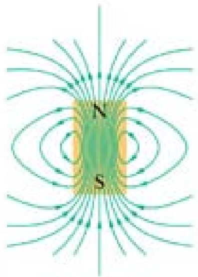
Forza magnetica e Campo magnetico

Introduzione al campo Magnetico



(a)


(b)

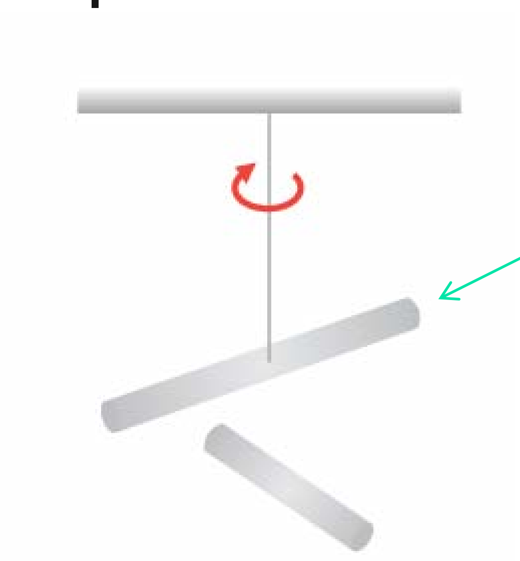
Sin dal VII sec. a.C. era nota la proprietà della magnetite di attirare a se materiali ferrosi. Il nome magnetite derivò dalla città greca di Magnesia in Asia minore.

Nel V sec. a.C. Socrate cita la caratteristica della magnetite di trasferire al ferro le sue proprietà di attrazione.

Si osserva che tale proprietà non è uniformemente presente nel materiale.

Si definiscono i Poli del magnete come quelle parti in cui la proprietà si manifesta maggiormente.

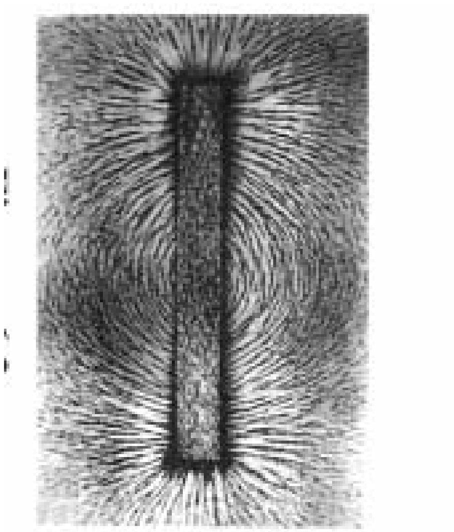
Introduzione al campo Magnetico



Nel XVI sec. Gilbert (così come aveva fatto per l'elettrostatica*):

1. Ad un magnete sospeso ad un filo viene avvicinato un secondo magnete: questo esercita una forza su di esso.

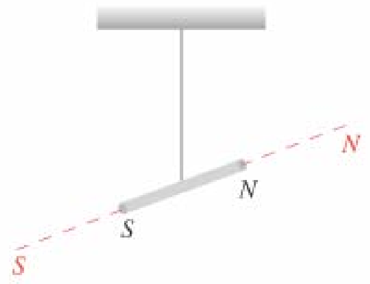
- Un magnete genera un campo chiamato campo magnetico: crea nello spazio circostante un campo di forze.

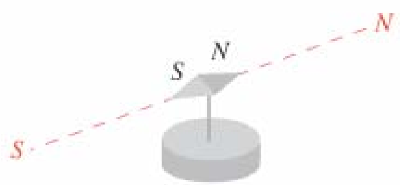


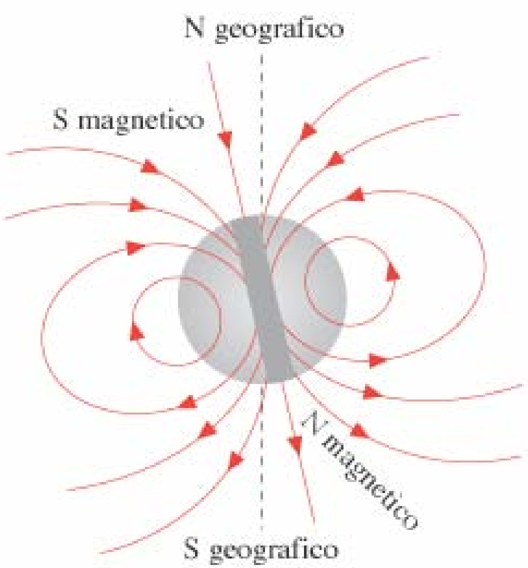
- Le linee di forza sembrano provenire da i due poli (vedi anche esperienza con limatura di ferro). Sono chiuse, nascono da un polo (nord) e terminano sull'altro (sud).

* Vedi appendice esperimenti con cariche elettriche

Introduzione al campo Magnetico







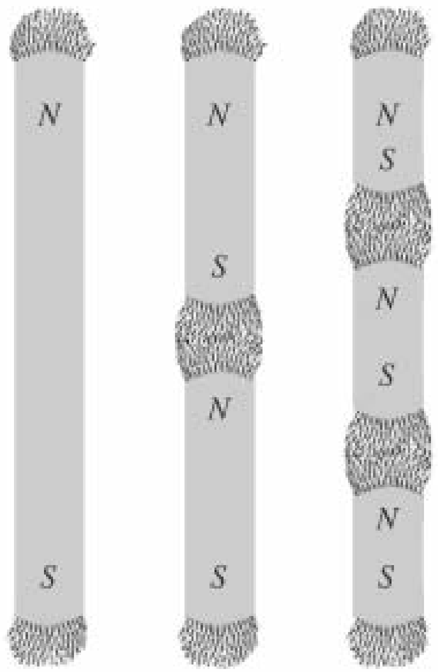
campo magnetico terrestre

2. Avvicinando una bacchetta sottile di ferro ad un pezzo di magnetite questa si magnetizza. Calamita o ago magnetico.

3. un ago magnetizzato, libero di ruotare si dispone assumendo una posizione di equilibrio lungo una direzione prossima a quella del meridiano terrestre.

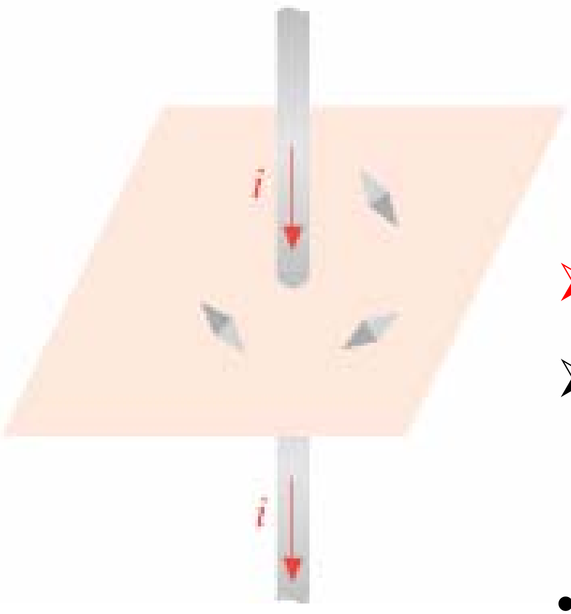
Esiste quindi **un campo B terrestre**. Si definisce **polo nord (o +)** il polo che si orienta verso il nord geografico. **Polo sud** (o -) il polo che si orienta verso il sud geografico.

Introduzione al campo Magnetico



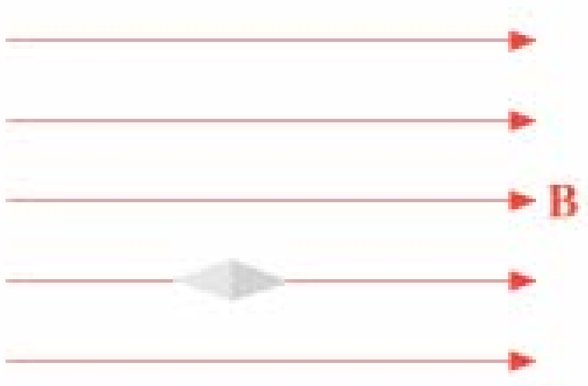
4. Due poli: positivo e negativo: poli dello stesso segno si respingono, poli di segno opposto si attirano.
5. I **poli** di uno **stesso magnete** sono sempre di segno opposto ed esistono sempre a coppia: vedi anche esperienza della calamita spezzata. A differenza delle carica elettrica non esiste in natura **una carica magnetica**.

