omega_k^s}} \left(a_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k^s t)} + a_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k^s t)} \right) \quad (4.62)$$

in cui la somma su s va da 1 a 3, in corrispondenza del modo longitudinale e dei due modi trasversi di propagazione mentre ω_k^s coincide con ω_k^ℓ o ω_k^t .

Si noti che nel limite di volume infinito la somma si trasforma in un integrale

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(\Delta\mathbf{k})^3} \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})(\Delta\mathbf{k})^3 \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} f(\mathbf{k}) . \quad (4.63)$$

Nel passaggio dal discreto al continuo preferiamo tuttavia adottare una diversa normalizzazione e scrivere, in luogo della (4.62), la seguente formula

$$u_j(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \frac{\epsilon_j^s}{\sqrt{2\rho\omega_{\mathbf{k}}^s}} \left(a_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}^s t)} + a_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}^s t)} \right) . \quad (4.64)$$

4.8 Azione per un solido cristallino isotropo

Proviamo che le equazioni di Euler-Lagrange per un sistema avente densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\rho(\partial_t u_i)^2 - 2\mu e_{ij}e_{ij} - \lambda(e_{kk})^2] , \quad (4.65)$$

con (cfr. eq. (4.6))

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) ,$$

coincidono con le (4.46). Le equazioni di Euler Lagrange si ricavano infatti dal principio d'azione

$$\delta S[u] = 0 \quad (4.66)$$

con S funzionale d'azione:

$$S[u] = \int dt d^3r L(u, \partial u) = \int dt d^3r \mathcal{L}(u, \partial u) , \quad (4.67)$$

e ove si assume che le variazioni dei campi si annullino all'infinito spaziale ed agli estremi dell'intervallo temporale. Si ha dunque, omettendo di scrivere l'indice j di u_j ,

$$\begin{aligned} \delta S[u] &= S[u + u\delta] - S[u] = \int dt d^3r \left(\mathcal{L}(u + \delta u, \partial[u + \delta u]) - \mathcal{L}(u, \partial u) \right) \\ &= \int dt d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_t u} \partial_t \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u} \partial_k \delta u \right) \\ &= \int dt d^3r \left(\partial_t \left[\frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_t u} \delta u \right] + \partial_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u} \delta u \right] \right) \\ &+ \int dt d^3r \left(-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_t u} + \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u} \right) \delta u \\ &= \int dt d^3r \left(-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_t u} + \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial u} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u} \right) \delta u \end{aligned} \quad (4.68)$$

Introduciamo

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t u_i} = \rho \partial_t u_i , \quad (4.69)$$

che dicesi *momento canonicamente coniugato* al campo classico u_i . Per l'arbitrarietà di δu , la (4.68) fornisce

$$\partial_t \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u_i} , \quad (4.70)$$

D'altro canto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u_i} = -\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}(u)}{\partial \partial_k u_i} = (\mu + \lambda) \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_j \partial_j u_i . \quad (4.71)$$

Dunque l'equazione che se ne ricava è identica alla (4.46) e mostra che l'azione che descrive, in approssimazione elastica, le oscillazioni del solido è

$$S[u] = \int dt L(u, \partial u) = \int dt d^3 r \mathcal{L}(u, \partial u) , \quad (4.72)$$

con \mathcal{L} dato dalla (4.65).

Dalla lagrangiana $L = \int d^3 r \mathcal{L}$ si passa alla hamiltoniana H mediante una trasformata di Legendre¹¹:

$$H = \int d\mathbf{r} \mathcal{H} = \int d\mathbf{r} (\pi_j \partial_t u_j - \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{\rho} \pi_j^2 + 2\mu e_{ij}^2 + \lambda e_{kk}^2 \right] \quad (4.73)$$

in cui \mathcal{H} dicesi densità di hamiltoniana. H è un funzionale di u_j e π_j . Adottiamo la seguente definizione di *derivata funzionale* del funzionale H :

$$\frac{\delta H[\eta]}{\delta \eta(\mathbf{r})} \equiv \frac{\delta}{\delta \eta(\mathbf{r})} \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(\eta, \partial \eta) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta(\mathbf{r})} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_i \eta(\mathbf{r})} . \quad (4.74)$$

Risulta chiaro allora che

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta u_i} &= -\partial_t \pi_i \\ \frac{\delta H}{\delta \pi_i} &= +\partial_t u_i . \end{aligned} \quad (4.75)$$

Si noti l'analogia con le equazioni di Hamilton della meccanica analitica. Notiamo anche che risulta

$$\frac{\delta \eta(\mathbf{r})}{\delta \eta(\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (4.76)$$

Definiamo ora parentesi di Poisson di due funzionali, $F[u_i, \pi_i]$ e $G[u_i, \pi_i]$ l'espressione seguente

$$[F, G]_{PB} = \int d^3 r \left(\frac{\delta F}{\delta u_i} \frac{\delta G}{\delta \pi_i} - \frac{\delta F}{\delta \pi_i} \frac{\delta G}{\delta u_i} \right) \quad (4.77)$$

Si ottiene subito

$$\begin{aligned} [u_j(\mathbf{r}), \pi_k(\mathbf{r}')]_{PB} &= \delta_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ [\pi_j, H]_{PB} &= \partial_t \pi_j \\ [u_j, H]_{PB} &= \partial_t u_j . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Anche in questo caso si noti l'analogia con la meccanica analitica.

¹¹In meccanica analitica $H = p_j \partial_t q_j - L$ con $p_j = \partial L / \partial \partial_t q_j$, analoga alla (4.69).

4.9 Esercizi

- 1) Provare la (4.29) .
- 2) Provare che la formula inversa della (4.21) è la (4.31).
- 3) Provare le formule (4.38) .
- 4) Provare che i coefficienti di Lamé μ e λ si esprimono mediante il modulo di Young e il coefficiente di Poisson nel modo seguente

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} , \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)} . \quad (4.79)$$

- 5) Provare che, in virtù delle eqq. (4.43), il numero delle componenti indipendenti del tensore di elasticità è 21.
- 6) Provare che per un cristallo cubico il numero delle componenti indipendenti del tensore di elasticità è 3.
- 7) Provare che ogni vettore \mathbf{u} si può decomporre nella somma del rotazionale di un campo e del gradiente di un altro campo. Usare questo risultato per provare le eqq. (4.49) e (4.50).
- 8) Provare le (4.78).

4.10 Soluzioni di esercizi scelti

- 1) Posto

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \bar{e}_{ik} ,$$

con

$$\tilde{e}_{ik} = e_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{mm} , \quad \bar{e}_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}e_{mm} ,$$

tenendo conto che $\bar{e}_{mm} = e_{mm}$, $\bar{e}_{ik}\tilde{e}_{km} = 0$ e che $(\bar{e}^2)_{mm} = (e_{mm})^2/3$, segue da (4.25) che

$$F = \frac{\lambda}{2}(\bar{e}_{mm})^2 + \mu \left(\tilde{e}_{ik}^2 + \frac{1}{3}(\bar{e}_{mm})^2 \right) .$$

- 2) Dal momento che la relazione tra il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni è lineare, scriviamo

$$e_{ik} = A \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{mm} \right) + B \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{mm} . \quad (4.80)$$

Sostituendo la (4.80) nella (4.21) otteniamo

$$\sigma_{ik}(1 - 2\mu A) + \left[B \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) - \frac{2\mu A}{3} \right] \sigma_{mm} \delta_{ik} = 0$$

da cui $A = \frac{1}{2\mu}$; inoltre, tenendo conto della (4.29), $B = \frac{1}{3K}$.

- 5) La prima delle equazioni (4.43) riduce il numero degli indici indipendenti nella prima coppia a 6 (una matrice simmetrica 3×3 ha 6 componenti indipendenti); la seconda riduce il numero di coppie di indici indipendenti nella seconda coppia a 6. Siamo ridotti così ad una matrice 6×6 . La terza equazione ci dice che questa matrice è simmetrica. Il numero delle componenti indipendenti di una matrice simmetrica $N \times N$ è $N(N + 1)/2$; quindi le componenti indipendenti sono 21.
- 6) Si consideri ad esempio C_{xxyy} . Dal momento che l'operazione di riflessione spaziale è una simmetria per il cubo, l'energia libera non cambia sotto la trasformazione $y \rightarrow -y$. Ora sotto tale operazione e_{xy} cambia segno (basti pensare alla sua definizione, eq. (4.6)). Se ora pensiamo al termine $\sim C_{xxyy} e_{xx} e_{xy}$, perchè esso non cambi occorre che, sotto la riflessione, $C_{xxyy} \rightarrow -C_{xxyy}$; ma C_{xxyy} non può cambiare, perchè è un numero; allora $C_{xxyy} = 0$. In maniera analoga si prova che sono nulle tutte le componenti del tensore che hanno un numero dispari di x o di y o di z .

Restano dunque le componenti con quattro indici uguali e quelle con due indici di un tipo e due di un altro. Quelle con quattro indici identici sono tutte uguali tra loro: $C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz}$; ciò segue dall'invarianza sotto rotazioni di tipo C_4 di 90° . Quelle con due indici di un tipo e due di un altro si dividono in due classi: la prima contiene i moduli del tipo C_{xxyy} tutti uguali tra loro ($C_{xxyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} = \dots$); l'altra contiene le due coppie di indici in questa sequenza: C_{xyxy} ; anche questi moduli sono tutti uguali tra loro: $C_{xyxy} = C_{xzzz} = C_{zzxx} = \dots$

- 7) Poniamo $\nabla \cdot \mathbf{u} = \beta$. Questa equazione è analoga all'equazione dell'elettrostatica $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Allo stesso modo in cui \mathbf{E} si scrive come gradiente di un campo scalare (il potenziale scalare, soluzione dell'equazione di Poisson), anche \mathbf{u} si può scrivere in tale modo, a meno di un vettore \mathbf{b} la cui divergenza è nulla:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \mathbf{b} . \quad (4.81)$$

Ma se un campo ha divergenza nulla esso è il rotazionale di un altro campo \mathbf{a} (in analogia al campo magnetico \mathbf{B} che si scrive come rotazionale del potenziale vettore \mathbf{A}). Dunque esistono due campi, uno scalare φ ed uno vettore \mathbf{a} tali che

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \wedge \mathbf{a} . \quad (4.82)$$

Se ora poniamo $\mathbf{u}_\ell = \nabla \wedge \mathbf{a}$ e $\mathbf{u}_t = \nabla\varphi$, l'asserto risulta provato, in virtù di note proprietà dell'operatore ∇ .

Capitolo 5

Fononi e loro interazioni

5.1 Quantizzazione del campo fononico libero

Intendiamo quantizzare il campo fononico, effettuare cioè la seconda quantizzazione della teoria di campo descritta dalla lagrangiana (4.65)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\rho(\partial_t u_i)^2 - 2\mu e_{ij}e_{ij} - \lambda(e_{kk})^2] . \quad (4.65)$$

Per far questo occorre innanzitutto assumere che le grandezze fisiche u_j e $\pi_j = \rho\partial_t u_j$ siano operatori, che noi assumeremo dipendenti dal tempo (in modo da lavorare nello schema di Heisenberg). È necessario poi individuare lo spazio di Hilbert su cui sono definiti gli operatori e definire il prodotto scalare tra stati. Abbiamo già esaminato questa procedura per il gas di atomi di Elio 4 nella sezione 1.2.

Gli operatori sono i campi u_j e π_k e gli altri operatori che si costruiscono a partire da essi (ad es. l'energia); lo spazio è quello di Fock, che viene costruito a partire da operatori di creazione e distruzione. Il prodotto scalare risulta definito naturalmente associando a ciascun ket un bra. Occorre che la definizione sia tale che i valori medi degli operatori corrispondenti a grandezze fisiche reali siano anch'essi reali, ovvero che i corrispondenti operatori siano hermitiani. Occorre inoltre definire delle regole di commutazione tra gli operatori canonici. Sulla base delle eqq. (4.78) risulta naturale assumere le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [u_j(\mathbf{r}, t), \pi_k(\mathbf{r}', t)] &= i\delta_{jk}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ [u_j(\mathbf{r}, t), u_k(\mathbf{r}', t)] &= [\pi_j(\mathbf{r}, t), \pi_k(\mathbf{r}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si noti che u_j e π_k sono calcolati allo stesso istante di tempo.

Dobbiamo ora definire gli operatori di creazione e distruzione:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}s} &= \frac{1}{2} \epsilon_i^s \sqrt{2\rho\omega_k^s} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \left(u_i(\mathbf{x}, 0) + \frac{i}{\omega_k^s} \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) \right) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} \\ a_{\mathbf{k}s}^\dagger &= \frac{1}{2} \epsilon_i^s \sqrt{2\rho\omega_k^s} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \left(u_i(\mathbf{x}, 0) - \frac{i}{\omega_k^s} \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) \right) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} . \end{aligned} \quad (5.2)$$

In queste equazioni i vettori ϵ_i^s soddisfano le equazioni (4.59) ($s = \ell$ o t) e le ω_k^s sono date dalle (4.60). Lasciamo al lettore il compito di provare che invertendo queste equazioni si ottiene la (4.64) a $t = 0$.

Tenendo conto che $\pi_i = \rho \partial_t u_i$ e che $\epsilon_i^s \epsilon_i^{s'} = \delta_{ss'}$ determiniamo le regole di commutazione di $a_{\mathbf{k}s}$ e $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$:

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}'s'}, a_{\mathbf{k}s}^\dagger] &= \frac{\rho}{2} \sqrt{\omega_k^s \omega_{k'}^{s'}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon_i^s \epsilon_j^{s'} \\ &\left[\left(u_i(\mathbf{x}, 0) + \frac{i}{\omega_k^s} \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) \right) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}, \left(u_j(\mathbf{x}', 0) - \frac{i}{\omega_{k'}^{s'}} \partial_t u_j(\mathbf{x}', 0) \right) e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}'} \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \sqrt{\omega_k^s \omega_{k'}^{s'}} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k} - \mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}')} \epsilon_i^s \epsilon_j^{s'} \\ &\times \left(\left[u_i(\mathbf{x}, 0), -\frac{i}{\omega_{k'}^{s'}} \partial_t u_j(\mathbf{x}', 0) \right] + \left[\frac{i}{\omega_k^s} \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0), u_j(\mathbf{x}', 0) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\omega_k^s \omega_{k'}^{s'}} \times \epsilon_i^s \epsilon_j^{s'} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k} - \mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}')} \\ &\times \left(\frac{1}{\omega_k^s} + \frac{1}{\omega_{k'}^{s'}} \right) \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ &= \delta_{ss'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \end{aligned} \quad (5.3)$$

In modo analogo si prova che

$$[a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}] = [a_{\mathbf{k}s}^\dagger, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = 0 . \quad (5.4)$$

Scriviamo ora l'hamiltoniana (4.73)

$$H = \int d\mathbf{r} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{\rho} \pi_j^2 + 2\mu e_{ij}^2 + \lambda (e_{kk})^2 \right] \quad (4.73)$$

mediante gli operatori di creazione e distruzione usando la (4.64):

$$u_j(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \frac{\epsilon_j^s}{\sqrt{2\rho\omega_k^s}} \left(a_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k^s t)} + a_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k^s t)} \right) \quad (4.64)$$

e l'analogha equazione per π_j

$$\pi_j(\mathbf{r}, t) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \epsilon_j^s \sqrt{\frac{\rho\omega_k^s}{2}} \left(a_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k^s t)} - a_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k^s t)} \right). \quad (5.5)$$

nelle quali i coefficienti a e a^\dagger sono operatori:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2\rho\omega_k^s} \left(a_{\mathbf{k}s} a_{-\mathbf{k}s} e^{-2i\omega_k^s t} (-\rho(\omega_k^s)^2 + \mu k^2 + \delta_{s1}(\mu + \lambda)k^2) \right. \\ &+ a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{-\mathbf{k}s}^\dagger e^{+2i\omega_k^s t} (-\rho(\omega_k^s)^2 + \mu k^2 + \delta_{s1}(\mu + \lambda)k^2) \\ &+ a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger (\rho(\omega_k^s)^2 + \mu k^2 + \delta_{s1}(\mu + \lambda)k^2) \\ &+ \left. a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} (\rho(\omega_k^s)^2 + \mu k^2 + \delta_{s1}(\mu + \lambda)k^2) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k^s \left(a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger + a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} \right) = \\ &= \int d^3k \omega_k^s \left(a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \delta(0) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

La costante infinita $\int d^3k \omega_k^s \frac{1}{2} \delta(0)$ è inessenziale. Ce ne liberiamo¹ imponendo di considerare solo **prodotti normali** ossia mediante la sostituzione $H \rightarrow : H :$ ovvero

$$\left(a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger + a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} \right) \rightarrow : \left(a_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger + a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} \right) : \equiv 2 a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s}. \quad (5.7)$$

In altri termini nel prodotto normale gli operatori di distruzione sono sempre a destra rispetto agli operatori di distruzione. Noi effettueremo dovunque questa sostituzione e quindi, dato un qualsiasi operatore A , dette

$$A^{(+)} \quad \text{e} \quad A^{(-)} \quad (5.8)$$

le parti contenenti le frequenze positive ($\sim a_k^\dagger e^{i\omega t}$) e negative ($\sim a_k e^{-\omega t}$) rispettivamente, allora con l'ordinamento normale le parti $A^{(+)}$ saranno a sinistra e le $A^{(-)}$ a destra.

