FISICA II
(ELETTROMAGNETISMO ed OTTICA)

Lezione 24 : Circuito RLC-serie & Risonanza

Titolare del corso : Alexis Pompili
(Dipartimento Interateneo di Fisica, stanza 106, piano-I, 080-5443208)

Modo piu' semplice/veloce di contattarmi : alexis.pompili@ba.infn.it

Ricevimento: giovedi' 11-13, 15-17

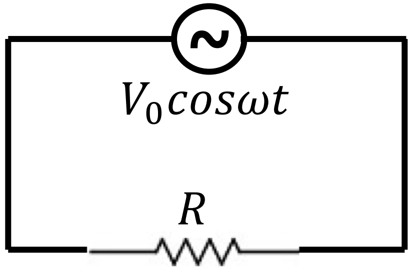
Circuiti elettrici in regime sinusoidale

- **Lo studio dei circuiti sollecitati attraverso generatori eroganti f.e.m. variabili sinusoidalmente nel tempo e' importante sia praticamente che teoricamente:**
  - da un punto di vista energetico la distribuzione dell'energia elettrica e' particolarmente efficace se erogata da generatori sinusoidali
  - per il teorema di Fourier qualsiasi segnale periodico puo' essere rappresentato come la composizione di infiniti segnali sinusoidali.

Per lo studio di tali circuiti si fanno delle ipotesi in genere non limitanti per un ampio intervallo di frequenze e per la maggior parte delle componenti in uso.
Si assume che in ogni istante le correnti sono le stesse che vi sarebbero nel caso stazionario, quindi saranno ancora valide la legge di Ohm e le leggi di Kirchoff
(che valgono sicuramente ai 50-60Hz delle correnti nella maggior parte dei paesi).
Inoltre la corrente si suppone vari lentamente nel tempo in modo che le sue variazioni si propaghino istantaneamente attraverso il circuito.

Generatore + resistore

- **Considero un circuito costituito da un generatore ed una resistenza:**



Dalla legge di Kirchoff per la maglia: $V_0 cos\omega t - iR = 0$

Il circuito e' percorso dalla corrente alternata con la stessa pulsazione ω della tensione alternata:

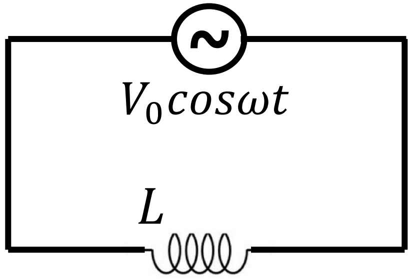
$$i = \frac{V_0}{R} cos\omega t$$

Si dice che corrente e tensione alternate sono in fase !

Il comportamento del resistore non dipende da ω .

Generatore + induttore

- **Considero un circuito costituito da un generatore ed un'induttanza:**



Dalla legge di Kirchoff per la maglia: $V_0 cos\omega t - L\frac{di}{dt} = 0$

Separando le variabili ed integrando:

$$\Leftrightarrow \frac{V_0}{L} cos\omega t dt = di \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{L\omega}\int \omega cos\omega t dt = \int di \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{V_0}{L\omega}\sin\omega t = \frac{V_0}{X_L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

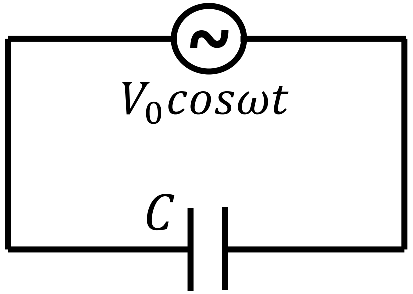
$X_L = \omega L$

Reattanza induttiva

Si dice che la corrente e' sfasata (in ritardo di $\frac{\pi}{2}$) rispetto alla tensione alternata !