Introduzione al campo Magnetico



- Nel 1811 Oested e poi nel 1820 Ampere mostrarono che un ago magnetico in prossimità di filo percorso da corrente, assume una definita posizione di equilibrio (come nel caso del magnete).
- **Il filo percorso da corrente crea un B.**
- Le azioni magnetiche sono manifestazioni dell'interazione tra cariche elettriche in MOTO.
- Nel 1820 Farady dimostrò che campi B variabili nel tempo producono campi E.
- Maxell predisse che anche campi E variabili nel tempo originano campi B.
- I campi E e B vengono unificati nell'unico concetto di **campo elettromagnetico.**

Le linee di forza del campo Magnetico



Determinare **B** in una certa regione di spazio vuol dire dare modulo direzione e verso (come per tutti i vettori!!)

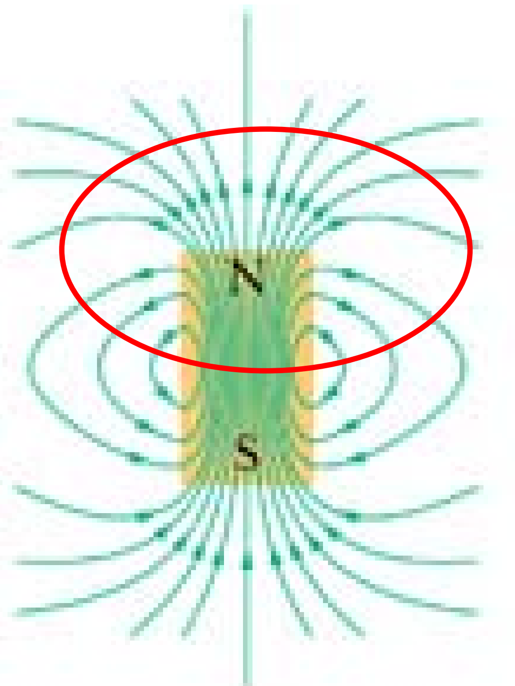
Così come per il campo **E** la rappresentazione grafica dell'andamento di **B** si fa tramite le **linee del campo.**

Sono una rappresentazione del campo

- Sono le linee tangenti ed equiversi ad **B**(P) in ogni punto P(x,y,z) dello spazio
- il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie perpendicolare alle linee stesse è proporzionale all'intensità del campo.

Il flusso di B

➢ Consideriamo un magnete: il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre nullo.



$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

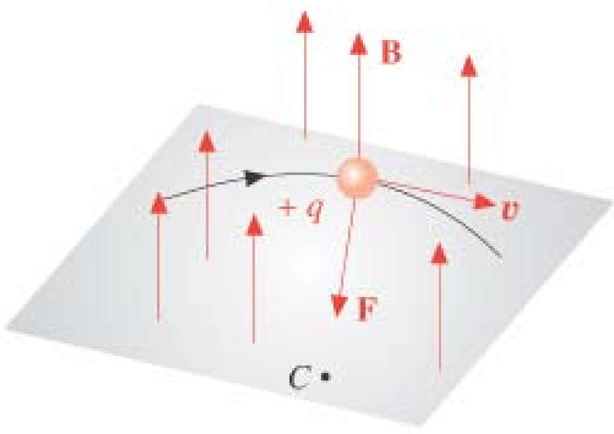
➢ Le linee di forza del campo sono linee chiuse.

➢ B è solenoidale

➢ in forma locale:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Forza di Lorenz



Consideriamo una particella di massa m e carica q in presenza di un B.

$$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$$

$$\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = 0 \quad \text{se} \;\; \vec{v} \,//\, \vec{B}$$

$$\vec{F}\,\text{max} \quad \text{se} \;\; \vec{v} \perp \vec{B}$$

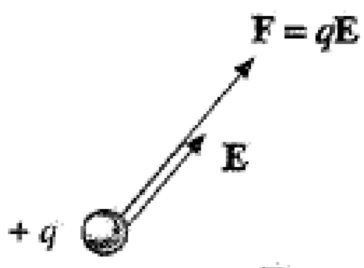
$$\vec{F} \perp \vec{v}\ \text{sempre} \Rightarrow \; W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Forza Elettrostatica ←→ F. di Lorents

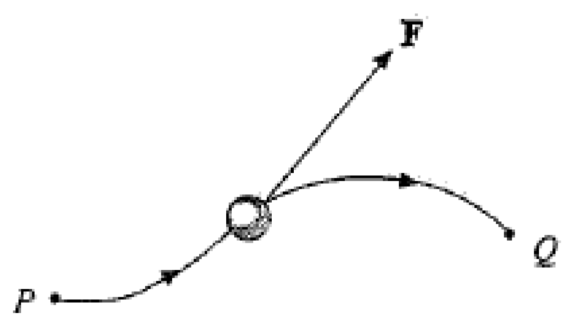
$$W = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_P - V_Q)$$

$$W = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

1. **Compie lavoro**
2. L'energia cinetica cambia
3. La velocità può cambiare in modulo e direzione
4. è **parallela** ad E



1. **NON compie lavoro**
2. la velocità cambia in **direzione**, ma in modulo resta costante
3. **è perpendicolare** a B



Unità di Misura

$$\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

L'unità di misura del campo magnetico: il tesla

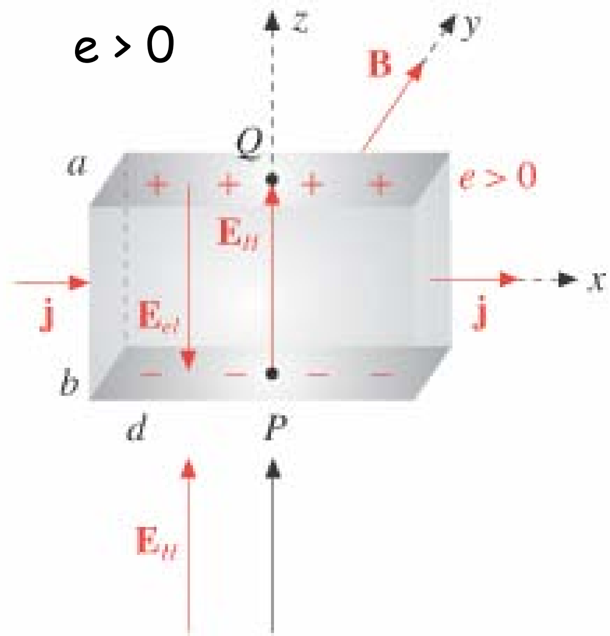
$$T = \frac{N}{Cm/s} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{As^2}$$

Sottomultipli:
Gauss 1 G = 10^{-4} T
Per esempio il campo magnetico terrestre sulla superficie vale circa 0.4 G
Negli esperimenti agli acceleratori si usano campi di 4 T.

Effetto Hall

e > 0

$$\vec{j} = \frac{i}{ab}\vec{u}_x = ne\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{d}$$



Stesso verso qualunque sia il segno dei portatori

$$\vec{F} = e\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{d} \times \vec{B}$$

$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{d} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{ne} \times \vec{B}$$