Da questo punto in poi la costruzione dello spazio di Fock procede in analogia a quella svolta nella Sezione 1.2 e non la ripetiamo. Ricordiamo solo che lo stato di vuoto $|0\rangle$ soddisfa

$$a_{\mathbf{k}s}|0\rangle = 0 \quad (5.9)$$

¹In altri casi non è possibile liberarsi così facilmente delle divergenze. In particolare possono apparire divergenze legate al comportamento per grandi impulsi (divergenze ultraviolette). Occorre in questo caso troncare le integrazioni ad un impulso massimo corrispondente alla frequenza di Debye, ovvero, nello spazio delle coordinate, ad una lunghezza dell'ordine del passo reticolare.

mentre lo stato

$$\left(a_{\mathbf{k}_m s_m}^\dagger\right)^{n_m} \left(a_{\mathbf{k}_\ell s_\ell}^\dagger\right)^{n_\ell} \cdots \left(a_{\mathbf{k}_j s_j}^\dagger\right)^{n_j} |0\rangle \quad (5.10)$$

contiene n_m particelle con impulso \mathbf{k}_m e polarizzazione s_m , n_ℓ particelle con impulso \mathbf{k}_ℓ e polarizzazione s_ℓ , \cdots , n_j particelle con impulso \mathbf{k}_j e polarizzazione s_j . Queste particelle hanno leggi di dispersione date dalle (4.60) e sono dette per ovvie ragioni **fononi**.

5.2 Interazioni e schema d'interazione

Consideriamo l'azione per i fononi liberi

$$S_0[u] = \int dt d^3x \mathcal{L} \quad (5.11)$$

in cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\rho(\partial_t u_i)^2 - 2\mu e_{ij} e_{ij} - \lambda e_{kk}^2] , \quad (5.12)$$

In questa equazione abbiamo approssimato il tensore delle deformazioni definito in (4.5):

$$e_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right) \quad (5.13)$$

con l'espressione data in (4.6):

$$e_{km} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) . \quad (5.14)$$

Se introduciamo i termini di ordine più elevato in (5.13) occorre aggiungere nuovi contributi all'azione:

$$S = S_0 + S' + S'' ; \quad (5.15)$$

S' , S'' contengono termini di ordine più elevato nei campi, ad esempio

$$S' = -\frac{g}{4!} \int dt d^3x (\partial_k u_k)^4 . \quad (5.16)$$

Nel seguito, dato il carattere essenzialmente pedagogico di questa sezione, ci limiteremo a considerare la correzione (5.16). Essa corrisponde ad un termine d'interazione, precisamente ad un termine di autointerazione.

All'azione (5.16) corrisponde la hamiltoniana

$$H' = + \frac{g}{4!} \int d^3x (\partial_k u_k)^4 \quad (5.17)$$

mentre all'azione S_0 corrisponde

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{\pi_i^2}{\rho} + 2\mu e_{ij} e_{ij} + \lambda e_{kk}^2 \right], \quad (5.18)$$

dal momento che $\pi_i = \rho \partial_t u_i$.

Nella teoria perturbativa, che svilupperemo nelle prossime sezioni è utile utilizzare uno schema di evoluzione temporale distinto sia dallo schema di Schrödinger, sia da quello di Heisenberg. Ricordiamo che nello schema di Schrödinger gli stati evolvono in questo modo

$$\begin{aligned} |\psi_S(t)\rangle &= U(t) |\psi_S(0)\rangle, \\ U(t) &= T e^{-i \int_0^t d\tau H(\tau)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Qui T rappresenta il prodotto cronologico, si veda la discussione dell'eq. (5.35) nel prossimo paragrafo; nel caso di hamiltoniane indipendenti dal tempo si ha semplicemente

$$U(t) = e^{-iHt}. \quad (5.20)$$

L'operatore di evoluzione temporale soddisfa

$$i \frac{dU}{dt} = H U \quad (5.21)$$

(ricordiamo che $\hbar = 1$). Questa equazione si prova subito se la hamiltoniana non dipende dal tempo (per la prova nel caso generale si veda l'analoga dimostrazione fornita nel prossimo paragrafo). In questo schema gli operatori non cambiano nel tempo. Nello schema di Heisenberg, invece, gli operatori dipendono dal tempo e li denotiamo nel modo seguente: $O_H(t)$, per distinguerli dagli operatori nello schema di Schrödinger, denotati con O_S . Si ha, come è noto,

$$O_H(t) = U^\dagger(t) O_S U(t), \quad (5.22)$$

che nel caso di hamiltoniane non dipendenti dal tempo diviene

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt}. \quad (5.23)$$

Lo schema che utilizzeremo dicesi **schema d'interazione** ed è definito dalle equazioni

$$i \frac{\partial |\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = H'_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (5.24)$$

$$O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}. \quad (5.25)$$

Dunque, gli stati evolvono come nello schema di Schrödinger con hamiltoniano H'_I e gli operatori evolvono come nello schema di Heisemberg con hamiltoniana H_0 . In particolare

$$H'_I(t) = e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \quad (5.26)$$

in cui H' è l'hamiltoniana d'interazione (5.18). È facile provare che tra un ket nello schema di Schrödinger ed uno nello schema d'interazione sussiste la relazione

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle. \quad (5.27)$$

Verifichiamo infatti che $|\psi_I(t)\rangle$ e $e^{iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle$ soddisfano la stessa equazione del primo ordine:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= H'_I(t) |\psi_I(t)\rangle = e^{+iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} |\psi_I(t)\rangle \\ &= (-H_0 + e^{+iH_0 t} H e^{-iH_0 t}) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} e^{+iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle &= -H_0 e^{+iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle + e^{+iH_0 t} H |\psi_S(t)\rangle \\ &= (-H_0 + e^{+iH_0 t} H e^{-iH_0 t}) e^{+iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle \end{aligned} \quad (5.29)$$

Assumendo che a $t = 0$ tutti gli schemi siano equivalenti si ha $|\psi_S(0)\rangle = |\psi_I(0)\rangle$. Ne segue che $e^{+iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle$ e $|\psi_I(t)\rangle$ soddisfano la stessa equazione differenziale del primo ordine con la stessa condizione iniziale. Dunque, coincidono.

Dalla (5.25), una equazione del primo ordine, segue che $|\psi_I(t)\rangle$ dipende solo da $|\psi_I(t')\rangle$ (e non dalla sua derivata, come succederebbe se l'equazione fosse di ordine superiore); si ha allora

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t') |\psi_I(t')\rangle. \quad (5.30)$$

Dico che $U_I(t, t')$ soddisfa

$$i \frac{dU_I(t, t')}{dt} = H'_I(t) U_I(t, t'). \quad (5.31)$$

Infatti

$$\begin{aligned} H'_I(t) U_I(t, t') |\psi_I(t') \rangle &= H'_I(t) |\psi_I(t) \rangle = i \frac{d}{dt} |\psi_I(t) \rangle \\ &= i \frac{dU_I(t, t')}{dt} |\psi_I(t') \rangle , \end{aligned} \quad (5.32)$$

Q.E.D.

Notiamo che la prova della (5.21) procede in modo analogo.

5.3 Formula di Dyson

Supponiamo di voler calcolare

$$\langle \alpha(t) | \beta(t') \rangle \quad (5.33)$$

che rappresenta l'ampiezza di probabilità che il sistema fisico, nello stato $|\beta\rangle$ al tempo t , sia nello stato $|\alpha\rangle$ al tempo t' . Devo quindi calcolare

$$\langle \alpha | U(t, t') | \beta \rangle . \quad (5.34)$$

Ora

$$U(t, t') = T e^{-i \int_{t'}^t d\tau H_I(\tau)} \quad (5.35)$$

che dicesi formula di Dyson. Il simbolo di prodotto cronologico

$$T e^{-i \int_{t'}^t d\tau H_I(\tau)} \equiv \prod_{k=1}^N e^{-i\epsilon H(t'+k\epsilon)} \quad (5.36)$$

ci dice in che ordine sistemare i fattori $e^{-i\epsilon H(t'+k\epsilon)}$ che non commutano tra di loro. Si noti che se non avessimo usato il prodotto cronologico avremmo ottenuto un altro risultato

$$e^{-i \int_{t'}^t d\tau H_I(\tau)} = e^{-i \sum_{k=1}^N \epsilon H(t'+k\epsilon)} . \quad (5.37)$$

In queste equazioni $N \rightarrow \infty$ e

$$\epsilon = \frac{t' - t}{N} . \quad (5.38)$$

In generale definiamo il prodotto cronologico nel modo seguente:

$$T\{A_1(t_1)A_2(t_2)\cdots A_n(t_n)\} \equiv A_{i_1}(t_{i_1})A_{i_2}(t_{i_2})\cdots A_{i_n}(t_{i_n}) \quad (5.39)$$

se

$$t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n} . \quad (5.40)$$

Proviamo la formula di Dyson (5.35). Sappiamo dall'eq. (5.31) che

$$i \frac{dU_I(t, t')}{dt} = H'_I(t) U_I(t, t') . \quad (5.41)$$

Considero ora

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} T \left[e^{-i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau)} \right] &= T \left[H'_I(t) e^{-i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau)} \right] \\ &= H'_I(t) T \left[e^{-i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau)} \right] . \end{aligned} \quad (5.42)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo portato $H'_I(t)$ a sinistra rispetto all'e-sponenziale dal momento che t è il tempo massimo. Dunque

$$T \left[e^{-i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau)} \right] \quad (5.43)$$

e

$$U_I(t, t') \quad (5.44)$$

soddisfano la stessa equazione differenziale del primo ordine con la stessa condizione iniziale

$$U(t', t') = 1 , \quad T \left[e^{-i \int_{t'}^{t'} d\tau H'_I(\tau)} \right] = 1 \quad (5.45)$$

e quindi coincidono.

Supponiamo che al tempo $t = -\infty$ lo stato sia $|i\rangle$ e al tempo $t = +\infty$ lo stato sia $|f\rangle$. Ricordiamo la regola d'oro di Fermi che permette di calcolare la velocità di transizione (ossia la probabilità di transizione per unità di tempo) dallo stato iniziale allo stato finale

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi \left| \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H'_I(\tau) | i \rangle \right|^2 . \quad (5.46)$$

Ricordiamo incidentalmente che, con la regola d'oro, sostituendo $H'_I(\tau)$ con

$$e^{iH_0\tau} H'(\tau) e^{-iH_0\tau}$$

nel calcolo della probabilità $P_{i \rightarrow f}$ nasce un prodotto $\delta(E_f - E_i) 2\pi T$ (T = durata dell'interazione) da cui la (5.46).

La formula di Fermi nasce dallo sviluppo perturbativo:

$$\begin{aligned} T \left[e^{-i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau)} \right] &\simeq 1 - i \int_{t'}^t d\tau H'_I(\tau) + \\ &+ \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 T (H'_I(\tau_1) H'_I(\tau_2)) \end{aligned} \quad (5.47)$$

se ci si arresta al primo ordine, ossia se si usa

$$\langle f|U(-\infty, +\infty)|i \rangle = \delta_{if} - i \langle f| \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H_I'(\tau) |i \rangle . \quad (5.48)$$

Ma la formula di Dyson permette di calcolare approssimazioni successive, ossia di sviluppare una teoria perturbativa all'ordine che si desidera.

5.4 Second'ordine perturbativo

Consideriamo quindi il second'ordine perturbativo nella (5.47):

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^t d\tau_2 T (H_I'(\tau_1)H_I'(\tau_2)) . \quad (5.49)$$

Notiamo inanzitutto che l'integrale doppio si riscrive nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \\ &\times \left[\int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 H_I'(\tau_1)H_I'(\tau_2) + \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 H_I'(\tau_2)H_I'(\tau_1) \right] . \end{aligned}$$

Il dominio d'integrazione del secondo integrale è un triangolo, dominio normale sia rispetto all'asse τ_1 sia all'asse τ_2 , si veda la fig. 5.1. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 H_I'(\tau_2)H_I'(\tau_1) &= \int_{t'}^t d\tau_2 \int_t^{\tau_2} d\tau_1 H_I'(\tau_2)H_I'(\tau_1) \\ &= \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 H_I'(\tau_1)H_I'(\tau_2) \end{aligned} \quad (5.50)$$

in cui nell'ultima linea abbiamo cambiato di nome le variabili: $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$. Therefore

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^t d\tau_2 T (H_I'(\tau_1)H_I'(\tau_2)) \\ &= (-i)^2 \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 H_I'(\tau_1)H_I'(\tau_2) . \end{aligned} \quad (5.51)$$

5.5 Teorema di Wick

Definiamo ora la **contrazione** di due campi liberi. Osserviamo a questo proposito che possiamo limitarci ai campi liberi. Infatti il motivo per

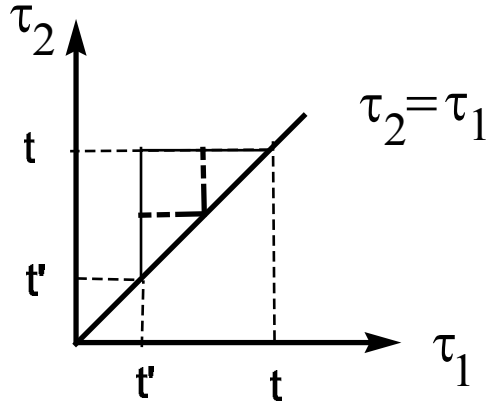


Figura 5.1: *Dominio d'integrazione di uno dei due integrali della (5.49).*

cui risulta utile la rappresentazione d'interazione risiede proprio nel fatto che se all'istante iniziale i campi sono liberi (ipotesi che possiamo sempre fare) allora anche durante l'evoluzione temporale essi restano liberi, dal momento che evolvono nel tempo secondo la (5.25). Dunque valgono sempre le regole di commutazione a tempi uguali che abbiamo ipotizzato in precedenza. Sia allora

$$A = A^{(+)} + A^{(-)}, \quad B = B^{(+)} + B^{(-)} \quad (5.52)$$

in cui ad esempio

$$B^{(+)} \sim \int dk a_k^\dagger e^{-i(k \cdot x - \omega t)} \quad (5.53)$$

è la parte a frequenza positiva di B . Definisco la contrazione di A e B :

$$\overbrace{A(t_1)B(t_2)} = T(A(t_1)B(t_2)) - :A(t_1)B(t_2): . \quad (5.54)$$

Dico che

$$\begin{aligned} \overbrace{A(t_1)B(t_2)} &= [A^{(-)}(t_1), B^{(+)}(t_2)] \quad \text{iff } t_1 > t_2 \\ &= [B^{(-)}(t_2), A^{(+)}(t_1)] \quad \text{iff } t_1 < t_2 . \end{aligned} \quad (5.55)$$

La contrazione produce comunque un numero complesso, non un operatore.

Dimostriamo la (5.55). Sia $t_1 > t_2$. Allora

$$\begin{aligned}
\overbrace{A(t_1)B(t_2)} &= A(t_1)B(t_2) - :A(t_1)B(t_2): = \\
&= A^{(+)}(t_1)B^{(+)}(t_2) + A^{(+)}(t_1)B^{(-)}(t_2) \\
&\quad + A^{(-)}(t_1)B^{(+)}(t_2) + A^{(-)}(t_1)B^{(-)}(t_2) \\
&\quad - :A^{(+)}(t_1)B^{(+)}(t_2): - :A^{(+)}(t_1)B^{(-)}(t_2): \\
&\quad - :A^{(-)}(t_1)B^{(+)}(t_2): - :A^{(-)}(t_1)B^{(-)}(t_2): = \\
&= A^{(+)}(t_1)B^{(+)}(t_2) + A^{(+)}(t_1)B^{(-)}(t_2) \\
&\quad + A^{(-)}(t_1)B^{(+)}(t_2) + A^{(-)}(t_1)B^{(-)}(t_2) \\
&\quad - A^{(+)}(t_1)B^{(+)}(t_2) - A^{(+)}(t_1)B^{(-)}(t_2) \\
&\quad - B^{(+)}(t_2)A^{(-)}(t_1) - A^{(-)}(t_1)B^{(-)}(t_2) = \\
&= A^{(-)}(t_1)B^{(+)}(t_2) - B^{(+)}(t_2)A^{(-)}(t_1) = \\
&= [A^{(-)}(t_1), B^{(+)}(t_2)] , \tag{5.56}
\end{aligned}$$

e analogamente nell'altro caso.