Generatore + condensatore

- **Considero un circuito costituito da un generatore ed un condensatore:**



Dalla legge di Kirchoff per la maglia: $V_0 cos\omega t - \frac{q}{C} = 0$

Derivando rispetto al tempo:

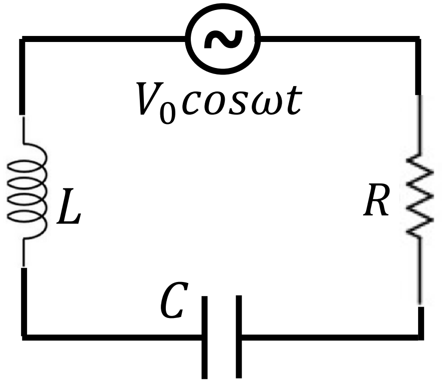
$$-\omega C V_0 sin\omega t = \frac{dq}{dt} = i \quad \Leftrightarrow \quad i = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{V_0}{X_C} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$ **Reattanza capacitiva**

Si dice che la corrente e' sfasata (in anticipo di $\frac{\pi}{2}$) rispetto alla tensione alternata !

Circuito RLC serie con generatore - I

Consideriamo un circuito RLC serie con un generatore di tensione alternata $V_0 cos\omega t$ come in figura.



La f.e.m. variabile nel tempo e' indispensabile per mantenere un'oscillazione elettrica permanente nel circuito fornendo con continuita' la potenza dissipata nel resistore.

L'equazione della maglia (circuito) e':

$$V_0 cos\omega t - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0$$

Derivando rispetto al tempo:

$$-\omega V_0 sin\omega t - L\frac{d^2i}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R\frac{di}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{\omega V_0}{L} sin\omega t}$$

Equazione differenziale del 2° ord. in $i(t)$

Dall'analisi matematica sapete che la soluzione piu' generale di questa equazione e' la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare che cerchiamo nella generica forma $i(t) = I_0\cos(\omega t - \varphi)$

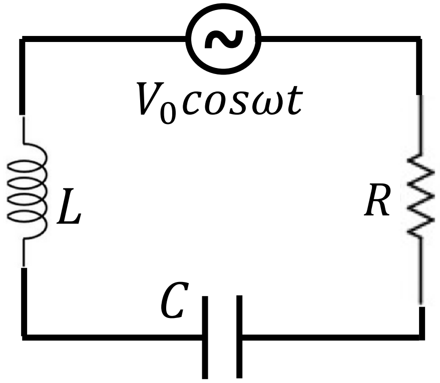
Circuito RLC serie con generatore - II

In effetti vi e' una forte analogia con le oscillazioni meccaniche …

- **libere** (termine noto nullo quindi nessuna forza esterna applicata)

  [in questo caso si hanno oscillazioni (*sovra-* o *sotto-*) *smorzate*]

- **forzate** (forza oscillante esterna applicata, con pulsazione ω)



Ricordando come si risolve questa equazione differenziale di 2º ordine e applicando la procedura di risoluzione si otterrebbe il seguente risultato:

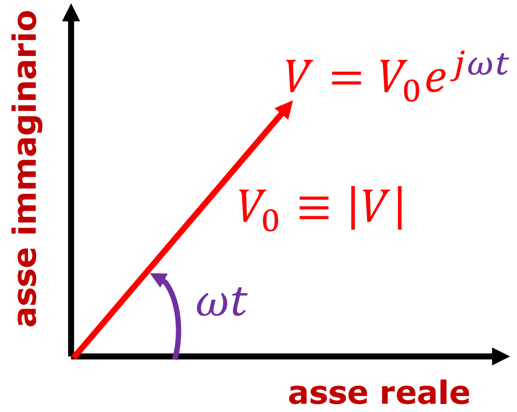
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \varphi = arctan\left(\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) & \textbf{(sfasamento)} \\ I_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} & \textbf{(ampiezza)} \end{cases}$$

Una corrente elettrica oscillante e' instaurata permanentemente con la stessa pulsazione della f.e.m. applicata oscillante ma con uno sfasamento dipendente dai parametri del circuito !

- **Al fine di rendere semplice lo studio dei circuiti in tensione alternata i risultati fin qui ottenuti possono essere ricavati e formalizzati ricorrendo ai numeri complessi.**

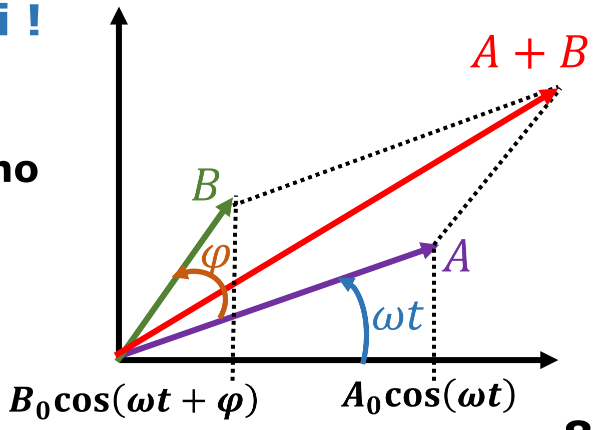
La tensione alternata $V_0 cos\omega t$ puo' essere considerata come la parte reale della grandezza complessa $V = V_0 e^{j\omega t}$.