$\vec{E}_H$ verso l'alto se e > 0

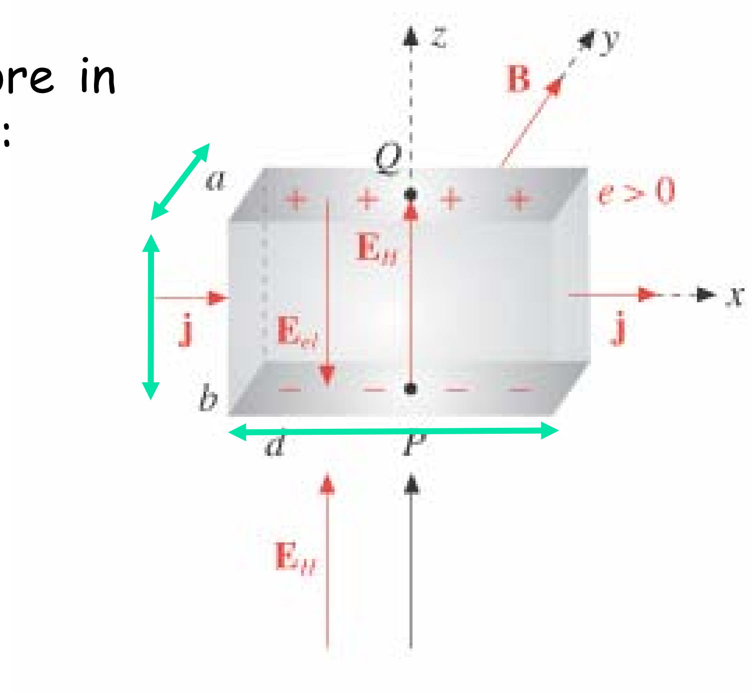
$\vec{E}_H$ verso il basso se e < 0

Il **campo di hall** tende quindi ad accumulare le cariche sul lato a o b. L'equilibrio si raggiunge quando:

$$\boxed{\vec{E}_H + \vec{E}_{el} = 0}$$

Effetto Hall

Il dispositivo si comporta come un generatore in cui non circola corrente. La **tensione di hall** è:



$$\boldsymbol{\varepsilon}_H = \int_P^Q \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = \vec{E}_H \cdot \overrightarrow{PQ} = \pm E_H b$$

+Se e > 0
- Se e < 0

$$\boldsymbol{\varepsilon}_H = E_H b = \frac{jB}{ne} b = \frac{iB}{nea}$$

Consente di determinare:

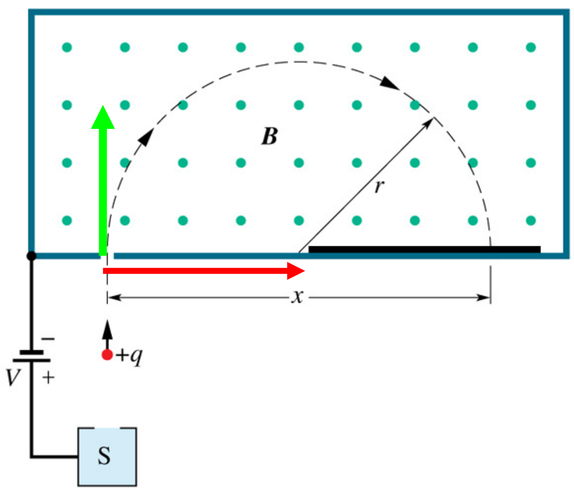
1. il segno dei portatori
2. La densità di carica

$$\alpha = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_H}{B} = \frac{i}{nea}$$

Sonde di Hall: misuratori di campo magnetico

Moto di cariche in B

Spettrometri di massa



$$\vec{B}\ \text{uniforme}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B} \quad \text{q positiva}$$

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F = qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{2qV/m}$$

Moto circolare uniforme

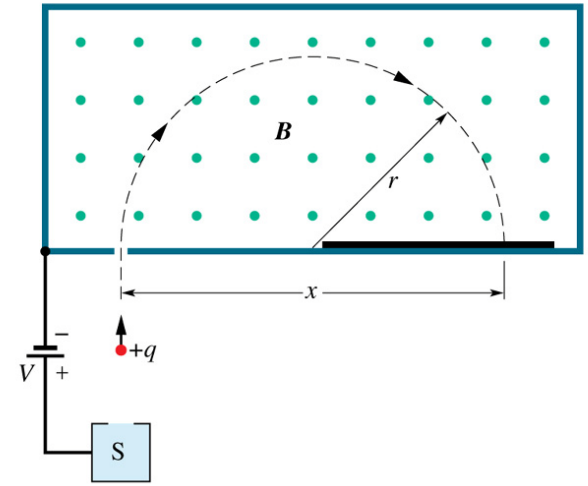
R: raggio di curvatura (cost.)

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$R = \sqrt{\frac{2Vm}{B^2 q}}$$

Moto di cariche in B

$$\text{frequenza} \quad \omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{R}} = \frac{qB}{m}$$



In termini vettoriali:

$$q\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{m}\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}} = \text{-}\mathrm{m}\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\omega}$$

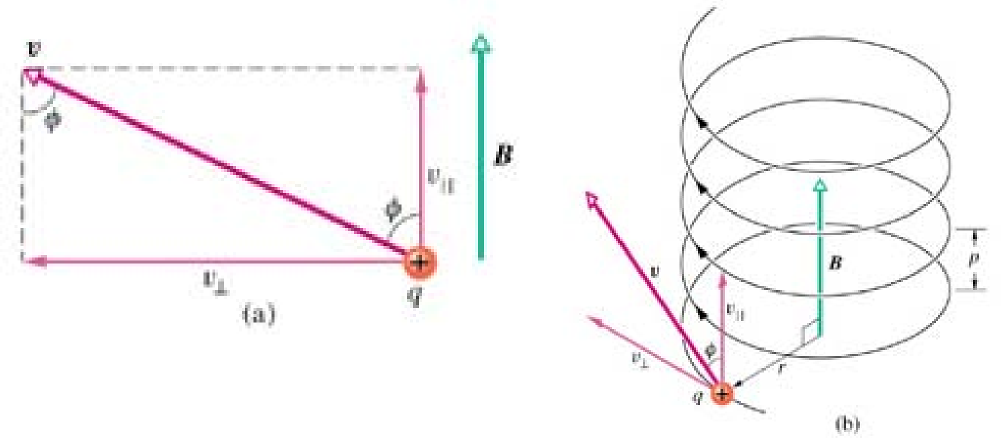
$$\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}} = \text{-}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{q}}\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\omega} \Rightarrow$$

$$\vec{\mathrm{B}} = \text{-}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{q}}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{-}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}\vec{\mathrm{B}}$$

Le velocità angolare è sempre // a B
Se q < 0 è concorde
Se q > 0 discorde

$$\text{Periodo T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \text{indipendente da } \vec{\mathrm{v}} \text{ e R}$$

Moto di cariche in B



$\vec{B}$ uniforme

$\vec{v}$ non perp. $\vec{B}$

q posit.

Moto Elicoidale uniforme

(composizione del moto circolare uniforme nel piano ort. a B e del moto rett. Uniforme lungo B)

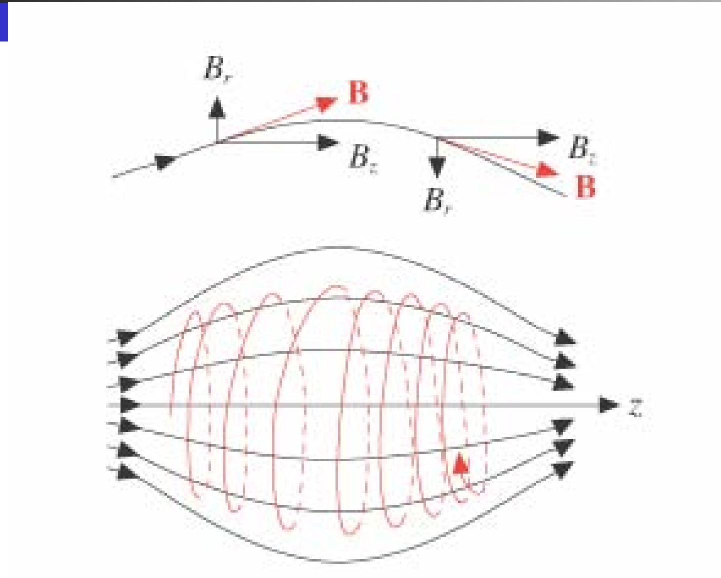
$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \Leftrightarrow \mathrm{qvsen}\theta\mathrm{B} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{R}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{mvsen}\theta}{\mathrm{qB}} \quad \mathrm{e}\ \mathrm{T} = \frac{2\pi\mathrm{m}}{\mathrm{qB}}$$

Nella direzione di B la velocità è costante

$$\boxed{\text{passo } \mathrm{p} = \mathrm{v_p}T = \mathrm{v}_p \frac{2\pi m}{qB}}$$