Si ha poi

$$\overbrace{A(t_1)B(t_2)} = \langle 0|T\{A(t_1)B(t_2)\}|0 \rangle \tag{5.57}$$

Infatti, visto che la contrazione è un numero,

$$\begin{aligned}
\overbrace{A(t_1)B(t_2)} &= \langle 0|\overbrace{A(t_1)B(t_2)}|0 \rangle = \\
&= \langle 0|T\{A(t_1)B(t_2)\}|0 \rangle - \langle 0|:A(t_1)B(t_2):|0 \rangle = \\
&= \langle 0|T\{A(t_1)B(t_2)\}|0 \rangle . \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Enunciamo ora il teorema di Wick. Esso afferma che

$$\begin{aligned}
T(u_1 u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) &= :u_1 u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n : + \\
&\quad + \overbrace{u_1 u_2} u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n : + \text{perm.} + \\
&\quad + \overbrace{u_1 u_2} \overbrace{u_3 u_4} \cdots u_{n-1} u_n : + \text{perm.} + \\
&\quad + \overbrace{u_1 u_2} \overbrace{u_3 u_4} \cdots \overbrace{u_{n-1} u_n} : . \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Si noti che se n risulta dispari, l'ultima linea è sostituita da

$$\overbrace{u_1 u_2} \overbrace{u_3 u_4} \cdots \overbrace{u_{n-2} u_{n-2}} u_n : + \text{perm.} \tag{5.60}$$

Si noti inoltre che il secondo membro è caratterizzato dal fatto di contenere solo prodotti ordinati normalmente e di contenere inoltre ogni possibile contrazione.

Il teorema si prova per induzione. Il teorema vale per $n = 2$, per definizione di contrazione di u_1 e u_2 . Sia $w(u_1, \cdots, u_n)$ il secondo membro della (5.59) e supponiamo il teorema valido per $n - 1$. Calcolo

$T(u_1 u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n)$. Senza perdere di generalità posso supporre che il tempo massimo sia t_1 . Si ha:

$$\begin{aligned}
T(u_1 u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) &= u_1 T(u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) = \\
&= u_1 w(u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) = \\
&= u_1^{(+)} w(u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) + u_1^{(-)} w(u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) = \\
&= u_1^{(+)} w(u_2 u_3 u_4 \cdots u_{n-1} u_n) + [u_1^{(-)}, w] + w u_1^{(-)}. \quad (5.61)
\end{aligned}$$

Ora il secondo membro contiene tutte le possibili contrazioni: il primo e il terzo termine tutte quelle in cui u_1 non risulta contratto, il secondo tutte quelle in cui u_1 viene contratto. Si veda infatti la (5.56) che mostra come il commutatore sia equivalente a contrazioni.

5.6 Propagatore del fonone

La funzione

$$\begin{aligned}
\widehat{u_i u_j} &= \overbrace{u_i(x_1, t_1), u_j(x_2, t_2)} = \\
&= T(u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) - : u_i(x_1, t_1), u_j(x_2, t_2) : \quad (5.62)
\end{aligned}$$

dicesi **propagatore del fonone**.

Dal momento che

$$\widehat{u_i u_j} = \langle 0 | T(u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) | 0 \rangle \quad (5.63)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{u_i u_j} &= \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle + \\
&+ \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | u_j(x_2, t_2) u_i(x_1, t_1) | 0 \rangle. \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Ora u_i soddisfa l'equazione d'onda (4.46) che qui riscriviamo

$$\rho \partial_t^2 u_i = (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial^2 u_i. \quad (5.65)$$

Applico allora al propagatore l'operatore

$$\begin{aligned}
\hat{O}_{ik} &= \rho \delta_{ik} \partial_t^2 - (\lambda + \mu) \partial_i \partial_k - \mu \delta_{ik} \partial^2 = \\
&= \rho \left(\delta_{ik} \partial_t^2 - c_t^2 \partial_i \partial_k - c_t^2 (\delta_{ik} \partial^2 - \partial_i \partial_k) \right) \quad (5.66)
\end{aligned}$$

che appare nell'equazione d'onda (4.46); dico che

$$\hat{O}_{ik} \langle 0 | T(u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) | 0 \rangle = -i \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2) \delta^3(x_1 - x_2). \quad (5.67)$$

in cui $t = t_1$ e le derivate sono fatte rispetto a x_1 . Considero

$$\begin{aligned}
& \partial_{t_1}^2 \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle = \\
& = \partial_{t_1} \left(\delta(t_1 - t_2) \langle 0 | u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle + \right. \\
& \quad \left. + \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \partial_{t_1} u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle \right) = \\
& = -\delta(t_1 - t_2) \langle 0 | \partial_{t_1} u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle + \\
& \quad + 2\delta(t_1 - t_2) \langle 0 | \partial_{t_1} u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle + \\
& \quad + \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \partial_{t_1}^2 u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle . \quad (5.68)
\end{aligned}$$

L'ultimo termine cancella la parte restante dell'equazione differenziale e si resta con

$$\begin{aligned}
& \delta(t_1 - t_2) \langle 0 | \rho \partial_{t_1} u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle = \\
& = \delta(t_1 - t_2) \langle 0 | \pi_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2) | 0 \rangle . \quad (5.69)
\end{aligned}$$

L'altro termine contiene $\theta(t_2 - t_1)$ e fornisce lo stesso risultato cambiato di segno. In conclusione

$$\begin{aligned}
& \hat{O}_{ik} \langle 0 | T(u_k(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) | 0 \rangle = \\
& = \delta(t_1 - t_2) \langle 0 | [\pi_i(x_1, t_1), u_j(x_2, t_2)] | 0 \rangle = \\
& = -i\delta_{ij} \delta(t_1 - t_2) \delta^3(x_1 - x_2) . \quad (5.70)
\end{aligned}$$

Considero ora la trasformata di Fourier del propagatore, $D_{ij}(\mathbf{p}, \omega)$ definita da

$$\langle 0 | T(u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) | 0 \rangle = \int \frac{d\mathbf{p} d\omega}{(2\pi)^4} D_{ij}(\mathbf{p}, \omega) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)} . \quad (5.71)$$

Applicando l'operatore \hat{O}_{ki} ad ambo i membri di questa equazione ho

$$\begin{aligned}
-i\delta_{kj} \delta(t_1 - t_2) \delta^3(x_1 - x_2) & = \int \frac{d\mathbf{p} d\omega}{(2\pi)^4} D_{ij}(\mathbf{p}, \omega) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)} \\
& \quad \times (-\rho\omega^2 \delta_{ki} + (\mu + \lambda)p_k p_i + \mu p^2 \delta_{ki}) \quad (5.72)
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$i\delta_{kj} = \left(\rho\omega^2 \delta_{ki} - (\mu + \lambda)p_k p_i - \mu p^2 \delta_{ki} \right) D_{ij}(\mathbf{p}, \omega) . \quad (5.73)$$

Dico che questa equazione ha soluzione

$$D_{ij}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{i}{\rho} \sum_s \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{\omega^2 - (\omega_p^s)^2 + i\epsilon} . \quad (5.74)$$

In questa equazione la somma è sui tre stati di polarizzazione (due trasversi ed uno longitudinale) mentre ω_p^s sono le energie definite in (4.60):

$$\begin{aligned}\omega_p^\ell &= c_\ell p = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} p, \\ \omega_p^t &= c_t p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} p.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Inoltre ϵ_i sono versori di polarizzazione definiti dalle equazioni (4.59) e che soddisfano dunque:

$$\begin{aligned}\epsilon_j^\ell &= \frac{p_j}{p} \\ \sum_j \epsilon_j^t \epsilon_j^\ell &= 0.\end{aligned}\quad (5.75)$$

Proviamo quindi la (5.74):

$$\begin{aligned}& \frac{i}{\rho} \sum_s \frac{\epsilon_j^s \epsilon_i^s}{\omega^2 - (\omega_p^s)^2} \left(\rho \omega^2 \delta_{ik} - (\mu + \lambda) p_i p_k - \mu p^2 \delta_{ik} \right) = \\ & i \sum_s \frac{\epsilon_j^s \epsilon_i^s}{\omega^2 - (\omega_p^s)^2} \left(\omega^2 \delta_{ik} - \frac{2\mu + \lambda}{\rho} p_i p_k - \frac{\mu}{\rho} (p^2 \delta_{ik} - p_i p_k) \right) \\ &= \sum_s \frac{i}{\omega^2 - (\omega_p^s)^2} \left[\omega^2 \epsilon_j^s \epsilon_k^s - c_\ell^2 \epsilon_j^s (\epsilon_i^s p_i) p_k - c_t^2 p^2 \left(\epsilon_j^s \epsilon_k^s - \frac{\epsilon_j^s (\epsilon_i^s p_i) p_k}{p^2} \right) \right] \\ &= \frac{i}{\omega^2 - (\omega_p^\ell)^2} (\omega^2 - c_\ell^2 p^2) \epsilon_j^\ell \epsilon_k^\ell + \frac{i}{\omega^2 - (\omega_p^t)^2} (\omega^2 - c_t^2 p^2) \vec{\epsilon}^t \cdot \vec{\epsilon}_k^t \\ &= i \sum_s \epsilon_j^s \epsilon_k^s = i \delta_{jk}.\end{aligned}\quad (5.76)$$

Il propagatore del fonone nello spazio degli impulsi è quindi $D_{ij}(\mathbf{p}, \omega)$ dato dalla (5.74). Si noti che il termine $i\epsilon$ con $\epsilon > 0$ fornisce la prescrizione per evitare i poli. I poli sono ora nel secondo e nel quarto quadrante nel piano complesso ω .

Si prova che questa prescrizione, dovuta a Feynman, è la prescrizione corretta. Proviamo prima che il propagatore nello spazio delle coordinate si scrive nel modo seguente:

$$\langle 0 | T(u_i(x_1, t_1) u_j(x_2, t_2)) | 0 \rangle = \sum_s \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_k^s} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega_k^s(t_1 - t_2)}.\quad (5.77)$$

Infatti

$$\begin{aligned}
& \langle 0|T(u_i(x_1, t_1)u_j(x_2, t_2))|0 \rangle = \langle 0|[u_i^{(-)}, u_j^{(+)}]|0 \rangle = \\
& = \sum_{ss'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle 0|[a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger]|0 \rangle \times \\
& \times \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^{s'}}{\sqrt{2\rho\omega_k^s} \sqrt{2\rho\omega_{k'}^{s'}}} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_2 - \omega_{k'}^{s'} t_2) + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega_k^s t_1)} = \\
& = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_k^s} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega_k^s (t_1 - t_2)} \quad (5.78)
\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato le regole di commutazione canoniche.

D'altro canto dalle (5.71) e (5.74)

$$\begin{aligned}
\langle 0|T(u_i(x_1, t_1)u_j(x_2, t_2))|0 \rangle & = \int \frac{d\mathbf{p}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{i}{\rho} \sum_s \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{\omega^2 - (\omega_p^s)^2 + i\epsilon} \times \\
& \times e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)}. \quad (5.79)
\end{aligned}$$

Effettuo l'integrazione sull'energia col metodo dei residui. Con la prescrizione di Feynman i poli sono

$$\omega = \pm\omega_p^s \mp i\epsilon. \quad (5.80)$$

Se $t_1 > t_2$ considero una semicirconfenza nel semipiano complesso inferiore altrimenti inn quello superiore. Nel primo caso ottengo come residuo

$$\theta(t_1 - t_2) \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_p^s} e^{i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega_p^s (t_1 - t_2)]}; \quad (5.81)$$

nell'altro caso

$$\begin{aligned}
& \theta(t_2 - t_1) \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_p^s} e^{i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \omega_p^s (t_1 - t_2)]} = \\
& = \theta(t_2 - t_1) \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_p^s} e^{-i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega_p^s (t_1 - t_2)]} = \\
& = \theta(t_2 - t_1) \sum_s \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_i^s \epsilon_j^s}{2\rho\omega_p^s} e^{+i[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \omega_p^s (t_1 - t_2)]} \quad (5.82)
\end{aligned}$$

Nella seconda linea abbiamo cambiato la variabile d'integrazione: $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$; nella terza abbiamo cambiato (i, \mathbf{x}_1, t_1) in (j, \mathbf{x}_2, t_2) il che corrisponde a cambiare gli argomenti del prodotto cronologico. In ogni

caso sommando (5.81) e (5.82) ottengo la (5.78) e questo conclude la prova. Riassumendo, il propagatore del fonone è dato dalla (5.79). Se si tien conto che

$$\epsilon_i^\ell \epsilon_j^\ell = \frac{p_i p_j}{p^2}, \quad (5.83)$$

che

$$\sum_s \epsilon_i^s \epsilon_j^s = \delta_{ij}, \quad (5.84)$$

e che quindi

$$\bar{\epsilon}_i^t \cdot \bar{\epsilon}_j^t = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}, \quad (5.85)$$

si ha anche

$$\begin{aligned} \langle 0|T(u_i(x_1, t_1)u_j(x_2, t_2))|0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)-\omega(t_1-t_2)}}{\rho} \times \\ &\times \left(\frac{i p_i p_j / p^2}{\omega^2 - (\omega_p^\ell)^2 + i\epsilon} + \frac{i(\delta_{ij} - p_i p_j / p^2)}{\omega^2 - (\omega_p^t)^2 + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

5.7 Teoria perturbativa

Abbiamo assunto come hamiltoniana di interazione, cfr. la (5.17):

$$H_I' = + \frac{g}{4!} \int d^3x (\partial_k u_k)^4 \quad (5.87)$$

Risulta chiaro che solo i fononi longitudinali aventi per versore di polarizzazione ϵ^ℓ partecipano all'interazione.

Calcoliamo l'operatore di evoluzione temporale al secondo ordine dello sviluppo perturbativo:

$$\begin{aligned} U(+\infty, -\infty) &= \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T(H_I'(t_1)H_I'(t_2)) = \\ &= \frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3x_1 dt_1 \int d^3x_2 dt_2 \times \\ &\times T((\partial_k u_k(x_1, t_1))^4 (\partial_m u_m(x_2, t_2))^4). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Il teorema di Wick sviluppa il prodotto cronologico in una somma di termini, ordinati normalmente e contenenti ciascuno k contrazioni (ossia k propagatori) e $8-2k$ campi u_j . Ad esempio, con 4 campi contratti a due a due e 4 non contratti ho, tra i vari termini, il contributo

$$\frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3x_1 dt_1 \int d^3x_2 dt_2 \times$$

$$\times : \overbrace{\partial_k u_k \partial_\ell u_\ell \partial_i u_i \partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)} \partial_b u_b \partial_c u_c \partial_n u_n : \quad (5.89)$$

Ci sono 4 campi liberi, quindi questo termine contribuisce a processi di scattering con ampiezza

$$\langle k_3, \ell_3, k_4, \ell_4; +\infty | U(+\infty, -\infty) | k_3, \ell_3, k_4, \ell_4; -\infty \rangle . \quad (5.90)$$

Il contributo all'ampiezza (5.90) proveniente da (5.89) si calcola nel modo seguente

$$\begin{aligned} & \frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3 x_1 dt_1 \int d^3 x_2 dt_2 \times \\ & \times \overbrace{\partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)} \overbrace{\partial_i u_i(x_1, t_1) \partial_b u_b(x_2, t_2)} \\ & \times \langle k_3, \ell_3, k_4, \ell_4; +\infty | : \partial_k u_k \partial_\ell u_\ell \partial_c u_c \partial_n u_n : | k_1, \ell_1, k_2, \ell_2; -\infty \rangle \end{aligned} \quad (5.91)$$

Nel prodotto normale ci sono 4 operatori di creazione e 4 di distruzione, ma un risultato non nullo si ha solo dai termini che contengono la combinazione $a_q^\dagger a_p^\dagger a_k a_w$ (già ordinata).