Nel piano complesso V puo' essere rappresentato come un vettore di modulo V_0 che ruota con velocita' angolare ω (detto anche *fasore*).



Ricorrendo al <u>metodo dei vettori rotanti</u> (o *fasori di Fresnel*) e' possibile studiare p.es. il circuito RLC-serie con generatore appena visto, senza dover ricordarsi le tecniche di risoluzione delle equazioni differenziali !

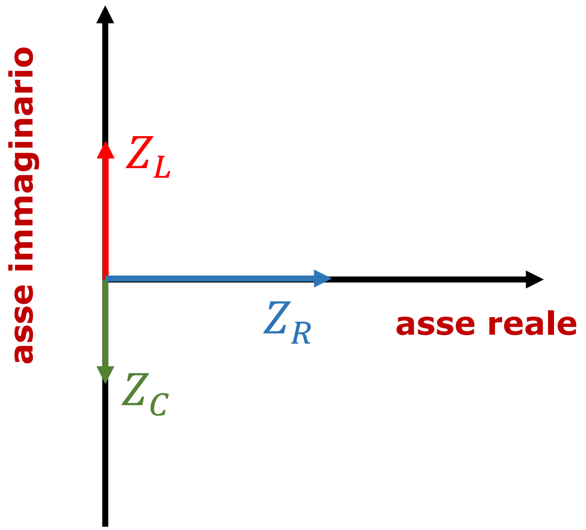
Occorre sapere che due oscillazioni sfasate di un angolo φ (costante nel tempo) possono essere sommate come due vettori con la regola del parallelogramma: la proiezione sull'asse reale del vettore somma e' la somma cercata delle due oscillazioni:



- **Indicando per gli elementi circuitali le relative impedenze date da …**

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

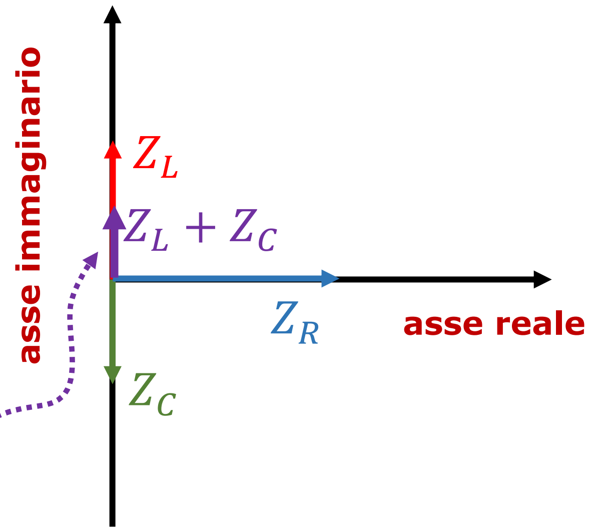
diventa possibile - come vedremo - esprimere l’intensita’ della corrente mediante la relazione $i = \frac{V}{Z}$ **!**



- **Indicandoper gli elementi circuitali le relative impedenze date da …**

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

diventa possibile - come vedremo - esprimere l'intensita' della corrente mediante la relazione $i = \frac{V}{Z}$ **!**