Fasce di Van Allen

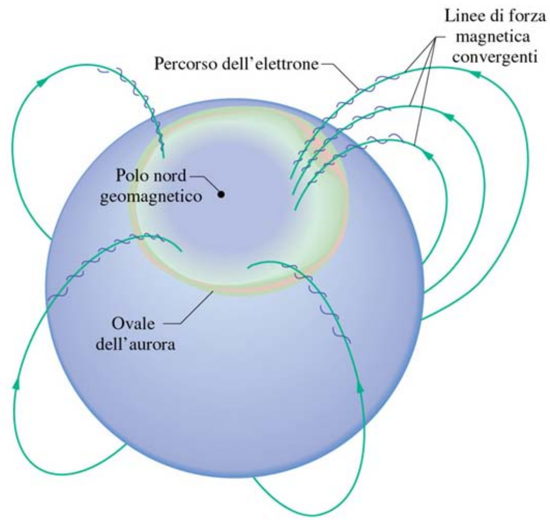


$\vec{B}$ NON uniforme (a simmetria assiale) bottiglia magnetica

Consideriamo una particella carica entrante nel piano del disegno con **v**

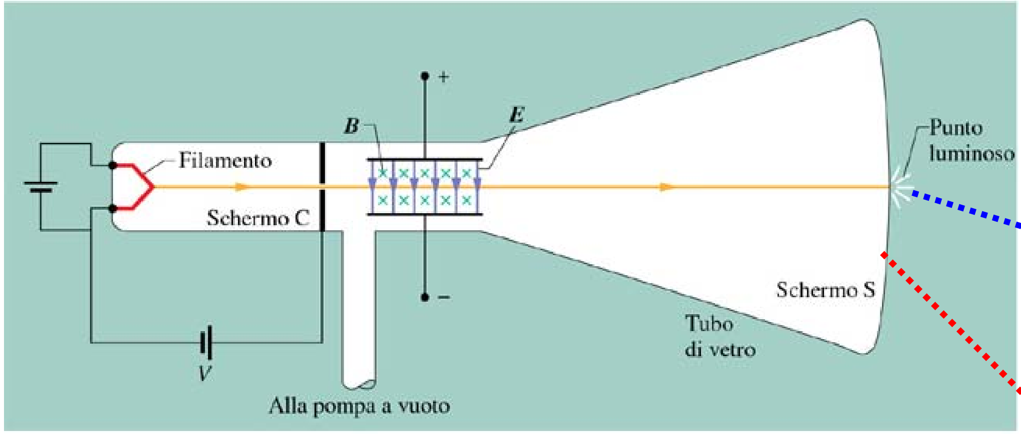
B_z → **forza radiale** responsabile del moto elicoidale intorno all'asse z. B diminuisce, raggio di curvatura e passo aumentano.

B_r → forza lungo z. La particella torna indietro oscilla avanti e indietro.



Gli e- e p emessi dal sole vengono catturati dal campo magnetico terrestre.

Thomson: scoperta dell'e⁻



$\vec{E} \perp \vec{B}$ uniformi

$\vec{E} = 0 \;\; \vec{B} = 0$ nessuna deviazione

$\vec{E} \neq 0 \;\; \vec{B} = 0$ particella deviata (vedi esercizio già fatto)

$\vec{E} \neq 0 \;\; \vec{B} \neq 0$ variato fino a annullare la deviazione

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

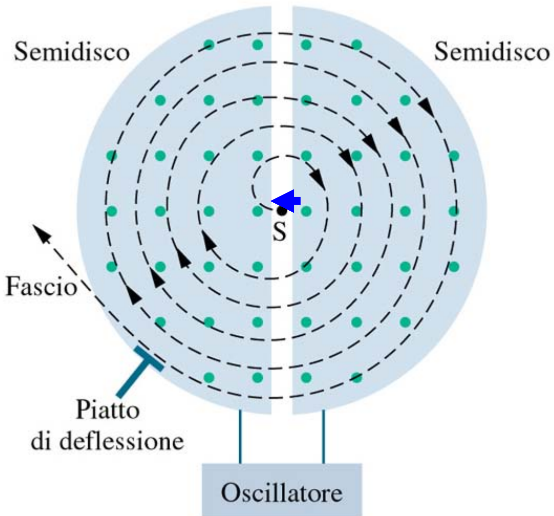
$$\boxed{vB = E}$$

$$y = \frac{qEL^2}{2mv^2}$$

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{2yE}{L^2B^2}}$$

Il ciclotrone

Tra due cavità cilindriche è applicata un d.d.p. alternata in presenza di un campo B uniforme perpendicolare al piano delle cavità



$$V = V_0 sen\,\omega_{RF} t$$

La particella entra nella prima cavità

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}_1{}^2 = qV \qquad R_1 = \frac{\mathrm{mv}_1}{qB}$$

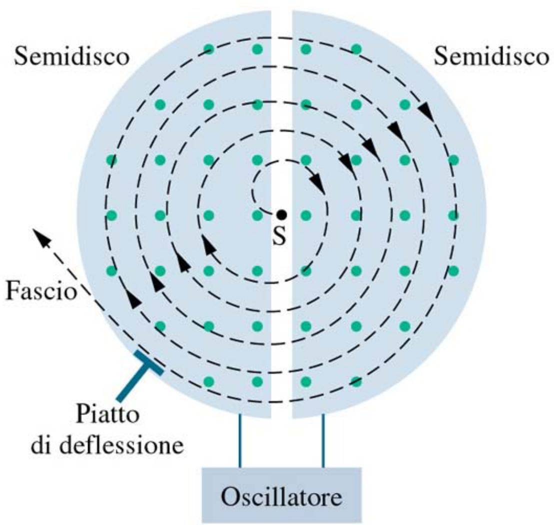
$$\Rightarrow \quad \text{dopo } \mathrm{t}_1 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi R_1}{\mathrm{v}_1} = \frac{\pi m}{\mathrm{qB}}$$

Entra nella seconda cavità, la V cambia segno:

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}_2{}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{mv}_1{}^2 + qV = 2qV \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{\mathrm{mv}_2}{qB} > R_1$$

$$\text{dopo } \mathrm{t}_2 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi R_2}{\mathrm{v}_2} = \frac{\pi m}{\mathrm{qB}} = \mathrm{t}_1 \quad \text{esce dalla 2nda cavità}$$

Il ciclotrone



$$\text{dopo } t_{1/2\text{giro}} = T_{RF}/2 = \frac{\pi m}{\text{qB}} \Rightarrow$$

$$T_{RF} = \frac{2\pi m}{\text{qB}} \qquad \omega_{RF} = \frac{\text{qB}}{m} = \omega$$

Detta pulsazione di ciclotrone

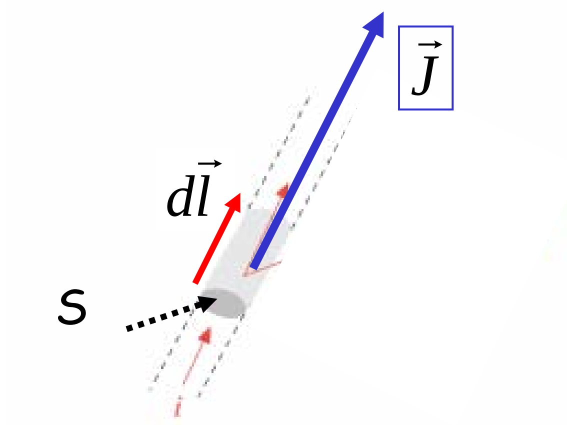
Il processo continua fino al raggio massimo R

$$\text{v}_{\max} = \frac{qBR}{m}$$

$$\frac{1}{2}\text{mv}^2{}_{\max} = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

Si possono raggiungere Ek dell'ordine dalla decina di MeV

Forza magnetica su un conduttore percorso da i



Se un conduttore percorso dalla corrente i è immerso in un campo **B** (se gli e sono i portatori)

$$\boxed{\text{su ogni } e^- \quad \vec{F} = -e\,\vec{v}_d \times \vec{B}}$$

n. di elettroni

$$d\vec{F} = n\,Sdl\,\vec{F} = -n\,Sdl\,e\,\vec{v}_d \times \vec{B} \Leftrightarrow$$

$$d\vec{F} = Sdl\ \ \vec{J} \times \vec{B} = dV\ \ \vec{J} \times \vec{B}$$

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d$$

$$\Updownarrow \qquad i = JS$$

$$\boxed{d\vec{F} = i\,d\vec{l} \times \vec{B}}$$

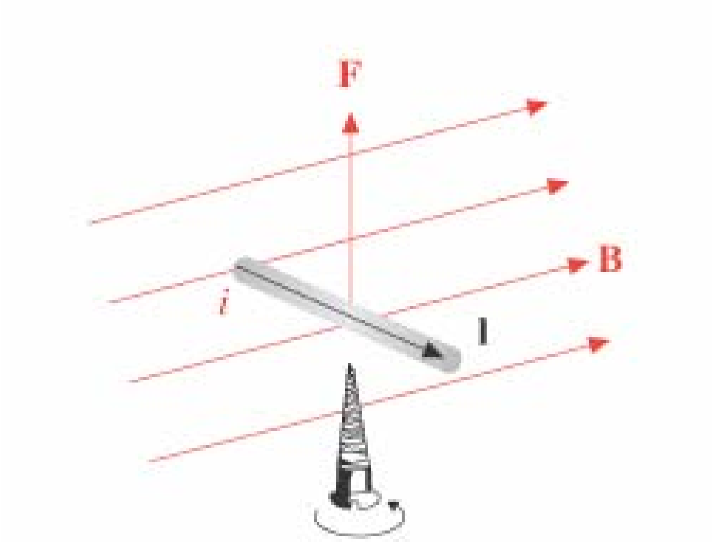
II ª legge elementare di Laplace

Non dipende dal segno dei portatori di carica

Forza magnetica su un conduttore percorso da i

Per un filo indeformabile di lunghezza l percorso da una corrente i è stazionaria:

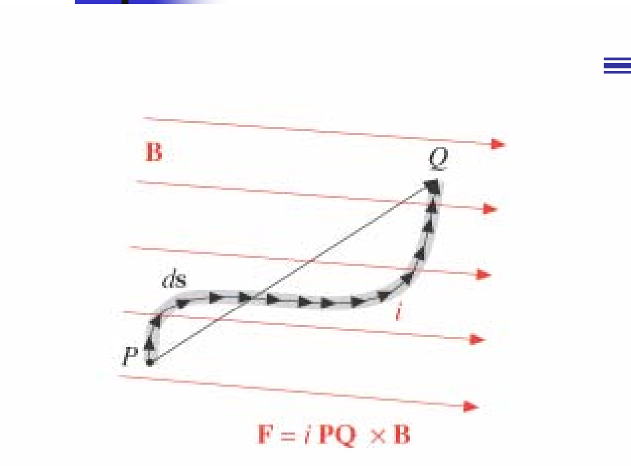
$$\vec{F} = i\int_a^b d\vec{l} \times \vec{B}$$



Se B cost ed il conduttore rettilineo

$$\vec{F} = i\left(\int_P^Q d\vec{l}\right) \times \vec{B} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

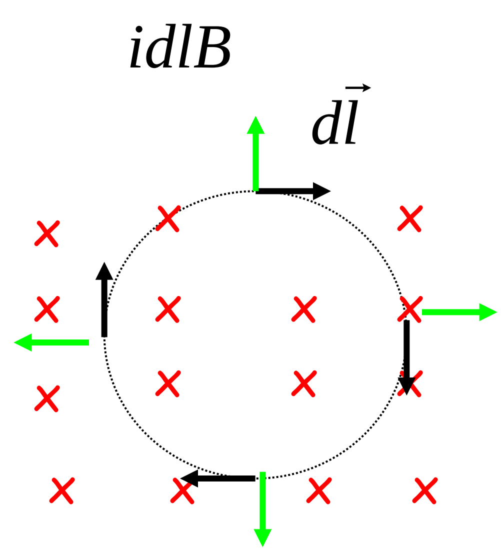
Forza magnetica su un conduttore percorso da i



Se B cost e il conduttore è curvilineo ma giace in un piano:

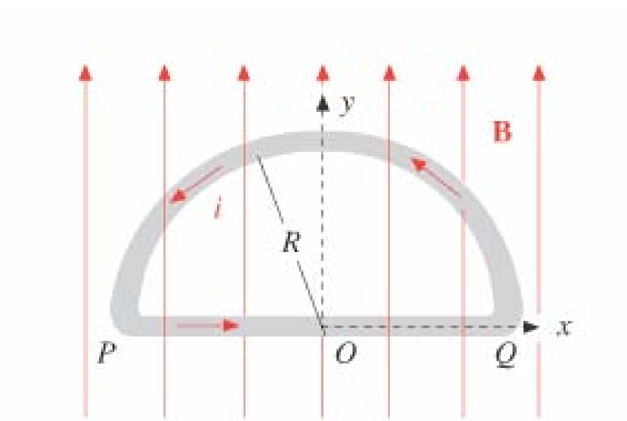
$$\vec{F} = i\left(\int_a^b d\vec{l}\right) \times \vec{B} = i\overrightarrow{PQ} \times \vec{B}$$

Quindi in un campo B uniforme un filo percorso da corrente sente una forza che non dipende dalla forma del filo, ma solo dai punti iniziali e finali.



Su un circuito: $\boxed{\vec{F} = 0}$

Applicazione



$$\vec{B} = B\vec{u}_y$$

$$\vec{F}_1 = i\overrightarrow{PQ} \times \vec{B} = i\,2R\,B\vec{u}_z$$

$$d\vec{l} = -dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$$

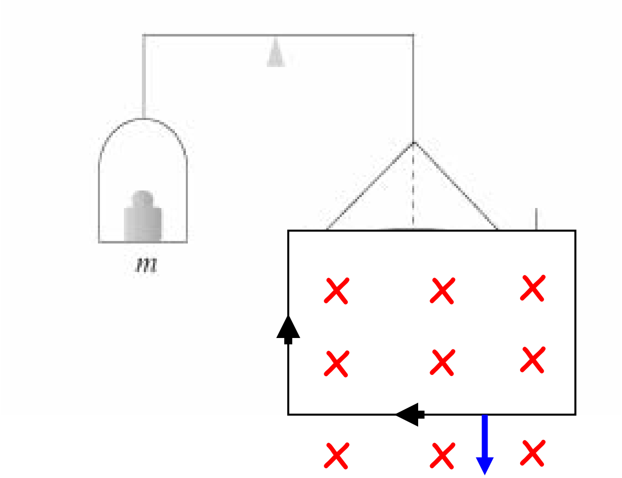
$$\vec{F}_2 = i\int_P^Q d\vec{l} \times \vec{B} = i\left(\int_Q^P -dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y\right) \times B\vec{u}_y$$

$$= Bi\int_Q^P -dx\vec{u}_z = -Bi2R\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0}$$

Applicazione

Al giogo di una bilancia è sospesa un spira rigida larga b. La parte inferiore è immersa in un campo B ortogonale al piano della spira uniforme. Se nella spira circola una corrente i con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre mettere una massa m = 0.5 g. Calcolare B.

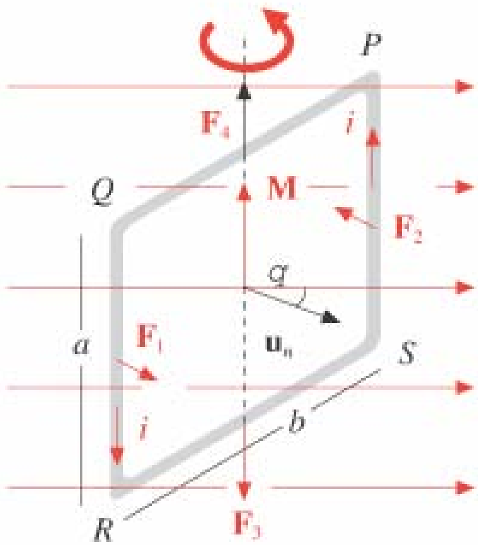


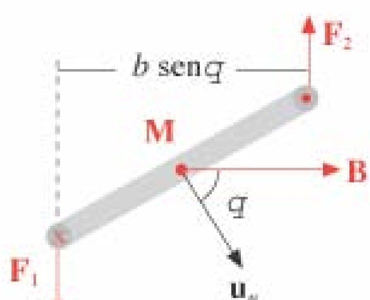
$$\vec{F}_1 = i\vec{b} \times \vec{B} = i\, b\, B \vec{u}_z$$

$$i\, b\, B = mg \Rightarrow \; B = \frac{mg}{ib} \approx 10^{-1} T$$

Questo metodo si misura il B!!