Vi sono vari modi in cui si possono scegliere questi operatori:

1. I due fononi nello stato iniziale di impulsi k_1 e k_2 sono annichiliti nello stesso punto;
2. Il fonone nello stato iniziale di impulso k_1 ed il fonone nello stato finale di impulso k_3 sono annichiliti nello stesso punto;
3. Il fonone nello stato iniziale di impulso k_1 ed il fonone nello stato finale di impulso k_4 sono annichiliti nello stesso punto;

Esaminiamo il primo caso. Supponiamo che $a_k a_w$ provengano da u_c^- e u_n^- mentre $a_q^\dagger a_p^\dagger$ da u_k^+ e u_ℓ^+ . Allora avremo (ogni derivata porta un $i|k|$ perché il campo è longitudinale)

$$\begin{aligned} & \partial_c u_c(x_2, t_2) \partial_n u_n(x_2, t_2) | k_1, \ell_1, k_2, \ell_2; -\infty \rangle = \\ & = -|k_1||k_2| e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{x}_2 - \omega_{k_1}^\ell t_2)} e^{i(\mathbf{k}_2 \mathbf{x}_2 - \omega_{k_2}^\ell t_2)} . \end{aligned} \quad (5.92)$$

Dunque, dalla (5.91) si ha

$$\frac{1}{2} \left(-i \frac{g}{4!} \right)^2 \int d^3 x_1 dt_1 \int d^3 x_2 dt_2 \left(|k_1||k_2||k_3||k_4| \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times e^{i((\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2-(\omega_{k_1}^\ell+\omega_{k_2}^\ell)t_2)} e^{i((\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)\mathbf{x}_1-(\omega_{k_3}^\ell+\omega_{k_4}^\ell)t_1)} \times \\ & \times \overbrace{\partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)} \overbrace{\partial_i u_i(x_1, t_1) \partial_b u_b(x_2, t_2)} \quad (5.93) \end{aligned}$$

Sostituiamo l'espressione dei propagatori di Feynman che si ottiene dalla (5.86) includendo solo il contributo dei fononi longitudinali:

$$\overbrace{u_i(x_1, t_1) u_b(x_2, t_2)} = \int \frac{d\mathbf{p}d\omega}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)-\omega(t_1-t_2)}}{\rho} \frac{i p_i p_b / p^2}{\omega^2 - (\omega_p^\ell)^2 + i\epsilon}. \quad (5.94)$$

Si ricava

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-i \frac{g}{4!}\right)^2 \int d^3x_1 dt_1 \int d^3x_2 dt_2 \frac{d\mathbf{p}_1 d\omega_1}{(2\pi)^4} \frac{d\mathbf{p}_2 d\omega_2}{(2\pi)^4} (|k_1||k_2||k_3||k_4| \times \\ & \times e^{-i((\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\mathbf{x}_2-(\omega_{k_1}^\ell+\omega_{k_2}^\ell+\omega_1+\omega_2)t_2)} \times \\ & \times e^{i((\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4+\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\mathbf{x}_1-(\omega_{k_3}^\ell+\omega_{k_4}^\ell+\omega_1+\omega_2)t_1)} \times \\ & \times \frac{i}{\rho} \frac{p_1^2}{\omega_1^2 - (\omega_{p_1}^\ell)^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{\rho} \frac{p_2^2}{\omega_2^2 - (\omega_{p_2}^\ell)^2 + i\epsilon} = \\ & = \frac{1}{2} \left(-i \frac{g}{4!}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\omega_1}{(2\pi)^4} \frac{d\mathbf{p}_2 d\omega_2}{(2\pi)^4} (|k_1||k_2||k_3||k_4| \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(k_1+k_2-p_1-p_2) \delta(\omega_{k_1}^\ell+\omega_{k_2}^\ell-\omega_{p_1}-\omega_{p_2}) \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(k_3+k_4-p_1-p_2) \delta(\omega_{k_3}^\ell+\omega_{k_4}^\ell-\omega_{p_1}-\omega_{p_2}) \\ & \times \frac{i}{\rho} \frac{p_1^2}{\omega_1^2 - (\omega_{p_1}^\ell)^2 + i\epsilon} \cdot \frac{i}{\rho} \frac{p_2^2}{\omega_2^2 - (\omega_{p_2}^\ell)^2 + i\epsilon}. \quad (5.95) \end{aligned}$$

In conclusione il contributo al second'ordine con 2 contrazioni e 4 campi liberi è

$$\begin{aligned} & (\text{fattore statistico}) \times \frac{1}{2} \left(-i \frac{g}{4!}\right)^2 \times \\ & \times (2\pi)^4 \delta(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} - \omega_{k_4}) \delta^3(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\omega_1}{(2\pi)^4} \frac{d\mathbf{p}_2 d\omega_2}{(2\pi)^4} \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{\rho^2} \times \\ & \times \frac{ip_1^2}{\omega_1^2 - (\omega_{p_1}^\ell)^2 + i\epsilon} \cdot \frac{ip_2^2}{\omega_2^2 - (\omega_{p_2}^\ell)^2 + i\epsilon} \Big|_{\mathbf{p}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_1, \omega_2 = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_1} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Il fattore statistico si determina calcolando il numero di modi equivalenti i cui due fononi sono distrutti nello stesso punto e ricreati nello stesso punto (il punto può essere x_1, t_1 o x_2, t_2), e successivamente distrutti in un altro punto e creati nuovamente (si noti che per raggiungere il secondo punto a partire dal primo i due fononi si sono propagati). Nel nostro esempio il fattore statistico vale $(4!)^2$, cfr. l'esercizio nella sezione 5.9.

Abbiamo considerato il primo dei tre casi enunciati dopo l'eq. (5.91). Il secondo caso si ottiene mediante lo scambio $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow -\mathbf{k}_3$ e $\omega_{k_2} \leftrightarrow -\omega_{k_3}$. Il terzo caso si ottiene mediante lo scambio $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow -\mathbf{k}_4$ e $\omega_{k_2} \leftrightarrow -\omega_{k_4}$. La simmetria di permutazione che permette di ricavare i tre contributi l'uno dall'altro si chiama *simmetria di crossing*.

I contributi del second'ordine in g^2 danno contributi anche ad altre transizioni, ad esempio:

1. transizione vuoto \rightarrow vuoto
2. da uno stato con un fonone ad uno stato con un fonone
3. etc.

Queste transizioni si ottengono effettuando un numero di contrazioni diverso da due; in altri termini nell'ampiezza appaiono N propagatori con $N \neq 2$.

Ad esempio la transizione vuoto \rightarrow vuoto implica la presenza di 4 propagatori e nessun campo libero. Al posto della (5.89) si ha

$$\begin{aligned} & \frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3x_1 dt_1 \int d^3x_2 dt_2 \times \\ & \underbrace{\hspace{15em}} \\ & \times \partial_k u_k \partial_\ell u_\ell \partial_i u_i \underbrace{\partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)}_{\hspace{10em}} \partial_b u_b \partial_c u_c \partial_n u_n \end{aligned} \quad (5.97)$$

Il fattore statistico in questo caso vale $4!$, cfr es. 2.

Un'altra transizione vuoto vuoto avviene contraendo in un modo diverso i campi: si ha

$$\frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3x_1 dt_1 \int d^3x_2 dt_2 \times$$

$$\times \overbrace{\partial_k u_k \partial_\ell u_\ell} \overbrace{\partial_i u_i \partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)} \overbrace{\partial_b u_b \partial_c u_c \partial_n u_n} \quad (5.98)$$

In questo caso il fattore statistico vale $\frac{(4!)^2}{2}$, cfr es. 2.

Come ultimo esempio consideriamo la transizione tra due stati con un fonone. Questo implica la presenza di 3 propagatori e due campi liberi. Al posto della (5.89) si ha

$$\frac{(-ig/4!)^2}{2} \int d^3 x_1 dt_1 \int d^3 x_2 dt_2 \times \overbrace{\partial_k u_k \partial_\ell u_\ell \partial_i u_i \partial_j u_j(x_1, t_1) \partial_m u_m(x_2, t_2)} \overbrace{\partial_b u_b \partial_c u_c \partial_n u_n} : (5.99)$$

Il fattore statistico in questo caso vale $\frac{(4!)^2}{3}$, cfr es. 3.

5.8 Diagrammi di Feynman

R. Feynman sviluppò un metodo diagrammatico per semplificare il calcolo perturbativo di elementi di matrice. Supponiamo di voler calcolare un'ampiezza all'ordine g^n . Innanzitutto scriviamo n diagrammi di vertice come in fig. 5.2. Ogni vertice rappresenta una interazione. Se due linee sono connesse, questo rappresenta una contrazione e la linea vien chiamata *interna*, mentre le restanti linee sono dette *esterne*, e rappresentano i fononi o nello stato finale o in quello iniziale.

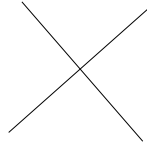


Figura 5.2: - *Diagramma di vertice.*

Per convenzione il tempo scorre da sinistra verso destra. Le regole di Feynman associano ad ogni diagramma una formula e sono le seguenti

1. Ad ogni linea associo un impulso ed una energia;
2. Ad ogni linea esterna di impulso \mathbf{k} associo un fattore k ;

3. Ad ogni linea interna di impulso \mathbf{p} ed energia ω un fattore

$$\frac{1}{\rho} \int \frac{d^3 p d\omega}{(2\pi)^4} \frac{ip^2}{\omega^2 - c_l^2 p^2 + i\epsilon}; \quad (5.100)$$

4. Ad ogni vertice con 4 impulsi \mathbf{p}_i entranti ed energie ω_i il fattore

$$g(2\pi)^4 \delta^3 \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right) \delta \left(\sum_i \omega_i \right); \quad (5.101)$$

5. Un peso statistico calcolato nel modo seguente: Si dia una etichetta $2, \dots, n$ ad ogni vertice. Ogni vertice i risulti collegato a j_1, \dots, j_m altri vertici tramite linee interne e a p_1, \dots, p_{4-m} linee esterne. Consideriamo tutte le permutazioni di tutte le etichette che lasciano il vertice i collegato a j_1, \dots, j_m altri vertici tramite linee interne e a p_1, \dots, p_{4-m} linee esterne. Sia s il numero di tali permutazioni. Allora il peso statistico è $1/s$. Si noti che il peso statistico qui definito include il fattore statistico definito nella sezione precedente e negli esercizi ed il fattore $\frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4!} \right)^n$.

6. Se due vertici sono collegati da ℓ linee un altro fattore $1/\ell!$.

Al primo contributo da noi calcolato in sezione 5.7 corrisponde il diagramma di fig. 5.3. Il peso statistico calcolato mediante le regole 5 e 6 vale $1/2$ ($s = 1$, $\ell = 2$ si noti che non posso permutare i due vertici, quindi $s = 1$ perché dopo la permutazione i vertici non sarebbero più legati agli impulsi originari). Gli altri diagrammi del secondo ordine con 4 linee esterne si ottengono mediante la simmetria di crossing.

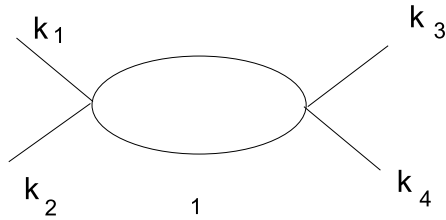


Figura 5.3: - Un diagramma del secondo ordine con 4 linee esterne.

Nel caso dell'ampiezza relativa all'eq. (5.97), il cui diagramma è in fig. 5.4.a, il peso statistico vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}$. Nel caso dell'ampiezza relativa

all'eq. (5.98), il cui diagramma è in fig. 5.4.b, il peso statistico vale $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2!}$. Nel caso dell'ampiezza relativa all'eq. (5.99), il cui diagramma è in fig. 5.4.c, il peso statistico vale $1/3!$ (anche in questo caso $s = 1$).

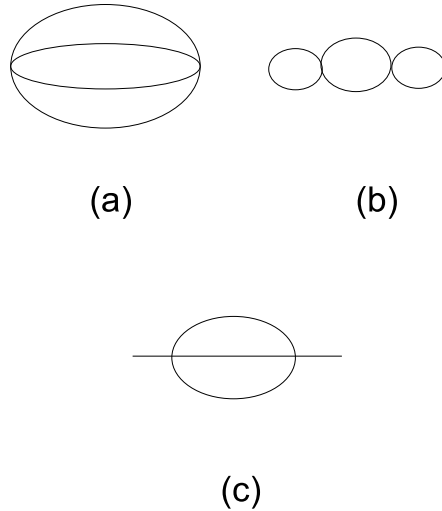


Figura 5.4: - Tre diagrammi di Feynman relativi rispettivamente all'eq. (5.97): (a), (5.98): (b), (5.99): (c).

Per chiudere osserviamo che mentre per i fononi delle linee esterne la legge di dispersione è $\omega = c_{\ell}p$, per quelli delle linee interne questo non è vero. I primi, per i quali vale la condizione di *mass - shell*, diconsi **reali**, gli altri **virtuali** o *off - shell*. I fononi virtuali sono altrettanto reali degli altri ed esistono in virtù della relazione di indeterminazione energia-tempo, che pone un limite alla verificabilità della legge di conservazione dell'energia (errore ΔE) effettuata mediante due misure consecutive a distanza di tempo Δt : $\Delta t \Delta E \sim \hbar$.

5.9 Esercizi

- 1) Calcolare il fattore statistico nel primo esempio svolto in Sez. 5.7.

Svolgimento.

La prima annihilatione e la prima creazione nel punto (\mathbf{x}_1, t_1) dello spazio-tempo può avvenire in 4^2 modi distinti; la seconda nel punto (\mathbf{x}_2, t_2) in 3^2 modi distinti. Dunque un fattore $(4 \cdot 3)^2$.

La prima contrazione dei 4 campi restanti può avvenire in due modi diversi, la seconda in un solo modo. Quindi un fattore 2. Infine i punti (\mathbf{x}_1, t_1) e (\mathbf{x}_2, t_2) possono essere scambiati e questo dà un ulteriore fattore 2. Il fattore statistico vale dunque $(4!)^2$.

- 2) Calcolare il fattore statistico nel secondo e terzo esempio svolto in Sez. 5.7 (transizioni vuoto vuoto).

Svolgimento.

Non ci sono campi liberi in entrambi i casi. La prima contrazione nella (5.97) può avvenire in 4 modi distinti; la seconda in 3, la terza in 2 e l'ultima in 1, ed il fattore statistico vale $4!$.

Nel terzo esempio, eq. (5.98), la prima contrazione che riguarda campi nel punto (\mathbf{x}_1, t_1) può avvenire in 6 modi distinti e così quella in (\mathbf{x}_2, t_2) . Una delle due contrazioni tra campi uno in (\mathbf{x}_1, t_1) e l'altro in (\mathbf{x}_2, t_2) può avvenire in 2 modi. l'ultima in un solo modo, per un totale di $\frac{(4!)^2}{2}$ modi.

- 3) Calcolare il fattore statistico relativo alla formula (5.99).

Parte III

Fluidi

Capitolo 6

Meccanica dei fluidi non viscosi

La distinzione fenomenologica tra solidi e liquidi può essere posta nei seguenti termini. Un liquido, a differenza di un solido, sottoposto a sollecitazioni di taglio (in inglese: *shear stress*), cioè a forze applicate tangenzialmente alle superfici (sia quelle che lo delimitano, sia ogni superficie interna), viene posto in moto. La nostra trattazione dei liquidi (o anche fluidi) si basa largamente sui capp. 40 e 41 del vol. II delle Lezioni di Fisica di Feynman e su parti dei primi tre capitoli della Meccanica dei Fluidi di Landau e Lifchitz. Essa comincerà con lo studio dei fluidi in quiete.

6.1 Statica dei fluidi

Un fluido è in quiete se non è sottoposto a forze di taglio. Quindi le forze agenti su di una qualsiasi superficie, interna od esterna, sono solo perpendicolari alla superficie stessa. La forza esercitata normalmente ad una superficie di area unitaria dicesi **pressione**:

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_n}{S}, \quad (6.1)$$

in cui \mathbf{u}_n è un versore normale alla superficie S e F è la forza. Questa equazione mostra che la pressione in ogni punto del liquido è la stessa a prescindere dall'orientazione della superficie. Infatti non c'è shear stress e quindi comunque si orienti \mathbf{u}_n si ha $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_n$ e $P = F/S$.