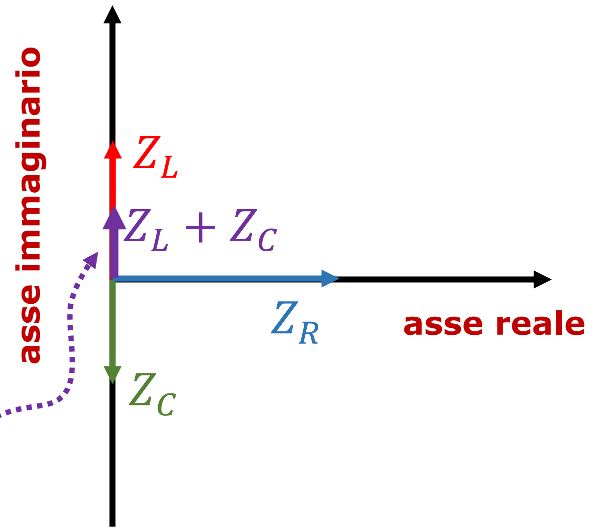
La somma dei due vettori immaginari puri Z_L **e** Z_C **e' ovviamente il vettore immaginario** $Z_L + Z_C = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \equiv jX$

L'impedenza ha una parte reale, la resistenza R **ed una parte immaginaria, la reattanza** $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

- **Indicando per gli elementi circuitali le relative impedenze date da …**

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

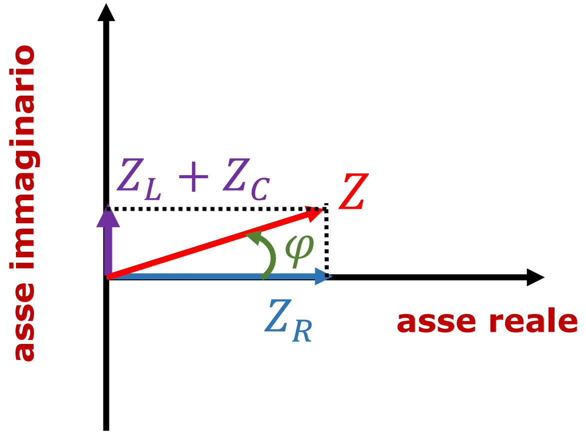
diventa possibile - come vedremo - esprimere l'intensita' della corrente mediante la relazione $i = \frac{V}{Z}$ **!**



La somma dei due vettori immaginari puri Z_L **e** Z_C **e' ovviamente il vettore immaginario** $Z_L + Z_C = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \equiv jX$

L'impedenza ha una parte reale, la resistenza R

ed una parte immaginaria, la reattanza $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$



L'impedenza complessiva Z **e' il vettore somma** $Z = Z_R + (Z_L + Z_C) = R + jX$

Il vettore impedenza ha modulo $|Z| = \sqrt{X^2 + R^2}$

e forma con l'asse reale un angolo $\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right)$

Metodo dei vettori rotanti - III

...da qui...si ricava l'intensita' di corrente $i = \frac{V}{Z}$ individuando ampiezza e fase rispetto alla tensione:

L'ampiezza viene ottenuta come rapporto fra i moduli:

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{X^2+R^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

La corrente come vettore complesso e':

$$i = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad i = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

dove lo sfasamento e' quello prima calcolato $\varphi = arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

L'intensita' di corrente e' ovviamente la parte reale del vettore complesso: $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$

NOTA: sia l'ampiezza della corrente sia la fase relativa fra corrente e tensione dipendono dalla frequenza del generatore !

Potenza in circuiti a corrente alternata

- **Gli strumenti da usare per misure di grandezze oscillanti sono costruiti diversamente da quelli costruiti per misure continue: sono tali da fornire non il valore istantaneo bensi' un valore proporzionale alla media su un periodo del loro quadrato, cioe' si dice misurino il valore efficace della grandezza!**

Per esempio nel caso della corrente alternata: $i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 cos^2\omega t \, dt} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ **analogamente:**

$$V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

La potenza elettrica e' data da : $P(t) = i(t) \cdot \Delta V(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \cdot V_0 \cos(\omega t)$

Dipendendo dal tempo, cio' che risulta misurabile non e' il suo valore istantaneo quanto piuttosto la sua *media temporale valutata su un periodo* (indicata con <…>):

$$\boxed{< P(t) > =} I_0 V_0 < \cos(\omega t - \varphi)\cos(\omega t) > = I_0 V_0 < \cos\varphi \cos^2\omega t - sin\varphi \cos\omega t \sin\omega t > =$$

$$= I_0 V_0 [\cos\varphi \underbrace{< \cos^2\omega t >}_{\frac{1}{2}} - sin\varphi \underbrace{< \cos\omega t \sin\omega t >}_{0}] = \frac{1}{2} I_0 V_0 cos\varphi = \boxed{i_{eff} V_{eff} cos\varphi}$$