Momento magnetico





Spira rettangolare di lati ab percorsa da i, immerso in un B uniforme

$$F_{PQ} = F_{RS} = ibB\cos\theta \qquad // \text{ piano della spira}$$

uguali ed opposti con stessa retta di azione

$$F_{SP} = F_{QR} = iaB \qquad \perp \text{ piano della spira}$$

Momento meccanico

$$\tau = bsen\theta\, F = bsen\theta\, iaB = iSBsen\theta$$

$$\vec{m} = i\vec{S} \quad \text{momento magnetico della spira}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

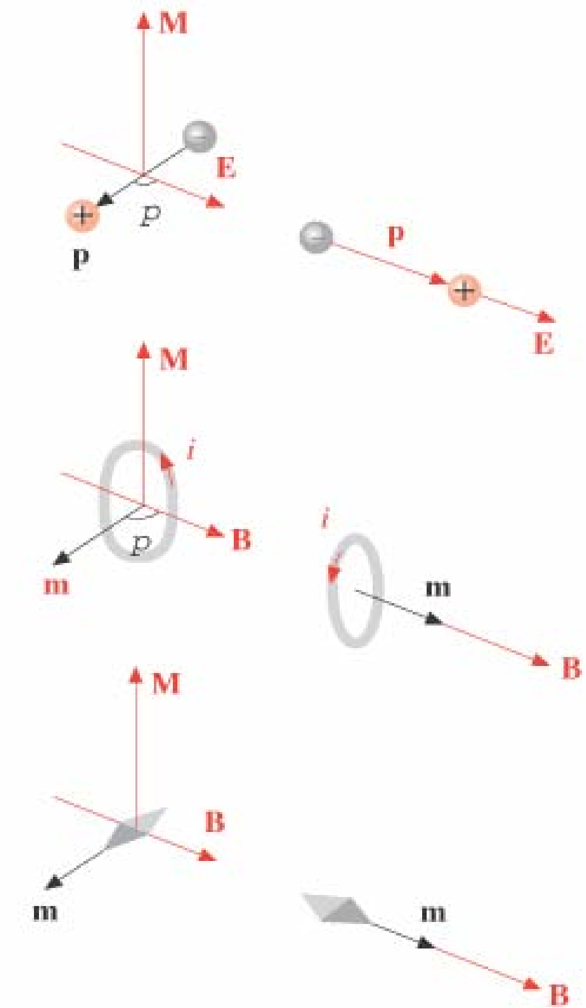
Principio di equivalenza di Ampere

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$\vec{p} = q\vec{d}$ momento dipolo elettrico

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m} = i\vec{S}$ momento magnetico della spira



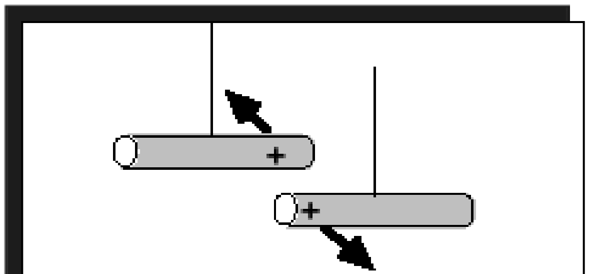
Unità di misura del momento di dipolo magnetico:

$$Am^2$$

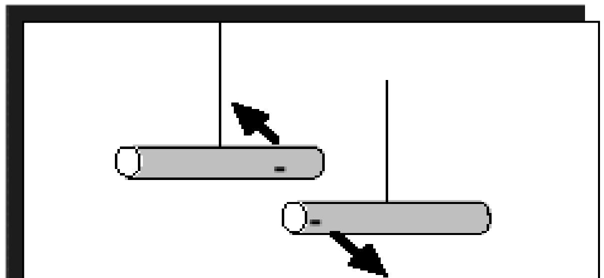
Appendice:
il campo elettrico

La natura dell’elettricità e la carica elettrica

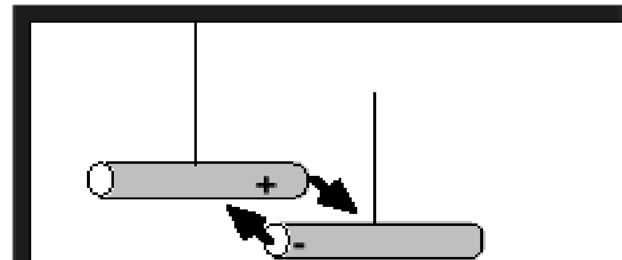
- *Un po’ di storia: sin dal settimo secolo A.C. si scoprì che l’ambra gialla se strofinata con un panno di lana acquista la proprietà di attirare corpuscoli leggeri. Nel sedicesimo secolo Gilbert aveva scoperto che altre sostanze se strofinate acquistano le stesse proprietà, mentre altre no. Dal nome greco dell’ambra fu introdotto il termine “elettricità”, ad indicare la causa, ancora ignota, dei fenomeni di interazione fra corpi elettrizzati.*



Bacchette di vetro strofinato con seta si respingono



Bacchette di gomma stofinate con pelle si respingono



Una bacchetta di vetro ed una di gomma, se stofinate, si attraggono

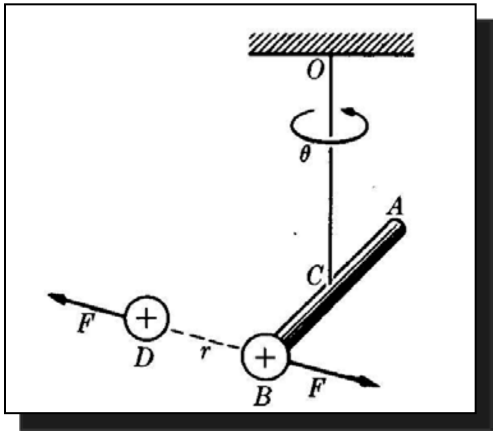
Conclusione:

- Il processo di strofinamento trasferisce una piccola quantità di carica da un corpo all’altro, alterando la neutralità di carica di ciascuno di essi.
- esistono **2 tipi di carica elettrica,** per convenzione:
- + *CARICA POSITIVA* (ad es. seta strofinata su vetro)
- - *CARICA NEGATIVA* (ad es. pelle strofinata su gomma)
- Due cariche dello stesso segno si respingono mentre cariche di specie differente si attraggono.
- La carica elettrica si conserva sempre

- **Unità di misura** della carica è il *Coulomb* $\Rightarrow [q] = \mathrm{C}$

La legge di Coulomb

Utilizzando una bilancia di torsione Coulomb dimostrò che: *"la forza di attrazione o di repulsione che si esercita tra due particelle puntiformi elettricamente cariche poste nel vuoto è proporzionale al prodotto delle loro cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza interposta tra esse ed è diretta lungo la congiungente le due cariche."*



$$\boxed{\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r}$$

$\mathbf{u_r}$ è un versore con direzione congiungente le due cariche

$\mathbf{k_e = 1/(4\pi\varepsilon_0)}$ è la costante elettrostatica che dipende unicamente dalle unità di misura ($\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ m^{-3}\ Kg^{-1}\ s^2\ C^2$)

Costante dielettrica del vuoto

Il Campo elettrico

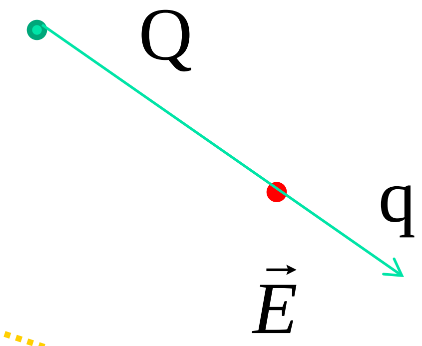
Come si manifesta l'azione a distanza tra due cariche q e Q?