Non è detto tuttavia che la pressione sia uniforme nel fluido. Se sono presenti forze esterne, la pressione varia da punto a punto. Un esempio

di forza esterna è fornita dalla forza peso. Consideriamo due superfici piane orizzontali, σ_0 e σ ad altezza $y = 0$ e $y = h \neq 0$ rispettivamente. la pressione sulla superficie σ_0 sia P_0 . Per ottenere la pressione su σ occorrerà sottrarre da P_0 la pressione esercitata dalla forza peso della massa di liquido compresa tra le due superfici, cioè $\rho h S g/S = \rho h g$. Dunque,

$$P = P_0 - \rho g h , \quad (6.2)$$

e, di conseguenza,

$$P + \rho g h = \text{cost.} . \quad (6.3)$$

Osserviamo esplicitamente che per convenzione la pressione è sempre quella esercitata sul fluido. Generalizziamo questo risultato ad

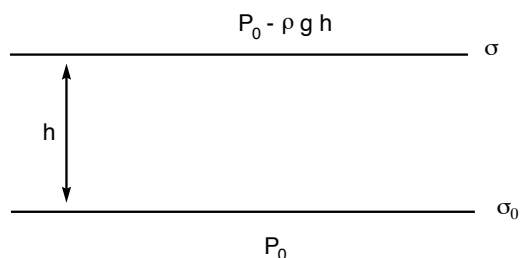


Figura 6.1: - *Effetto della forza peso sulla pressione di un liquido.*

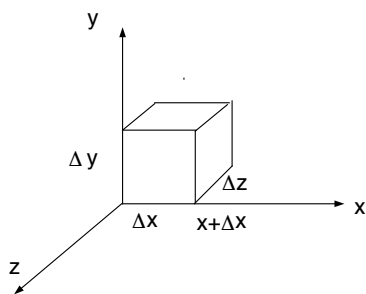


Figura 6.2: - *Una porzione di fluido in un campo di forze esterne.*

un campo di forze arbitrario. Consideriamo un cubetto di liquido,

cfr. fig.6.2. Nel punto di ascissa x è presente una forza $P\Delta z\Delta y$ (dall'esterno sul cubetto) e nel punto di ascissa $x + \Delta x$ una forza $-P(x + \Delta x)\Delta z\Delta y \approx -(P + \partial P/\partial x \Delta x)\Delta z\Delta y$, di modo che la forza totale lungo l'asse x è

$$-\frac{\partial P}{\partial x}\Delta V$$

se $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ è il volume del cubetto. In una direzione arbitraria la forza sarà data invece da

$$-\nabla P \cdot \Delta V .$$

Dunque, la forza per unità di volume è $-\nabla P$. Supponiamo che questa forza sia generata dall'esterno e che, come nel caso precedente (la forza peso), essa sia conservativa. Se allora φ è l'energia potenziale per unità di massa, la forza per unità di massa è $-\nabla\varphi$ e la forza per unità di volume è $-\rho \nabla\varphi$, se ρ la massa per unità di volume, ossia la *densità di massa*. Ne segue la **equazione fondamentale dell'idrostatica**

$$-\nabla P - \rho \nabla\varphi = 0 . \quad (6.4)$$

L'equazione fondamentale dell'idrostatica non ha in generale soluzione. Infatti se ρ è arbitraria, allora $\rho \nabla\varphi$ non è un gradiente e non può essere uguale a $-\nabla P$. Lo è certamente se il fluido è omogeneo ($\rho = \text{cost.}$); se il fluido è disomogeneo, si creano correnti convettive che spostano parti del liquido da una regione all'altra del volume da esso occupato ed il sistema non risulta più statico.

6.2 Fluidi perfetti

Un fluido viene caratterizzato assegnando un insieme di variabili che lo descrivono completamente. Due di queste variabili sono state già introdotte: pressione P e densità ρ . Queste due osservabili sono due campi scalari (si tratta cioè di funzioni scalari di \mathbf{r} e t). Un'altra variabile, questa volta vettoriale, è la velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) . \quad (6.5)$$

Si noti che \mathbf{v} non rappresenta la velocità di una determinata particella del fluido, ma la velocità che compete alla particella che al tempo t si trova in \mathbf{r} . Se il fluido è composto da particelle elettricamente cariche (ad esempio, un plasma) allora occorre considerare anche la densità di

corrente \mathbf{j}_Q ed il campo magnetico \mathbf{B} da essa generato. La fluidodinamica dei casi in cui \mathbf{j}_Q e \mathbf{B} assumono un ruolo rilevante prende il nome di magnetoidrodinamica, argomento che esula dalle nostre lezioni. Per concludere, occorrerebbe includere tra le variabili la temperatura T , ma essa può essere considerata una variabile derivata dal momento che l'equazione di stato

$$f(\rho, P, T) = 0 \quad (6.6)$$

permette di esprimerla mediante P e ρ . Dunque **i cinque campi che descrivono il fluido sono** $P = P(\mathbf{r}, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Per risolvere il problema del moto abbiamo quindi bisogno di cinque equazioni. La prima equazione è la **equazione di continuità** che esprime la legge di conservazione della massa:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} . \quad (6.7)$$

Essa può anche essere scritta nel modo seguente

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) , \quad (6.8)$$

in cui \mathbf{j} è la **densità del flusso di massa**:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} . \quad (6.9)$$

La seconda equazione è l'equazione di Newton, che nel caso dei fluidi prende il nome di equazione del moto di Eulero. Abbiamo già studiato il caso statico, cfr. l'eq. (6.4), il cui secondo membro rappresenta la forza totale per unità di volume o, equivalentemente $\mathbf{a} \cdot \rho$, se \mathbf{a} è l'accelerazione. Nel caso dinamico l'accelerazione non è nulla e si ha quindi

$$\mathbf{a} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi . \quad (6.10)$$

Calcoliamo l'accelerazione \mathbf{a} :

$$a_k = \frac{dv_k(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial v_k}{\partial t} , \quad (6.11)$$

ossia

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} . \quad (6.12)$$

Dunque, la **equazione di Eulero** è

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi . \quad (6.13)$$

Questa formula non tiene conto delle forze di taglio; quando esse siano presenti, a secondo membro occorre aggiungere le forze viscosi, che sono forze dissipative, in genere non trascurabili. L'equazione diventa allora

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{\text{visc.}} . \quad (6.14)$$

Per ora comunque porremo $\mathbf{f}_{\text{visc.}} = 0$.

Consideriamo infine la quinta equazione. Per i **fluidi perfetti**, in cui non c'è dissipazione di energia meccanica e quindi non avviene trasmissione di calore, l'entropia resta costante e si può scrivere l'**equazione di adiabacità**

$$S = \text{cost.} . \quad (6.15)$$

Introduciamo l'entalpia per unità di massa mediante la formula

$$w = w(s, P) = \epsilon + \frac{P}{\rho} . \quad (6.16)$$

Si ha

$$dw = Tds + \frac{dP}{\rho} \quad (6.17)$$

in cui s, ϵ sono entropia ed energia per unità di massa e $1/\rho$ è il volume per unità di massa.

Per i fluidi perfetti $Tds = 0$, dunque:

$$dw = \frac{dP}{\rho} , \quad (6.18)$$

che mostra come $\frac{dP}{\rho}$ sia un differenziale esatto e che inoltre

$$\nabla w = \frac{\nabla P}{\rho} . \quad (6.19)$$

nel caso generale la quinta equazione cercata è la (6.19). Noi assumeremo però che il fluido sia **incompressibile**, il che è in generale una buona approssimazione. Potremo allora, anziché considerare la (6.19), assumere come **quinta equazione**

$$\rho = \text{cost.} , \quad (6.20)$$

dal momento che una delle cinque equazioni serve a determinare ρ , quantità che viene proprio fissata dalla (6.20).

Riscriviamo per comodità le equazioni della fluidodinamica per fluidi perfetti incompressibili.

**Equazioni per fluidi perfetti
incompressibili**

$$\rho = \text{cost.}, \quad -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi.$$

6.3 Vorticità, moto potenziale, circuitazione

Introduciamo il campo vettoriale $\boldsymbol{\Omega}$ detto **vorticità**

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \text{vorticita}' . \quad (6.21)$$

Usando questa definizione e la (6.42), l'equazione di Eulero assume la forma (vedi esercizio):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi . \quad (6.22)$$

Un fluido si dice animato da moto irrotazionale (o **potenziale**) se e solo se la vorticità è dappertutto nulla:

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{moto irrotazionale o potenziale} . \quad (6.23)$$

Dicesi **circuitazione della velocità** \mathbf{v} attorno ad una linea chiusa γ l'integrale

$$\Gamma = \oint_{\gamma} d\ell \cdot \mathbf{v} . \quad (6.24)$$

Sussiste il seguente **teorema di Thomson**: *In un fluido perfetto*

$$\Gamma = \text{cost} . \quad (6.25)$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Si noti che per la validità delle ipotesi del teorema (fluido perfetto) è necessario che il fluido sia incompressibile o che almeno il moto sia isoentropico .

La vorticità $\boldsymbol{\Omega}$ gode delle seguenti proprietà la cui prova è lasciata come esercizio:

- P1) Il modulo della vorticità risulta uguale alla circuitazione del vettore \mathbf{v} attorno ad un'area unitaria perpendicolare a \mathbf{v} .

P2) Se $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ allora c'è una rotazione locale.

P3) Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del fluido nel punto \mathbf{r} allora

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r})}{2} .$$

6.4 Soluzione delle equazioni del moto per fluidi perfetti non viscosi

In un fluido perfetto (isoentropico oppure incompressibile) è possibile eliminare la pressione dalle equazioni del moto prendendo il rotazionale di ambo i membri dell'equazione di Eulero. Si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = 0 . \quad (6.26)$$

Questa è l'equazione fondamentale dei fluidi incompressibili non viscosi. Questa equazione assieme all'equazione di continuità, che, se $\rho = \text{cost.}$ ha la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (6.27)$$

ed alla definizione (6.21) di vorticità

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$$

risolvono completamente il problema dinamico.

Infatti supponiamo di conoscere $\boldsymbol{\Omega}$ all'istante iniziale; le eqq. (6.21) e (6.27) permettono allora di determinare \mathbf{v} in funzione di $\boldsymbol{\Omega}$. La procedura è del tutto analoga a quella che permette di determinare \mathbf{B} in funzione di \mathbf{j} in magnetostatica mediante le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2 = \nabla \wedge \mathbf{B}$. Nota quindi \mathbf{v} , l'equazione (6.26) consente la determinazione di $\boldsymbol{\Omega}$ al tempo Δt e la procedura può essere ripetuta.

Notiamo che se $\boldsymbol{\Omega}=0$ all'istante iniziale, allora, dall'eq. (6.26), segue che $\boldsymbol{\Omega}=0$ ad ogni istante successivo. In altri termini, se il fluido è irrotazionale ad un istante di tempo, lo è anche agli istanti successivi. Se il fluido non è isoentropico ovvero se è comprimibile, non è vero che si può eliminare la pressione prendendo il rotazionale dell'equazione di Eulero, e, quindi la (6.26) non è più valida. In tal caso anche se ad un certo istante di tempo il fluido è irrotazionale $\boldsymbol{\Omega}=0$, agli istanti di tempo successivi non lo sarà più.

L'ipotesi di fluido perfetto implica quindi che la proprietà di irrotazionalità si mantiene nel tempo. Le violazioni di questa proprietà,

comuni in natura, mostrano che la maggior parte dei fluidi reali sono lungi dall'essere perfetti.

Nella tabella seguente riassumiamo le tre equazioni dinamiche per i fluidi perfetti incompressibili.

Equazioni dinamiche per fluidi perfetti incompressibili	
$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v},$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$
$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = 0.$	

6.5 Flusso stazionario, linee di flusso e teorema di Bernoulli

Un flusso si dice **stazionario** se e solo se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \tag{6.28}$$

Questa equazione ha soluzione $\mathbf{v} = \text{cost.}$, risultato che, come sappiamo, non significa che le particelle del fluido si muovono con velocità costante, ma che, fissato un punto dello spazio, tutte le particelle che successivamente occuperanno quella posizione avranno la stessa velocità. Un flusso stazionario è dunque caratterizzato dal fatto che, assegnato un punto avente raggio vettore \mathbf{r} nello spazio, la velocità della particella che, al tempo t , si trova in quel punto, è sempre la stessa, qualunque sia t . A causa di questa proprietà possiamo introdurre delle **linee di flusso** (in inglese *streamlines*). Per definizione, esse sono curve la cui tangente, in ogni punto, ha la direzione di \mathbf{v} e la cui densità è proporzionale al modulo della velocità. Una definizione analoga vale, come è noto, in magnetostatica o in elettrostatica per le linee di forza del campo.

Le equazioni che definiscono le linee di flusso sono

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{6.29}$$

Se il flusso è stazionario, le linee di flusso coincidono con le traiettorie delle molecole che compongono il fluido, come è evidente per il fatto

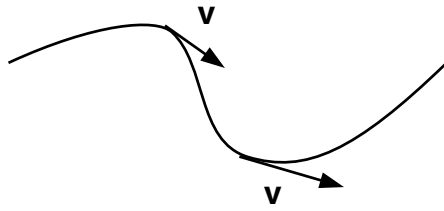


Figura 6.3: *Linea di flusso.*

che la tangente alla traiettoria del moto di una particella ha proprio la direzione della velocità. Per flussi non stazionari questa proprietà non vale e le linee di flusso cambiano continuamente forma.

Consideriamo ora l'equazione di Eulero (6.22) che per flussi stazionari assume la forma

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi . \quad (6.30)$$

Moltiplichiamo scalarmente per \mathbf{v} e otteniamo

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi \right] = 0. \quad (6.31)$$

Questa equazione contiene l'informazione che, per piccoli spostamenti nella direzione della velocità, la quantità tra parentesi resta costante. Ma per flussi stazionari la direzione della velocità coincide con quella delle linee di flusso. Ne segue il teorema di Bernoulli:

Teorema di Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \varphi = \text{cost.}$$

lungo le linee di flusso

Se il flusso, oltre che essere stazionario è anche irrotazionale, allora il teorema assume una forma più forte. Infatti la costante a secondo membro dell'equazione è la stessa in tutti i punti dello spazio, cioè non

solo non varia lungo la linea di flusso, ma non varia nemmeno passando da una linea di flusso ad un'altra. Infatti se il fluido è irrotazionale, nella (6.30) $\Omega=0$ e non è necessario moltiplicare per \mathbf{v} per ottenere il teorema. Per questa ragione il teorema di Bernoulli è particolarmente importante per i moti irrotazionali.

6.6 Linee di vortice

In maniera analoga alle linee di flusso, possiamo definire le **linee di vortice** come quelle linee le cui tangenti sono in ogni punto parallele ad Ω e la cui densità è proporzionale al suo modulo Ω . In Fig.6.4 è rappresentato un fluido in moto con velocità \mathbf{v} . Le linee di vortice sono anelli concatenati a \mathbf{v} . Nella figura essi sono rappresentati da x o da punti (le x indicano vorticità entranti nel foglio, i punti vorticità uscenti). Durante il moto vorticoso le linee di vortice si spostano col fluido. E' facile vedere che la disposizione in figura riflette la definizione stessa di vorticità, cfr. l'eq. (6.21). Ω deve essere perpendicolare a \mathbf{v} e risulta non nulla se \mathbf{v} non è uniforme. La figura potrebbe rappresentare un anello di fumo che si sposta verso destra (ovviamente c'è del fluido che torna indietro, esternamente all'anello perché il fluido è incompressibile). Sfruttando l'analogia con l'elettromagnetismo già discussa, le analoghe delle linee di campo \mathbf{B} sono le linee di flusso, le analoghe delle linee di vortice i fili percorsi da correnti elettriche.

L'anello in figura potrebbe essere prodotto e visualizzato emettendo dell'aria contenente polveri in sospensione attraverso un foro circolare (si veda la discussione di questo esperimento nelle lezioni di Feynman, vol. II, par. 40.5). Questo esperimento, facilmente realizzabile, mostra non solo l'esistenza dei vortici, ma anche il fatto che essi di norma si accompagnano alla viscosità e alla dissipazione. Infatti una conseguenza dell'equazione dei fluidi perfetti, discussa alla fine del par. 6.4, è che, se $\Omega=0$ ad un certo istante di tempo, allora $\Omega = 0$ ad ogni istante di tempo successivo. Quindi non sarebbe mai possibile generare vortici a partire da una configurazione irrotazionale. I vortici ovviamente sono invece generati continuamente, ad esempio dal passaggio veloce di un profilo in un fluido (le ali di un aereo, un remo nell'acqua). Questi esempi mostrano che, per descrivere il moto reale dei fluidi, occorre abbandonare l'ipotesi del fluido perfetto ed introdurre viscosità e dissipazione. Questi punti saranno trattati nei capitoli successivi.