[*equazione di Galileo-Ferraris*]

Risonanza nel circuito RLC serie - I

- **A parita' di valore della f.e.m. applicata, il valore dell'ampiezza della corrente varia al variare della pulsazione (in quanto varia la reattanza X e quindi l'impedenza Z):**

$$I_0(\omega) = \frac{V_0}{|Z(\omega)|} = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

Il valore dell'ampiezza della corrente e' massimo quando $Z = Z_{min} = R$ **(**$X = X_{min} = 0$**)**

ovvero quando $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0}$ **CONDIZIONE di RISONANZA**

pulsazione propria

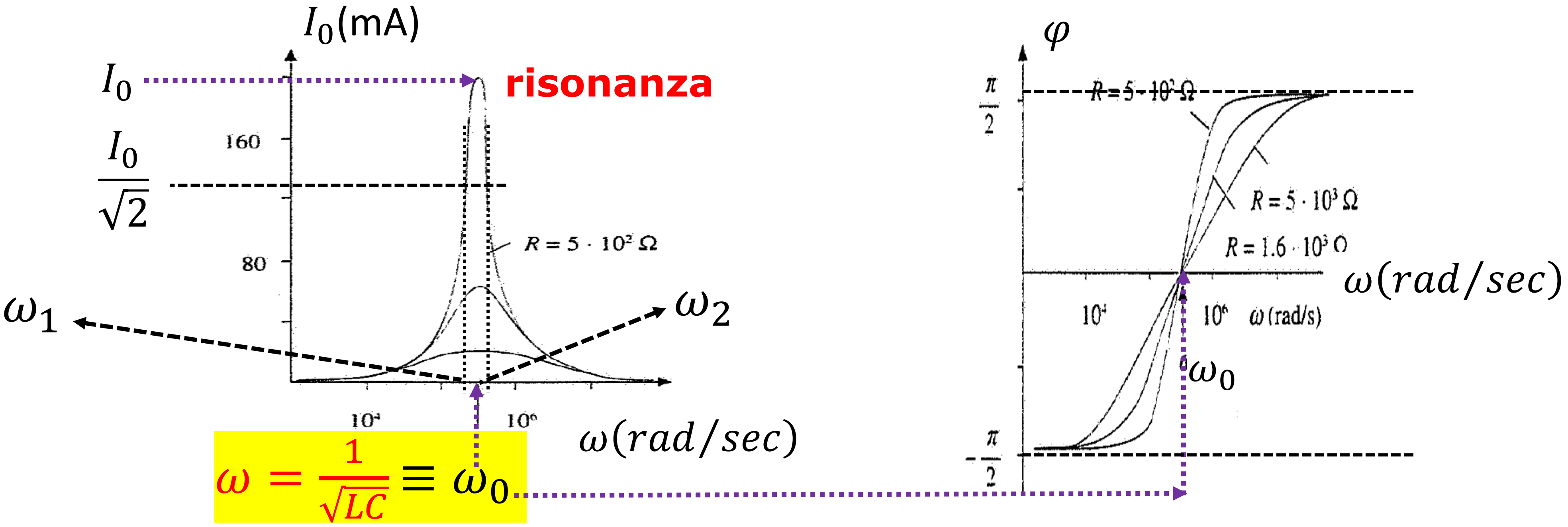
(del circuito RLC-serie)

Alla condizione di risonanza:

$$\begin{cases} \varphi = arctan\left(\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 0 \\ X = 0 \Rightarrow Z_R = R \end{cases}$$

- $\varphi = 0$ **: sfasamento nullo fra corrente e tensione**
- $X = 0 \Rightarrow Z_R = R$ **: circuito si comporta come puramente resistivo**

- **Ampiezza e fase della corrente al variare della pulsazione (per 3 valori di R) :**



Curve sono tanto piu' strette (ed il max tanto piu' accentuato) quanto piu' R e' piccola

Quantitativamente si definiscono:
- **Larghezza della risonanza** $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L$
- **Fattore di merito della risonanza** $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$

Tale proprieta' (*risposta selettiva in frequenza* per $\omega \approx \omega_0$) e' sfruttata nei *sintonizzatori* !