Q carica "*privilegiata*": SORGENTE DEL CAMPO ELETTRICO

$\boldsymbol{u_r}$ versore

r la distanza tra carica sorgente e CARICA "*di prova o esploratrice*" *q*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}_r$$



* **<u>Importante</u>**: Il campo generato dalla sorgente *Q*

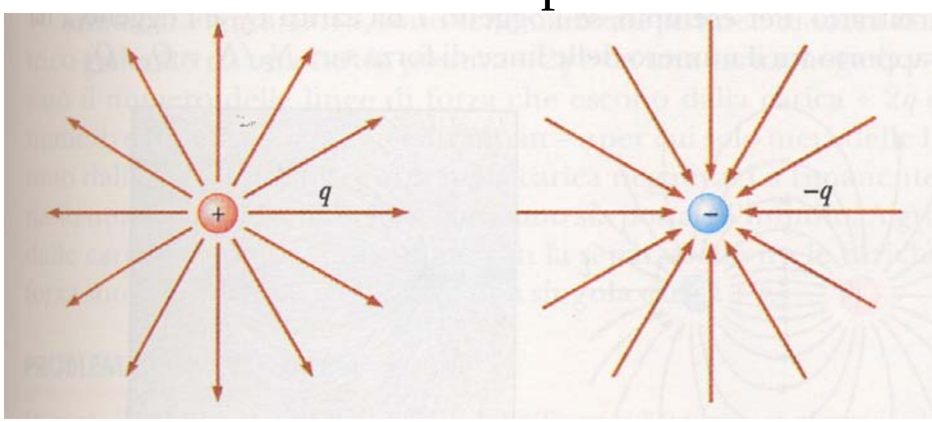
E' misurato <u>*operativamente*</u> attraverso una carica "*di prova*"

* <u>*Resta definito*</u> anche se una carica "di prova" NON è presente nel punto

Linee di forza del campo elettrico

Sono una rappresentazione del campo

- Sono le linee tangenti ed equiversi ad **E**(P) in ogni punto P(x,y,z) dello spazio
- il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie perpendicolare alle linee stesse è proporzionale all'intensità del campo.



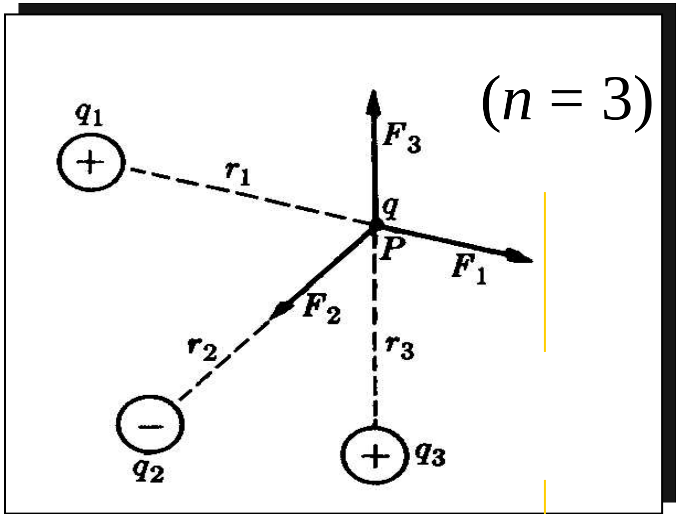
Convenzione sul verso ….

• **<u>E</u>**<u>(P)</u> **<u>generato da carica q puntiforme</u>**

⇒ **<u>Linee di forza radiali</u>**

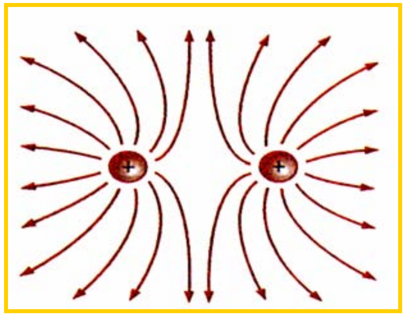
Il campo elettrico di più cariche puntiformi

E' la forza agente su una carica *"di prova"* q...
...per via di una data distribuzione di n cariche *"privilegiate"* Q_i



$$\vec{E} = \frac{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right)}{q} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$(n = 2,\ Q_1 = Q_2 = +q)$



- Si è applicato il **<u>principio di sovrapposizione degli effetti</u>**

Campo di una distribuzione continua di carica

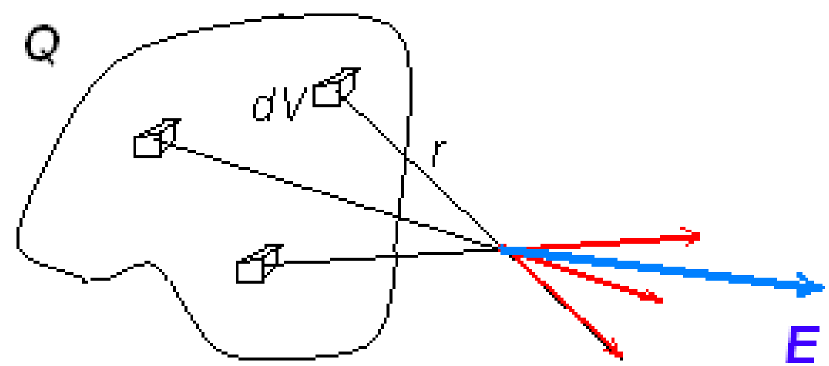
Il campo ***E*** nel punto ***P*** si ottiene:

• Scomponendo la distribuzione di carica di densità volumetrica (oppure superficiale o lineare) uniforme $\rho = dq/dV$ in volumetti dV (σ *opp.* λ) cui corrisponde una carica $dq = \rho\, dV$

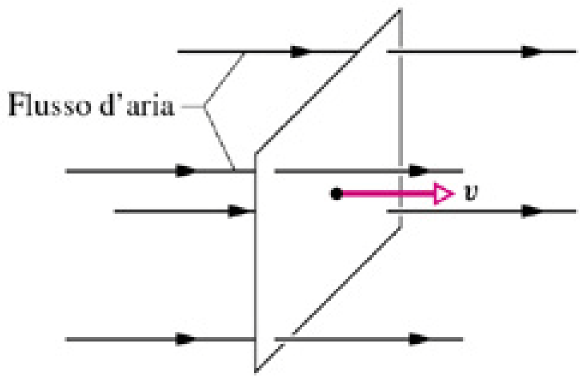
$$\boxed{d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

• Applicando il principio di sovrapposizione

$$\boxed{\vec{E}(P) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_Q \frac{dV}{r^2}\rho\,\vec{u}_r}$$

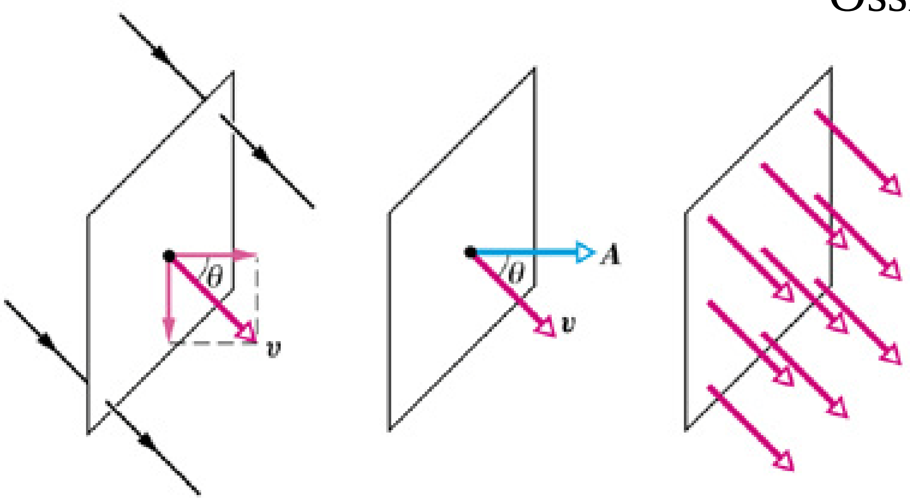


Flusso



Data una corrente di aria o acqua, il **flusso** volumetrico (o la portata) è la quantità di aria che attraversa la superficie nell'unità di tempo.

Dipenderà dalla angolo formato fra v e la spira.
Es. se v // spira il flusso è nullo
Ossia



(b) (c) (d)

$$\Phi = vA\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{A}$$

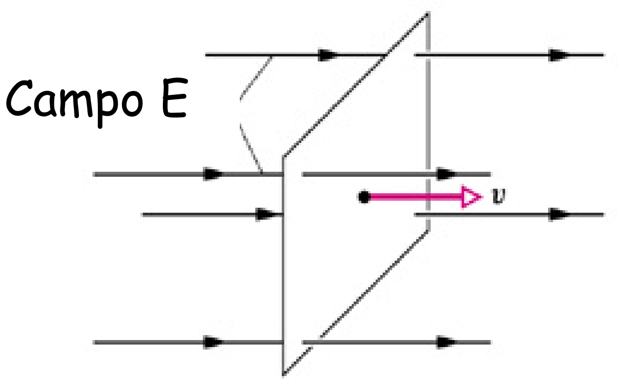
Flusso del campo velocità: ossia la quantità di un campo che un'area interecetta.