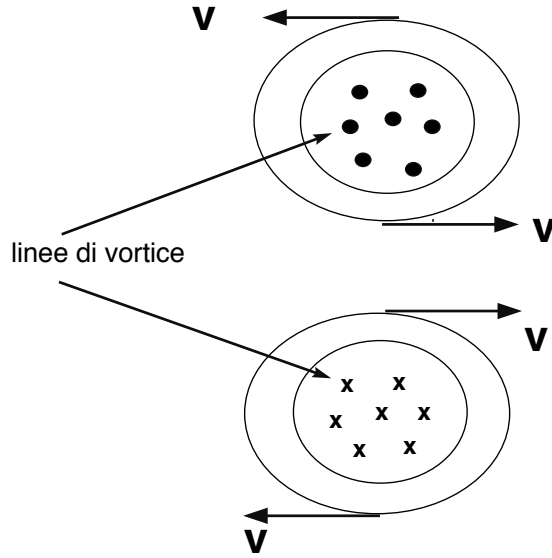


Figura 6.4: *Linee di vortice e di flusso.*

6.7 Flusso di energia

Consideriamo un volume fisso dello spazio e studiamo la variazione nel tempo dell'energia del fluido in esso contenuta. Se ϵ è l'energia interna per unità di massa, l'energia per unità di volume è

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon . \quad (6.32)$$

In questa espressione il primo addendo rappresenta l'energia cinetica ed il secondo l'energia interna. Si prova facilmente che

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2} \nabla(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left[w + \frac{v^2}{2} \right] + \rho \mathbf{v} T \cdot \nabla s \quad (6.33)$$

mentre

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} = -w \nabla(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s . \quad (6.34)$$

In conclusione si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = -\nabla \left[\rho \mathbf{v} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \right] . \quad (6.35)$$

Questa è una equazione di continuità che riassume una legge di conservazione. Integriamo su un volume finito e otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \epsilon \right) = - \oint_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j} \left(w + \frac{v^2}{2} \right) \quad (6.36)$$

in cui s'è posto $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. La (6.36) esprime la legge di conservazione dell'energia. A primo membro abbiamo l'energia contenuta nel volume V , si ricordi l'espressione (6.32). A secondo membro abbiamo il flusso di energia che attraversa la superficie Σ che delimita V . L'integrando a secondo membro rappresenta la densità del flusso di energia, cioè l'energia passante per unità di tempo attraverso l'unità di superficie disposta perpendicolarmente alla velocità delle particelle. Sappiamo che, invece, \mathbf{j} rappresenta la densità del flusso di massa. Dunque ogni particella di massa unitaria porta con sé l'energia

$$w + \frac{v^2}{2}$$

data dalla somma dell'energia cinetica e l'entalpia. Il motivo per cui in questa espressione appare l'entalpia w e non l'energia interna ϵ risiede nel fatto che, come sappiamo dalla (6.17), entalpia ed energia interna sono legate dalla relazione $w = \epsilon + P/\rho$. Il flusso totale di energia è

$$- \oint_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \rho \mathbf{v} \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) - \oint_{\Sigma} d\boldsymbol{\sigma} P \mathbf{v} .$$

L'ultimo termine è necessario: esso esprime infatti il lavoro esercitato per unità di tempo dalle forze di pressione sulla superficie che contiene il fluido. Notiamo infine che l'espressione trovata vale in assenza di campo esterno. Se esso è presente occorre aggiungerne il contributo.

6.8 Flusso d'impulso

Per l'impulso vale una equazione di continuità analoga. L'impulso per unità di volume vale $\rho \mathbf{v}$. Calcolando la sua derivata temporale ed utilizzando equazione di continuità ed equazione di Eulero. otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \phi) , \quad (6.37)$$

con

$$\Pi_{ik} = P \delta_{ik} + \rho v_i v_k . \quad (6.38)$$

Abbiamo incluso a secondo membro di questa equazione la forza esterna, derivabile da un potenziale ϕ . La dimostrazione di queste formule è lasciata come esercizio al lettore. Integrando su di un volume otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho v_i = - \oint_{\Sigma} d\sigma_k \Pi_{ik}. \quad (6.39)$$

Risulta chiaro che a secondo membro c'è la quantità della componente i dell'impulso che esce nell'unità di tempo dal volume V . Se $d\sigma_k = d\sigma n_k$ ($\{n_k\}$ perpendicolare alla superficie $d\sigma_k$), allora

$$n_k \Pi_{ik} = P n_i + \rho v_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = [P \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_i$$

e quindi Π_{ik} rappresenta la i -esima componente dell'impulso che passa nell'unità di tempo attraverso l'area unitaria disposta perpendicolarmente all'asse x_k .

6.9 Esercizi e complementi

- 1) Ricavare (6.3) da (6.4).
- 2) Supponendo che si possa assimilare una stella ad un fluido, dimostrare che l'equazione che ne descrive l'equilibrio è

$$-4\pi G\rho = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right). \quad (6.40)$$

- 3) Nel caso in cui la stella dell'esercizio precedente non è in rotazione, il sistema è a simmetria sferica. Provare che l'e. (6.40) si riduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{8} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (6.41)$$

- 4) Provare l'equazione di continuità (6.7).
- 5) Giustificare la (6.12).
- 6) Provare la (6.17).
- 7) Provare l'identità

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2. \quad (6.42)$$

- 8) Provare le proprietà della vorticità P1)-P3).

- 9) Dimostrare il teorema di Thomson.
- 10) Provare le seguenti proprietà del moto potenziale:
1. La circuitazione della velocità è sempre nulla.
 2. Non possono esserci linee di flusso chiuse.

Queste proprietà sussistono solo se il moto avviene in una porzione di spazio semplicemente connessa.

- 11) Provare le (6.33) e (6.34).
- 12) Provare le eq. (6.38).
- 13) Discutere alcune applicazioni del teorema di Bernoulli.

Capitolo 7

Moti browniani

In questo capitolo e nel successivo studieremo fluidi viscosi, cominciando con una trattazione microscopica basata sul modello dei moti browniani e proseguendo, nel capitolo successivo, con le equazioni del moto per tali fluidi e con l'esame delle loro proprietà.

7.1 Moti browniani

Nel 1828, mentre effettuava alcune osservazioni al microscopio, il botanico Robert Brown notò che dei grani di polline, sospesi in acqua, non rimanevano fermi, ma si muovevano, animati da moto incessante e casuale. Queste particelle in sospensione, che oggi, con nome generico, chiamiamo *particelle colloidali*, avevano dimensioni di circa $1\ \mu\text{m}$ e sono visibili anche con il microscopio piuttosto semplice di cui disponeva il botanico inglese. Brown dapprima ipotizzò che le particelle si muovessero perché costituite da materia vivente, ma dovette successivamente ricredersi. Effettuò infatti un esperimento nel quale l'osservazione al microscopio era stata preceduta da un lungo periodo di tempo durante il quale il recipiente contenente il polline era rimasto sigillato. Anche in quel caso, all'osservazione, le particelle colloidali risultavano agitate dallo stesso moto casuale e ciò convinse Brown che il moto non era legato alla presenza di forme di vita nel liquido. Se infatti si fosse trattato di materia vivente, il moto non avrebbe dovuto aver luogo, perché gli eventuali esseri viventi, rinchiusi nel recipiente, dopo aver consumato tutto l'alimento a loro disposizione, privi di cibo, avrebbero dovuto morire. Brown adoperò anche colloidali di diversa natura ottenendo, per particelle aventi dimensioni simili, risultati tra loro analoghi.

Il problema restò aperto per alcuni decenni. Intorno al 1860 una

ipotesi diffusa era che il moto delle particelle colloidali fosse dovuto all'agitazione termica delle molecole che compongono il liquido in cui i colloidi sono sospesi. Una conseguenza di questa ipotesi era che il moto avrebbe dovuto essere più veloce all'aumentare della temperatura. Il principio di equipartizione dell'energia afferma infatti che l'energia cinetica media è legata alla temperatura dalla relazione $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}kT$ (k costante di Boltzmann). Questa interpretazione, che escludeva ogni ruolo della materia vivente e spiegava così in parte le osservazioni, presentava tuttavia due difficoltà:

- 1) Le molecole sono minuscole in confronto alle particelle colloidali. Le dimensioni tipiche delle molecole sono infatti dell'ordine del nm, cioè circa 10^{-3} volte più piccole di quelle dei colloidi. E tuttavia queste particelle tanto piccole dovrebbero essere in grado di impartire ai colloidi moti osservabili sulla scala del μm .
- 2) Le velocità delle particelle sono dell'ordine di 10^3 m/sec ed il rate di collisione è dell'ordine di 10^{12} urti al secondo (cfr. esercizi 2 e 3). L'occhio umano può risolvere eventi che avvengono con un ritardo temporale maggiore o uguale di $1/30$ di secondo. E tuttavia è possibile distinguere due successivi urti dei colloidi.

Fu A. Einstein a risolvere entrambi i problemi nel meno noto tra i suoi tre fondamentali lavori del 1905. Per spiegare il suo ragionamento converrà introdurre il concetto di cammino aleatorio o *random walk*.

7.2 Random walk

Immaginiamo una particella che si muove nel modo seguente. Ad ogni istante t di tempo (che assumiamo costituito da una successione discreta) la particella si sposta di una unità di lunghezza ($\Delta x = 1$) con probabilità p verso destra e con probabilità $q = 1 - p$ verso sinistra. Questo moto è un esempio di *random walk*. Un modello può essere rappresentato da un uomo che vuole raggiungere la posizione R a partire da O e che, anziché muoversi in linea retta, effettua un passo in avanti verso destra o verso sinistra come in figura 7.1. Se $p = q$ è evidente che nel lungo periodo la posizione dell'uomo non potrà avere uno scarto troppo elevato né verso destra né verso sinistra. Tuttavia di tanto in tanto (ad esempio nel tratto a in figura) lo scarto può essere significativo.

La soluzione data da Einstein al problema del moto browniano è che il moto delle molecole è analogo ad un random walk. Noi non

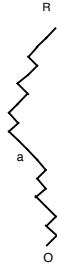


Figura 7.1: - *Random walk da O a R.*

osserviamo tutti i minuscoli movimenti delle molecole ma solo quelli che sono il risultato di un accumulo di piccoli movimenti tutti nella stessa direzione e verso e che quindi consistono di uno spostamento non infinitesimale. Proprio perché si tratta di eventi rari, essi sono ben separati temporalmente e l'occhio umano riesce a risolverli.

Una trattazione esauriente dei moti browniani dovrebbe considerare random walk tridimensionali, ma ci limiteremo a trattare il caso unidimensionale che è sufficiente a chiarire le caratteristiche salienti di questi moti.

Prima di proseguire osserviamo che se si ripete varie volte un esperimento di random walk si ottiene come valor medio della posizione finale $x = 0$. Tuttavia, per ogni singolo esperimento, è molto piccola la probabilità che, partendo all'istante iniziale dalla posizione $x_0 = 0$, risulti $x_N = 0$ al tempo $t = N$, anche se si tratta di un intervallo di tempo lungo, cfr. esercizio 4).

Per effettuare una trattazione analitica denotiamo con x_k la posizione al tempo k , ed assumiamo $x_0 = 0$. Al tempo $t = 1$ sarà $x_1 = x_0 + k_1\Delta x$ e in generale

$$x_j = x_{j-1} + k_j\Delta x \quad (7.1)$$

da cui $x_N = x_{N-1} + k_N\Delta x$, con k_j variabile aleatoria che assume i valori ± 1 con eguale probabilità. Si ha

$$\begin{aligned} \langle x_N^2 \rangle &= \langle (x_{N-1} + k_N\Delta x)^2 \rangle \\ &= \langle x_{N-1}^2 \rangle + 2\Delta x \langle x_{N-1}k_N \rangle + \Delta x^2 \langle k_N^2 \rangle \quad (7.2) \end{aligned}$$

Ora $k_N^2 = 1$; inoltre se assumiamo che ogni passo del random walk sia indipendente dai precedenti $\langle x_{N-1}k_N \rangle = \langle x_{N-1} \rangle \langle k_N \rangle = 0$.

Dunque

$$\langle x_N^2 \rangle = \langle x_{N-1}^2 \rangle + \Delta x^2 \langle k_N^2 \rangle = N \Delta x^2 . \quad (7.3)$$

Se il random walk avviene nel tempo t e l'intervallo di tempo unitario è Δt si ha $N = t/\Delta t$. Introduciamo la **costante di diffusione**

$$D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} , \quad (7.4)$$

le cui dimensioni sono

$$[D] = [L]^2[T]^{-1} . \quad (7.5)$$

Ne segue la **legge di diffusione unidimensionale**:

$$\langle x^2(t) \rangle = 2 D t . \quad (7.6)$$

La quantità a primo membro della (7.6) è la varianza della variabile aleatoria $x(t)$:

$$\sigma^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad (7.7)$$

perché $\langle x(t) \rangle = 0$. La **legge di diffusione 3-dimensionale** ha invece la forma:

$$\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = 6 D t , \quad (7.8)$$

dal momento che $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle + \langle y^2(t) \rangle + \langle z^2(t) \rangle$. L'equazione (7.8) permette di misurare D mediante una misura simultanea di t e $\langle \mathbf{r}^2(t) \rangle$. Anche conoscendo D , non è tuttavia possibile utilizzare la (7.4) per ricavare informazioni sulle quantità microscopiche perché in questa equazione appaiono non una, ma due incognite legate al moto molecolare, Δx e Δt : occorre un'altra equazione. Essa viene fornita dal legame tra attrito e diffusione. Prima di affrontare questo tema generalizziamo il modello finora usato per descrivere il moto browniano. Supponiamo che ad ogni istante di tempo sia aleatoria non solo la direzione del moto ($k = \pm 1$) ma anche il modulo dello spostamento cioè che al tempo $t = j$ siano possibili spostamenti $k_j \Delta x$ ($k_j = \pm 1, \pm 2, \dots$) con probabilità P_{k_j} . Per semplicità assumiamo che la distribuzione di probabilità $\{P_{k_j}\}$ sia indipendente dal tempo, ossia $\{P_{k_j}\} = \{P_k\}$ per ogni j .

Calcoliamo il valor medio della variabile k_j (che risulta per ipotesi indipendente da j):

$$u \equiv \langle k_j \rangle = \sum_k k P_k ; \quad (7.9)$$

il caso precedente corrisponde a $k = \pm 1$ e $P_{\pm 1} = 1/2$. La posizione media della particella al tempo $t = N$ risulta data da:

$$\begin{aligned}\langle x_N \rangle &= \langle x_{N-1} + \Delta x k_N \rangle = \langle x_{N-1} \rangle + \Delta x \langle k_N \rangle \\ &= \langle x_{N-1} \rangle + u \Delta x = Nu \Delta x + \langle x_0 \rangle = Nu \Delta x\end{aligned}\quad (7.10)$$

Dunque, questa generalizzazione permette di includere la possibilità di una *deriva*, cioè di un moto dovuto ad una forza che produca un valor medio della posizione non nullo (se $u \neq 0$).

Calcoliamo la varianza della variabile x_N :

$$\begin{aligned}\sigma_{x_N}^2 &= \langle (x_N - \langle x_N \rangle)^2 \rangle = \langle (x_{N-1} + k_N \Delta x - Nu \Delta x)^2 \rangle \\ &= \langle (x_{N-1} - u(N-1)\Delta x + k_N \Delta x - u \Delta x)^2 \rangle \\ &= \langle (x_{N-1} - u(N-1)\Delta x)^2 \rangle + \Delta x^2 \langle (k_N - u)^2 \rangle \\ &\quad + 2\Delta x \langle (k_N - u)(x_{N-1} - u(N-1)\Delta x) \rangle.\end{aligned}\quad (7.11)$$

L'ultimo termine si annulla. Infatti le distribuzioni di probabilità al tempo N ed al tempo $N-1$ sono tra di loro indipendenti (ad ogni istante di tempo il random walk perde memoria della storia precedente):

$$\begin{aligned}2\Delta x \langle (k_N - u)(x_{N-1} - u(N-1)\Delta x) \rangle &= \\ = 2\Delta x \langle k_N - u \rangle \langle x_{N-1} - u(N-1)\Delta x \rangle &= 0\end{aligned}\quad (7.12)$$

dal momento che $\langle k_N \rangle = u$. Segue che

$$\begin{aligned}\sigma_{x_N}^2 &= \langle (x_{N-1} - \langle x_{N-1} \rangle)^2 \rangle + \Delta x^2 \langle (k_N - \langle k_N \rangle)^2 \rangle \\ &= \sigma_{x_{N-1}}^2 + \Delta x^2 \sigma_k^2 = N \Delta x^2 \sigma_k^2,\end{aligned}\quad (7.13)$$

perché, in base alla (7.10), $\langle x_{N-1} \rangle = u(N-1)\Delta x$. Dato che $N = t/\Delta t$ si ha infine

$$\sigma_{x_N}^2 = 2t \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \right) \sigma_k^2.\quad (7.14)$$

Si noti che si riottiene il risultato per $u = 0$ giacché in questo caso $\sigma_k^2 = 1$.

7.3 Relazione diffusione-dissipazione

Consideriamo una particella che si muove per effetto di una forza costante f , ad esempio la gravità. A causa dell'attrito la particella subirà interazioni col mezzo, interazioni casuali. Assumiamo che esse

avvengano al ritmo di una ogni Δt secondi. Continueremo a considerare per semplicità moti unidimensionali. La legge del moto

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{f}{m} \quad (7.15)$$

ha soluzione

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{f}{2m} t^2, \quad (7.16)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{f}{m} t. \quad (7.17)$$

Dopo ogni urto la particella dimentica la sua storia precedente. Passando nella (7.17) ai valori medi si ha

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{f}{2m} \Delta t^2 \quad (7.18)$$

in cui abbiamo usato $\langle v_{0x} \rangle = 0$ perché non esiste una direzione privilegiata. Dalla (7.18) ricaviamo la velocità di deriva costante della particella

$$v_d = \frac{f}{\zeta} \quad \zeta = \frac{2m}{\Delta t}. \quad (7.19)$$

Il parametro ζ è il **coefficiente d'attrito viscoso**, come si prova facilmente (cfr. es. 6).

Il coefficiente d'attrito viscoso è legato alle dimensioni della particella. Si può provare, ma noi ce ne asteniamo per brevità (si veda comunque l'esercizio 7), che per particelle sferiche di raggio R sussiste la formula di Stokes:

$$\zeta = 6\pi\eta R, \quad (7.20)$$

in cui η è la **viscosità**; un tipico valore, per l'acqua, della viscosità è $\eta(H_2O) = 10^{-3} kg/(m \cdot sec)$. Nel prossimo capitolo, come preannunciato, ci occuperemo più in dettaglio dei fluidi viscosi.

Osserviamo ora che

$$D \cdot \zeta = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \cdot \frac{2m}{\Delta t} = m \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 = m \langle v_x^2 \rangle = kT. \quad (7.21)$$

La relazione

$$D \zeta = kT \quad (7.22)$$

fu trovata da Einstein nel 1905. Essa è notevole perché lega tra loro parametri macroscopici, ma nasce da una precisa ipotesi sulla struttura

atomica della materia (ancora agli inizi del XX secolo c'erano autorevoli riserve sulla reale esistenza degli atomi, basti pensare alla posizione di Mach). La (7.21) costituisce un esempio di una classe generale di relazioni dette di *fluttuazione-dissipazione*. In particolare essa ci dice che il coefficiente d'attrito viscoso e la costante di diffusione di tutti i materiali sono in relazione di proporzionalità inversa, e che il loro prodotto è una costante uguale per tutti i materiali e che dipende solo dalla temperatura.

7.4 Legge di Fick e legge di diffusione

Supponiamo esista un gradiente di densità di particelle lungo l'asse x -axis in modo tale che $\rho(x - L/2) \neq \rho(x + L/2)$ cfr. fig. 7.2. Consideriamo i volumi $L \times S$ centrati sui punti di coordinate $x - L/2$

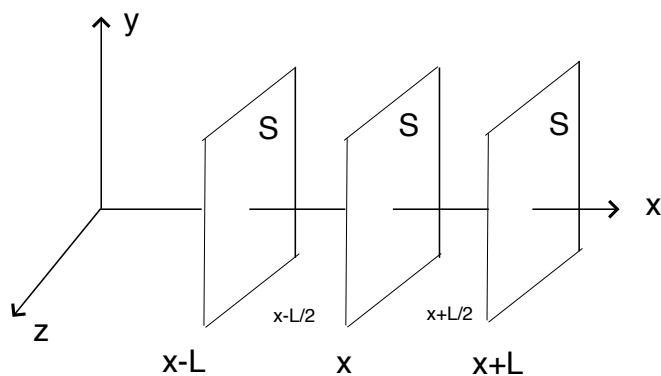


Figura 7.2: *Diffusione dovuta ad un gradiente di concentrazione.*

e $x + L/2$. Essi contengono $L \times S \times \rho(x - L/2)$ e $L \times S \times \rho(x + L/2)$ molecole rispettivamente. Non c'è moto macroscopico lungo le direzioni y e z , ma ci sarà un flusso attraverso il piano passante per il punto x in ragione del gradiente di densità: precisamente metà delle molecole contenute nel volume centrato sul punto $x - L/2$ si muoveranno verso destra e metà delle molecole contenute nel volume centrato sul punto $x + L/2$ si muoveranno verso sinistra. Il flusso nasce dalla differenza tra le densità. Se in media nel tempo Δt le molecole percorrono una distanza L , il numero di particelle passanti attraverso x nel tempo unitario e per unità di area di superficie disposta perpendicolarmente al

moto è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \times \frac{1}{\Delta t} \times \frac{1}{2} \left[L \times S \times \rho \left(x - \frac{L}{2} \right) - L \times S \times \rho \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \\ & \approx - \frac{L^2}{2\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Abbiamo qui usato la (7.4) con $L = \Delta x$. La quantità in (7.23) è la densità di flusso di particelle j_x (componente x), quindi

$$j_x = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} , \quad (7.24)$$

e, in 3D:

$$\mathbf{j} = -D \nabla \rho , \quad (7.25)$$

equazione nota come **legge di Fick**. Ora, la densità di flusso di particelle \mathbf{j} soddisfa l'equazione di continuità (6.7), che ora è scritta per la densità di particelle e per la densità del flusso di particelle (nel capitolo precedente ρ era la densità di massa e \mathbf{j} la densità del flusso di massa). Dalla legge di Fick e dall'equazione di continuità si ottiene una equazione per la densità di particelle, **l'equazione di diffusione**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho \quad (7.26)$$

7.5 Distribuzione gaussiana

L'equazione di diffusione può essere risolta con vari metodi (per un metodo alternativo a quello qui descritto si veda l'esercizio 11). Consideriamo per semplicità il caso 1D e scriviamo l'equazione per la densità di probabilità di trovare al tempo t una delle particelle del fluido nell'intervallo compreso tra x e $x + dx$. Denotiamo questa densità con $w(x, t)$ di modo che $\rho(x, t) = Nw(x, t)$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx w(x, t) = 1 . \quad (7.27)$$

L'equazione per $Y = w$ o ρ è

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} . \quad (7.28)$$

L'equazione è invariante per la trasformazione di scala:

$$t \rightarrow \xi t , \quad x^2 \rightarrow \xi x^2 . \quad (7.29)$$

Anche la sua soluzione deve esserlo e quindi può dipendere solo dal rapporto invariante x/\sqrt{t} . Introduciamo per comodità la variabile adimensionale

$$u = \frac{x}{\sqrt{Dt}}, \quad (7.30)$$

e

$$Y(x, t) = F(u). \quad (7.31)$$

$F(u)$ soddisfa

$$F'' + \frac{u}{2}F' = 0 \quad (7.32)$$

in cui l'apice rappresenta la derivata nella variabile u . Poniamo $g(u) = F'(u)$ sicché

$$g(u) = F'(u) = \text{cost} \times e^{-u^2/4}. \quad (7.33)$$

Integrando una seconda volta:

$$Y(u) = A \operatorname{erf}\left(\frac{u}{2}\right) + B, \quad (7.34)$$

con

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2}. \quad (7.35)$$

Le costanti A e B dipendono dalle condizioni iniziali. Osserviamo comunque che in generale la soluzione di una equazione alle derivate parziali come la (7.28) dipende da una intera funzione e non solo da alcuni suoi valori. Cerchiamo quindi la soluzione che soddisfa alla condizione iniziale

$$Y(x, 0) = \text{cost} \delta(x). \quad (7.36)$$

Per risolvere il nostro problema di valori iniziali notiamo che se $Y(x, t)$ è soluzione della (7.28) lo è anche $\partial Y/\partial x$; quindi anche

$$\frac{\partial Y(u)}{\partial x} = \frac{dY}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{Dt}} \frac{dY}{du} \quad (7.37)$$

risolve la (7.28); mediante la (7.34) si ottiene dunque per $w(x, t)$:

$$w(x, t) = \frac{A}{2\sqrt{Dt}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2/4} = \frac{A}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (7.38)$$

Per soddisfare la condizione di normalizzazione scegliamo $A = 1/2$. Dunque,

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{Dt\pi}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (7.39)$$

risulta soluzione della (7.28) correttamente normalizzata. Tenendo conto che

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(x, t) = \delta(x) \quad (7.40)$$

si vede che la soluzione (7.39) soddisfa anche alla condizione iniziale (7.36). Riassumendo, la distribuzione di probabilità al tempo t , soluzione dell'equazione di diffusione in unidimensionale che al tempo $t = 0$ corrisponde ad una particella nell'origine, è la distribuzione gaussiana

$$w = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (7.41)$$

con media 0 e varianza

$$\sigma^2 = 2Dt \quad (7.42)$$

In $D = 3$ si ottiene

$$w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \quad (7.43)$$

7.6 Trasporto di calore ed altri fenomeni di trasporto

L'equazione di diffusione (7.26) o, in $D = 1$, la (7.28), descrive un'intera serie di fenomeni di trasporto, tutti caratterizzati dalla diffusione di una osservabile. Il primo esempio che consideriamo è l'equazione del calore. Supponiamo che in fig. (7.2) vi siano due sorgenti in $x \pm L$ con temperature T_{\pm} e $\Delta T = T_+ - T_- > 0$. Attraverso la superficie in x passerà la quantità di calore $\Delta Q = MC\Delta T$ se M è la massa del liquido compresa tra le due sorgenti di calore e C il calore specifico del fluido.

Scriviamo innanzitutto l'analogo della legge di Fick. Se J_Q è la quantità di calore che passa nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie, si ha

$$J_Q = \frac{\delta Q}{S\delta t}.$$

Dal momento che δQ è proporzionale alla differenza di temperatura, sarà

$$J_Q = -k \frac{dT}{dx} \quad (7.44)$$

e, in tre dimensioni,

$$\mathbf{J}_Q = -k \nabla T(\mathbf{r}). \quad (7.45)$$

La costante k di dimensioni

$$[k] = [M][L][T]^{-3}[\Theta]^{-1}$$

dicesi **conducibilità termica**. Un'altra equazione di trasporto, analoga alla legge di Fick, vale per il trasporto di corrente elettrica. Essa lega la densità di corrente elettrica \mathbf{j} al gradiente del potenziale elettrico V :

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla V(\mathbf{r}) . \quad (7.46)$$

equazione coincidente con la legge di Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

Torniamo al trasporto di calore. Se consideriamo il calore che abbandona nel tempo δt il volume compreso tra due superfici S poste in x e $x + dx$ (supponiamo che vi sia flusso di calore solo lungo l'asse x :

$$\begin{aligned} J_Q(x)S\delta t - J_Q(x+dx)S\delta t &= kS\delta t \left(-\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial T(x+dx,t)}{\partial x} \right) \\ &= kS\delta t \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (7.47)$$

Questa quantità di calore vale anche

$$\rho C S dx \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \delta t \quad (7.48)$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} , \quad (7.49)$$

o, in 3D,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) . \quad (7.50)$$

che dicesi **equazione del calore o di Fourier**. La costante

$$\kappa = \frac{k}{\rho C} \quad (7.51)$$

dicesi **diffusività termica**. In condizioni stazionarie l'equazione di Fourier si riduce all'equazione di Laplace: $\nabla^2 T = 0$.

7.7 Esercizi e complementi

- 1) Stimare il valore della costante di Boltzmann sapendo che una mole di aria a pressione atmosferica e temperatura ambiente occupa un volume di 22.4 litri; si assuma il valore $N_A = 6 \times 10^{23}$ per il numero di Avogadro.

(Soluzione: $k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$).

- 2) Fornire una stima della velocità medie delle molecole componenti l'atmosfera. a temperatura ambiente.

(Soluzione: $v = \mathcal{O}(10^3) \frac{m}{s}$).

- 3) Stimare il rate di collisione delle molecole in un fluido a temperatura ambiente.

(Soluzione: $n \approx \frac{10^{12}}{s}$).

- 4) Calcolare la probabilità Π che in un random walk in cui $x_0 = 0$, dopo il tempo $t = N$ la posizione della particella sia $x_N = 0$. Usare la formula di Stirling per stimare Π nel caso $N = 10,000$ e $N = 100,000$.

- 5) Provare che in un moto browniano la funzione $X(t) = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$ non è mai derivabile

(Soluzione: si tratta infatti di un processo di Wiener.)

- 6) Si consideri l'equazione del moto di una particella sottoposta ad una forza costante f e ad una resistenza proporzionale alla velocità $-\zeta v$:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f - \zeta \frac{dx}{dt} . \quad (7.52)$$

Provare che la velocità finale è data da $v_f = f/\zeta$.

- 7) Utilizzare l'analisi dimensionale per determinare la dipendenza funzionale nella formula di Stokes per l'attrito viscoso.
- 8) Si usino le (7.41), (7.42) e (7.43) per provare le eq. (7.6) e (7.8).
- 9) Svolgere l'esercizio 15.2 del libro di testo di termodinamica del Reif.
- 10) Applicare il modello del random walk allo studio dei polimeri (si confronti il testo P. Nelson, *Biological Physics*, New York, USA, 2004).
- 11) Risolvere l'equazione di diffusione col metodo delle funzioni di Green.

Capitolo 8

Dinamica dei fluidi viscosi

Nella sezione 7.3 abbiamo introdotto il coefficiente di viscosità ζ e la viscosità η , ricavando la relazione di Einstein fluttuazione-dissipazione. In questo capitolo presentiamo un'introduzione generale ai fluidi viscosi.

8.1 Fluidi viscosi

L'equazione di Eulero in presenza di sollecitazioni di taglio è stata da noi scritta nel cap.6, eq. (6.14):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{\text{visc.}} . \quad (6.14)$$

L'effetto della sollecitazione di taglio è nell'ultimo termine a secondo membro dell'equazione, senza il quale questa equazione si riduce all'equazione di Eulero. Possiamo riscrivere la (6.14) in altro modo, utilizzando la (6.37) opportunamente modificata. Infatti, questa equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \phi) \quad (6.37)$$

è equivalente all'equazione di Euler. Se ora

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} , \quad (8.1)$$

l'effetto delle sollecitazioni di taglio è riposto nel tensore aggiuntivo σ'_{ik} . Riscriviamo la (8.1) nel modo seguente

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik} ; \quad (8.2)$$

$\rho v_i v_k$ rappresenta il flusso d'impulso trasportato direttamente dalle particelle del fluido nel loro spostamento da una regione all'altra¹, e σ'_{ik} la restante parte del flusso d'impulso. I tensori di rango due σ_{ik} e σ'_{ik} sono detti rispettivamente **tensore degli sforzi** e **tensore viscoso degli sforzi** .

Per determinare la loro forma partiamo da un dato sperimentale e cioè che la velocità del fluido in punti vicini ad un corpo solido è nulla. Ad esempio, un tergicristallo che scivola sul parabrezza bagnato di un'automobile non riesce a spazzare completamente, col suo passaggio, le molecole di acqua, proprio perché le molecole a diretto contatto col vetro hanno, relativamente allo specchio, velocità nulla. Consideriamo allora un fluido posto tra due pareti piane e parallele poste a distanza d come in figura 8.1. La parete inferiore abbia velocità zero, l'altra

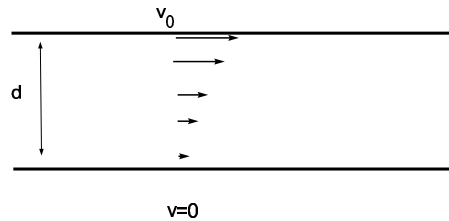


Figura 8.1: - *Un fluido viscoso posto tra due pareti piane e parallele in presenza di un gradiente verticale di velocità.*

si muova con velocità v_0 . Se v_0 fosse uguale a zero il sistema sarebbe statico e, come sappiamo, non ci sarebbero sollecitazioni di taglio. Se $v_0 \neq 0$, le molecole a contatto con la parete superiore hanno velocità v_0 lungo l'asse x , mentre quelle a contatto con la parete inferiore hanno velocità nulla. Ci sarà quindi un trasporto della componente x dell'impulso attraverso ogni superficie parallela alle pareti orizzontali (cioè perpendicolare all'asse y). Questo impulso corrisponde ad una sollecitazione di taglio (*shear stress*), viene trasportato per attrito ed è proporzionale a $\Delta v_x/d$ o, in termini differenziali, a $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, e contribuisce a σ'_{xy} .

¹Precisamente: i -esima componente dell'impulso trasportato dalle particelle nell'unità di tempo attraverso l'area unitaria disposta perpendicolarmente all'asse x_k .

Non possiamo però concludere che σ'_{xy} sia semplicemente proporzionale a $\partial v_x / \partial y$. Infatti sulla base di quanto detto, la sua parte simmetrica potrà avere la forma:

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \eta' \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} , \quad (8.3)$$

Si prova però che il tensore viscoso degli sforzi deve essere simmetrico, cioè che la sua parte antisimmetrica si annulla (cfr. esercizio 1). E quindi σ'_{ik} è proprio dato dalla (8.3). I coefficienti η e η' diconsi *coefficienti di viscosità*.

Utilizzando la (8.3) assieme alla (6.37) e alla (8.1) otteniamo, nell'ipotesi che nè due coefficienti di viscosità nè la densità ρ dipendano dalle coordinate,

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \phi) + \eta \nabla^2 v_i + (\eta + \eta') \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (8.4)$$

La dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore.

8.2 Equazione di Navier-Stokes

Facciamo l'ulteriore ipotesi dell'incompressibilità del fluido, che, come sappiamo dalla (6.27), implica

$$\rho = \text{cost.} , \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (8.5)$$

Inoltre supponiamo che non ci siano forze esterne. Otteniamo la seguente equazione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (8.6)$$

che dicesi **equazione di Navier-Stokes** e dipende da un solo coefficiente di viscosità, η . Valori tipici di η e di η/ρ (a $T = 20$ C) sono

$$\begin{array}{ll} \text{Acqua} : & \eta = 0.010 \text{ g/s} \cdot \text{cm}, \quad \eta/\rho = 0.010 \text{ cm}^2/\text{s} \\ \text{Aria} : & \eta = 1.8 \times 10^{-4} \text{ g/s} \cdot \text{cm}, \quad \eta/\rho = 0.150 \text{ cm}^2/\text{s} \\ \text{Alcool} : & \eta = 0.018 \text{ g/s} \cdot \text{cm}, \quad \eta/\rho = 0.022 \text{ cm}^2/\text{s} \\ \text{Glicerina} : & \eta = 8.5 \text{ g/s} \cdot \text{cm}, \quad \eta/\rho = 6.8 \text{ cm}^2/\text{s} . \end{array} \quad (8.7)$$

La pressione può essere eliminata dall'equazione di Navier-Stokes prendendo il rotazionale di ambo i membri, in modo che appaia la vorticità

$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$. Si ottiene

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}, \quad (8.8)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}. \quad (8.9)$$

Si noti che per ricavare la (8.8) si passa attraverso gli stessi passaggi necessari per ricavare la (6.26). Queste equazioni differenziali alle derivate parziali vanno risolte fornendo una condizione al contorno per \mathbf{v} , ossia il suo valore su di una superficie. La condizione che si impone è

$$\mathbf{v} = 0 \quad (8.10)$$

se \mathbf{v} è la velocità sulle pareti solide fisse. Si noti che questa condizione va imposta solo nel caso di fluidi viscosi; per i fluidi perfetti risulta nulla solo la componente normale v_n della velocità.

8.3 Leggi di scala e numero di Reynolds

Si consideri un corpo di forma assegnata in moto con velocità V in un fluido viscoso. Possiamo passare nell'equazione di Navier-Stokes a variabili adimensionali mediante le definizioni

$$\mathbf{r} = D\mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = V\mathbf{v}', \quad t = \frac{D}{V}t', \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{V}{D}\boldsymbol{\Omega}' \quad (8.11)$$

in modo da riscrivere le (8.8) e (8.9) nel modo seguente

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t'} + \nabla' \wedge (\boldsymbol{\Omega}' \wedge \mathbf{v}') = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla'^2 \boldsymbol{\Omega}' \quad (8.12)$$

$$\boldsymbol{\Omega}' = \nabla' \wedge \mathbf{v}', \quad (8.13)$$

in cui appare la quantità adimensionale

$$\mathcal{R} = \frac{DV\rho}{\eta} \quad (8.14)$$

detto **numero di Reynolds**. L'aspetto interessante di queste equazioni è che in essa appaiono solo grandezze adimensionali. Dunque esse sono invarianti per trasformazioni di scala e tali devono essere anche le loro soluzioni (*O. Reynolds 1883*). Ad esempio, nel caso stazionario, in cui non c'è dipendenza esplicita dal tempo, la velocità \mathbf{v} soluzione dell'equazione di Navier Stokes dovrà avere la forma generale

$$\mathbf{v} = V f\left(\frac{\mathbf{r}}{D}, \mathcal{R}\right). \quad (8.15)$$

Infatti la funzione adimensionale f può dipendere solo da grandezze adimensionali e vi sono solo due quantità adimensionali indipendenti, r/D e \mathcal{R} .

Una formula analoga alla (8.15) vale per la pressione

$$P = \rho V^2 \tilde{f} \left(\frac{\mathbf{r}}{D}, \mathcal{R} \right) \quad (8.16)$$

e può essere utilizzata in modo analogo, Mediante un ragionamento analogo possiamo ricavare una formula generale per la forza d'attrito viscoso che, a differenza di \mathbf{v} e P non è un campo e non dipende da \mathbf{r} . Si ha allora:

$$F = \rho V^2 D^2 g(\mathcal{R}) \quad (8.17)$$

la quantità $g(\mathcal{R})$, rapporto tra la resistenza del mezzo ed il prodotto $\rho V^2 D^2$ dicesi *coefficiente di resistenza*. Esso dipende solo dal numero di Reynolds. Questa formula mostra che la resistenza offerta da un mezzo cresce col quadrato della velocità ed è proporzionale all'area della superficie esposta.

Alternativamente possiamo scrivere

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} \tilde{g}(\mathcal{R}), \quad (8.18)$$

con

$$\tilde{g}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^2 g(\mathcal{R}). \quad (8.19)$$

La quantità

$$f_{crit} = \frac{\eta^2}{\rho} \quad (8.20)$$

dicesi *forza viscosa critica*.

Consideriamo due moti relativi allo scorrimento in due fluidi di due corpi della stessa forma, ma di diversa scala diverse; ebbene se questi due moti hanno lo stesso numero di Reynolds, allora è possibile ricavare una soluzione dall'altra attraverso una semplice trasformazione di scala delle coordinate e delle velocità ². Su questo principio si basano le gallerie del vento. Un esempio dell'uso del numero di Reynolds per ricavare parametri incogniti mediante misure indirette è descritto nell'esercizio 5.

²Questo vale nell'ipotesi di fluidi incompressibili, Se il fluido è comprimibile, allora esiste un'altro rapporto adimensionale da cui le grandezze adimensionali possono dipendere, quello tra la velocità del mezzo nel fluido e velocità del suono, rapporto che viene detto *numero di Mach*.

Il significato fisico del numero di Reynolds può essere desunto dall'equazione (8.12). Nel limite di grandi numeri di Reynolds ($\mathcal{R} \rightarrow \infty$) il comportamento del fluido si avvicina a quello di un fluido perfetto; per piccoli numeri di Reynolds, invece, se ne allontana. Osserviamo il comportamento del fluido non dipende solo dalla viscosità del mezzo, ma, in base alla (8.14), anche dalle dimensioni dell'oggetto, dalla sua velocità relativa e dalla densità del fluido. Ad esempio la glicerina è, a parità di altre condizioni, un fluido più viscoso dell'acqua o dell'aria, come si desume dai valori del coefficiente di viscosità η riportati in eq. (8.7). Tuttavia, per un corpo molto piccolo che si muove lentamente anche l'aria e l'acqua possono risultare molto viscosi. Un esempio è fornito dal moto dei minuscoli granelli di polvere che si agitano nell'aria, i quali, a causa dell'elevata viscosità, non cadono lungo la verticale, come farebbero corpi di dimensioni maggiori. Un altro esempio è dato dal moto dei batteri nell'acqua o nell'aria: anche questi microrganismi si muovono in un mezzo molto viscoso e per questo non nuotano come i pesci, ma usano i flagelli. Al contrario i pesci ed i natanti di grandi dimensioni subiscono un attrito viscoso relativamente piccolo.

Infine è importante la densità del fluido: se ci si muove in un mezzo rarefatto si avverte una resistenza maggiore, non minore.

8.4 Il caso limite di bassi numeri di Reynolds

Per comprendere il ruolo del numero di Reynolds nell'equazione di Navier-Stokes è opportuno considerare dei casi limite. In questo paragrafo daremo dei cenni sul caso di numeri di Reynolds molto bassi, il che corrisponde a moti molto viscosi. Dimosteremo ora che la condizione

$$\mathcal{R} \ll 1 \tag{8.21}$$

corrisponde alla condizione che la forza inerziale, f_t , cioè il prodotto della massa m del corpo per la sua accelerazione a , è molto minore della forza d'attrito f_a . Precisamente proviamo che

$$\mathcal{R} \sim \frac{f_t}{f_a} . \tag{8.22}$$

Nel paragrafo 7.3 abbiamo provato la legge di Stokes, che asserisce che

$$f_a = V\zeta = 6\pi\eta RV , \tag{8.23}$$

Questa legge è stata provata nell'ipotesi che un corpo sferico di raggio R , immerso in un fluido, si muova con velocità di deriva costante V

a causa dei numerosi urti con le particelle del fluido. Le ipotesi sopra ricordate corripondono proprio al fatto che la forza inerziale sia piccola, giacché la sua piccolezza che assicura una velocità di deriva V pressapoco costante (quindi $f_e = f_a$, se f_e è la forza esterna).

La forza inerziale f_t si può ora stimare nel modo seguente. Si ha

$$f_{tot} = ma \sim \rho \ell^3 a , \quad (8.24)$$

se ρ è la densità del fluido e ℓ una dimensione lineare di una particella del fluido ³ L'accelerazione a può essere stimata dell'ordine dell'accelerazione centripeta della particella a contatto col corpo di raggio R , ossia

$$a \sim \frac{V^2}{R} . \quad (8.25)$$

Infine possiamo stimare ℓ : $\ell \sim R$, dal momento che R fissa le dimensioni caratteristiche del nostro problema. In definitiva

$$\frac{f_t}{f_a} \sim \frac{\rho R^3 V^2}{R \eta R V} = \mathcal{R} .$$

8.5 Moto ad alti numeri di Reynolds: strato limite e turbolenza

Il caso dei bassi numeri di Reynolds corrisponde alla situazione in cui la forza d'attrito viscoso domina sulla forza inerziale. Il caso opposto, quello cioè in cui è la forza inerziale a dominare, è il caso degli alti numeri di Reynolds. Questo caso è molto più difficile da trattare teoricamente e ad oggi manca ancora una teoria completa. Si potrebbe pensare che il caso degli alti numeri di Reynolds sia più semplice dal punto di vista teorico, giacché esso corrisponde a fluidi meno viscosi e, quindi, più simili ai fluidi perfetti, che, come si è visto nel cap. 6, consentono una trattazione matematica rigorosa. Tuttavia non è così e la ragione è in un dato sperimentale che abbiamo ricordato nel par. 8.1, dato che caratterizza tutti i fluidi reali e li distingue dai fluidi perfetti: la velocità del fluido nei punti a contatto con un solido è zero. Consideriamo ora, anziché la fig. 8.1, la fig. 8.2 che schematizza un

³Si noti che in tutte le considerazioni idrodinamiche svolte in questo capitolo e nel cap. 6 noi assumiamo che le particelle del fluido, piccole rispetto alle dimensioni totali del fluido, contengano tuttavia un gran numero di molecole in modo che non ci si accorga della struttura granulare della materia e si possa assimilare il fluido ad un *continuum*. Questa ipotesi non è stata fatta nel capitolo relativo ai moti browniani.

fluido in moto nelle vicinanze di una parete piana solida. Nei punti di contatto la velocità del fluido è zero, ad una certa distanza la velocità è uniforme se non ci sono sollecitazioni. Tuttavia c'è uno strato di spessore d in cui la velocità ha un gradiente spaziale, passando da zero al valore massimo, che è poi il valore uniforme nel resto del fluido. Questo strato dicesi **strato limite** ed è caratteristico di tutti i fluidi reali⁴ (esso non esiste nei fluidi perfetti). Nei fluidi a basso \mathcal{R} lo strato

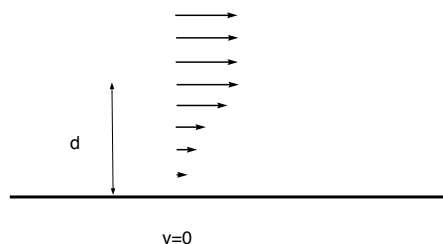


Figura 8.2: - *Porzione di fluido viscoso nelle vicinanze di un corpo solido schematizzato da una parete piana. Viene indicato il campo delle velocità; d è lo strato limite.*

limite può essere molto spesso. Il fluido scorre con difficoltà rispetto al corpo solido in quiete, o, altrimenti, il corpo si muove con difficoltà rispetto al fluido. In questo caso, a causa dello strato limite spesso, il moto del fluido è regolare, in particolare la scia lasciata alle spalle del corpo è di tipo lamellare, si parla di moto *lamellare* o di *scia lamellare*⁵.

Nel caso dei fluidi ad alto \mathcal{R} lo strato limite può essere invece molto sottile; ad esempio lo spessore dello strato limite sull'ala di un aeroplano è dell'ordine di 1 cm. A causa di ciò il moto delle particelle nella scia è estremamente caotico ed irregolare: si dice che esso è *turbolento*. A causa della difficoltà di prevedere un moto così irregolare il problema della turbolenza, di enorme interesse applicativo, viene affrontato solo numericamente, giacché, come si diceva, manca ad oggi una teoria completa della turbolenza.

⁴Ciascuno può averne avvertito la presenza se, in una giornata ventosa, su di una spiaggia, per non subire il fastidio della sabbia sollevata dal vento, si è sdraiato sulla rena. Un altro esempio è fornito dai pesci pilota che si muovono affiancati e quasi a contatto di alcuni squali, alla loro stessa velocità.

⁵Si pensi al moto di un fluido viscoso, ad esempio miele, quando viene fatto cadere dall'alto a partire da un recipiente.

Si noti che il moto di un fluido può essere lamellare in alcune regioni (ad esempio nello strato limite) e turbolento in altre (fuori di esso). Esempi di passaggio dal moto lamellare a quello turbolento sono dati dal moto ascensionale del fumo di sigaretta, turbolento nella regione di spazio superiore e dalla caduta verso il basso dell'acqua che esce da un rubinetto. L'importanza della velocità per determinare la turbolenza può essere messa in evidenza da un esperimento in cui del fumo vien fatto uscire attraverso un ugello, a partire da un recipiente in cui il gas è tenuto sotto pressione. Se si regola l'apertura dell'ugello in modo da aumentare la velocità, si può notare un aumento della turbolenza (il getto diviene turbolento in regioni sempre più vicine all'ugello).

Questo comportamento si spiega col fatto che, all'aumentare della velocità, il numero di Reynolds cresce ⁶. In genere, se si parte da un moto lamellare e si fa crescere \mathcal{R} si raggiunge un valore critico \mathcal{R}_c superato il quale il moto diviene turbolento. Valori tipici di \mathcal{R}_c sono $\mathcal{R}_c \sim 30$, ma si tratta di valori solo indicativi perché in realtà, \mathcal{R}_c varia da corpo a corpo.

8.6 Esercizi e complementi

- 1) Supponiamo che anziché essere contenuto tra due piani paralleli il fluido sia animato da moto rotatorio uniforme con velocità angolare ω . Allora non c'è attrito interno e quindi σ'_{xy} deve annullarsi. Provare che la (8.3) garantisce l'annullarsi del tensore viscoso degli sforzi.
- 2) Provare la (8.4).
- 3) Verificare che il numero di Reynolds \mathcal{R} è adimensionale.
- 4) Usare l'analisi dimensionale per provare la (8.17). Applicare poi questa equazione per esprimere la velocità terminale V di un paracadutista dal peso di 80 kgp, che si lancia con un paracadute di forma circolare avente raggio $2m$ in funzione del coefficiente di resistenza. Quale valore deve avere il coefficiente $g(\mathcal{R})$ perché V valga 10 m/s ?
- 5) Si consideri la seguente tabella frutto di due esperimenti nel primo dei quali un pallone P riempito di elio, avente le dimensioni

⁶Altri modi per aumentare \mathcal{R} consistono nel far crescere le dimensioni dei corpi o il rapporto ρ/η , si vedano esempi tra gli esercizi.

di 1 metro, viene fatto salire fino a raggiungere la velocità terminale di 5.4 cm/s, mentre nell'altro una sferetta S di plastica di raggio 0.6 cm viene fatta cadere in acqua fino a raggiungere la velocità terminale indicata. Si completi calcolando i numeri di Reynolds, e, mediante la (8.18) o la (8.20) la resistenza offerta dall'aria ed il coefficiente di resistenza $g(\mathcal{R})$ definito dall'eq. (8.17) (da A.H. Shapiro, *Profili veloci*, Bologna 1965).

	L cm	v cm/s	fluido	ρ g/cm ³	η g/cm s	\mathcal{R}	Res. dyne	$g(\mathcal{R})$
P	100	5.4	aria	0.0012	0.00018	?	?	?
S	0.60	55	H_2O	1.00	0.0089	?	20	?

- 6) Utilizzando l'equazione di continuità ed il numero di Reynolds spiegare perché il flusso d'acqua da un rubinetto può dar luogo ad un moto turbolento nella fase terminale anche se alla canna il moto è lamellare.
- 7) Utilizzando i valori di η/ρ spiegare perché, se si versa glicerina colorata in glicerina, le due parti non si mescolano, mentre se si versa vino in un recipiente contenente acqua i due liquidi si mescolano in breve tempo. Spiegare perché, se si versa acqua da un recipiente, il moto del fluido è turbolento a differenza del caso del miele discusso nel testo.