Flusso del campo elettrostatico

Sia $d\vec{S}$ una superficie elementare, immersa in una regione in cui è definito un campo E, orientata fissando il verso del versore della normale $\vec{n}$.

Si definisce **flusso del campo E** attraverso la superficie $d\vec{S}$

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \bullet d\vec{S} = EdS\cos\theta$$

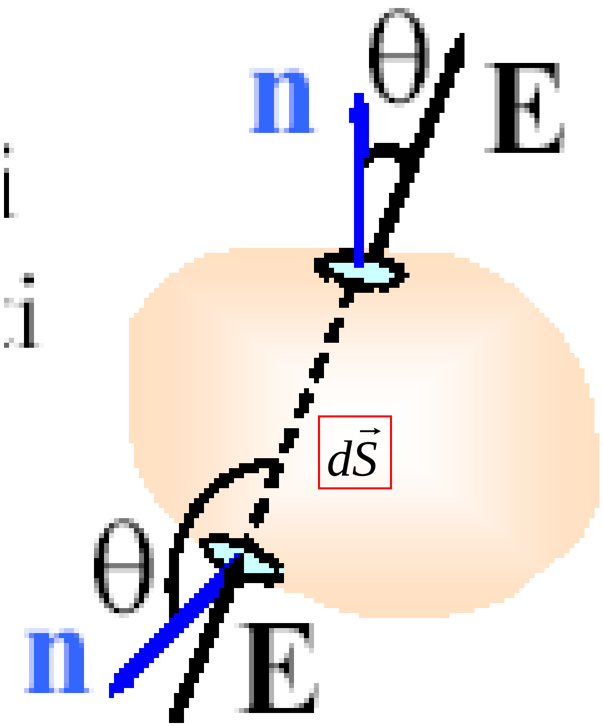


Il flusso attraverso una superficie finita S, suddivisa in elementini $d\vec{S}$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

Flusso del campo elettrostatico

Se la superficie è chiusa, per convenzione, la **normale** è orientata verso l'esterno (quindi Φ uscente positivo-Φ entrante negativo).



$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S}}$$

Unità di misura

[Φ]=[E][S] = V/m m^2*= Vm*

Teorema di Gauss

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Dove q_{int} è la carica interna alla superficie chiusa considerata

Teorema di GAUSS: Il flusso del campo **E** attraverso una superficie qualsiasi chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ε_0

Teorema di Gauss

Nel caso di più **cariche puntiformi** per il principio di sovrapposizione:

$$\Phi(E) = \oint_S \vec{E} \bullet \vec{n} dS = \oint_S (\sum_i \vec{E}_i) \bullet \vec{n} dS = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \bullet \vec{n} dS$$

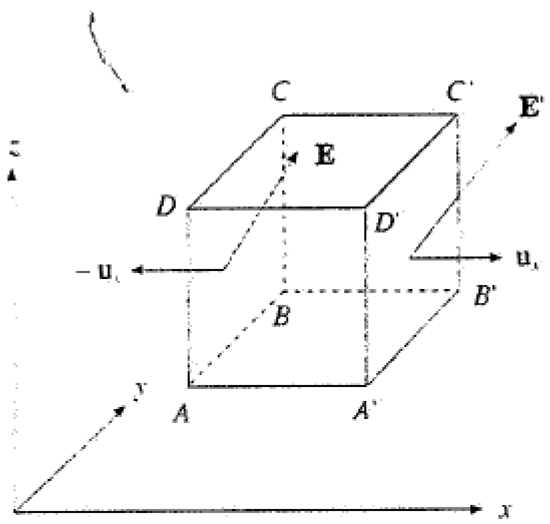
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i)_{\text{int}}$$

Nel caso più generale in cui il campo sia generato da una **distribuzione continua di cariche,** caratterizzata dalla densità spaziale ρ (x,y,z):

$$\boxed{\Phi(E) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \rho(x, y, z) d\tau}$$

Teorema di Gauss in forma Locale

È una legge integrale che lega il flusso del campo E attraverso una superficie chiusa alle sorgenti del campo interne.
In forma differenziale costituisce una relazione locale che lega le derivate del campo in un punto con le densità di carica ρ in quel punto.



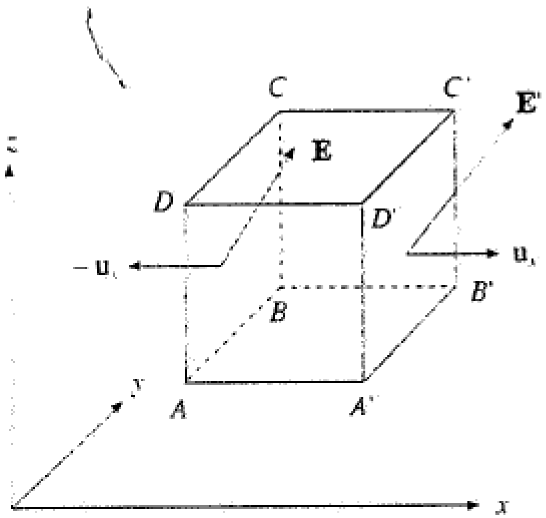
$$\vec{E}'\cdot\vec{u}_x dydz = E'_x dydz \quad \text{attraverso A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'$$

$$\vec{E}\cdot-\vec{u}_x dydz = -E_x dydz \quad \text{attraverso ABCD}$$

$$(E'_x - E_x)dydz = \frac{\partial \mathrm{E}_\mathrm{x}}{\partial x} dxdydz$$

Sviluppo in serie al primo
termine essendo dx piccolo

Teorema di Gauss in forma Locale



$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} d\tau$$

$$d\Phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Teorema della divergenza

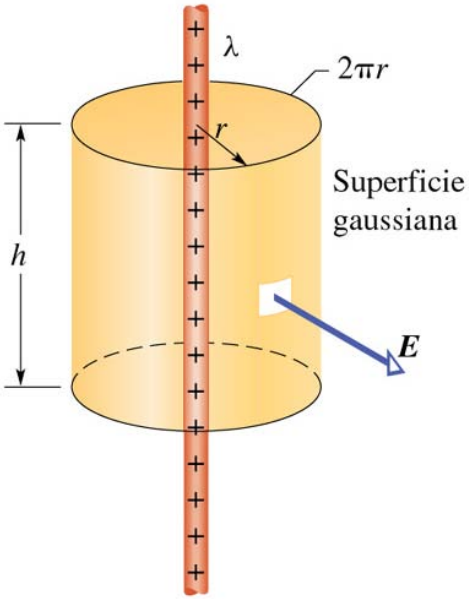
$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow \quad (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{d\Phi}{d\tau} \Rightarrow$$

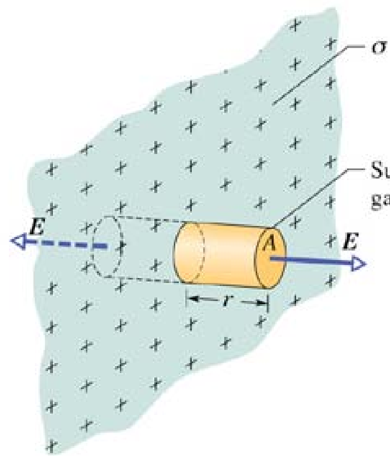
La divergenza del campo in P è pari al rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato in P ed il suo volume.
(vale per qualunque campo vettoriale)

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow \quad (2) \quad \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

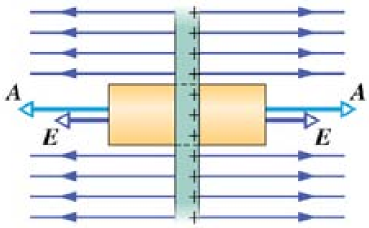
Il flusso del campo attraverso una superficie chiusa S è pari alla divergenza del campo stesso esteso al volume racchiuso da S. (T. della divergenza)

Applicazioni T. di Gauss

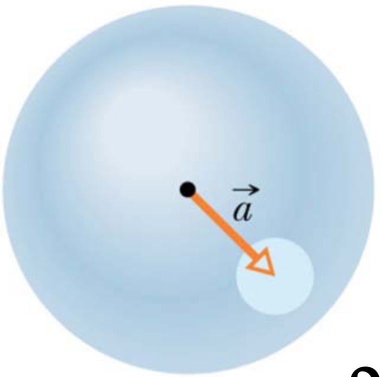




(a)



(b)

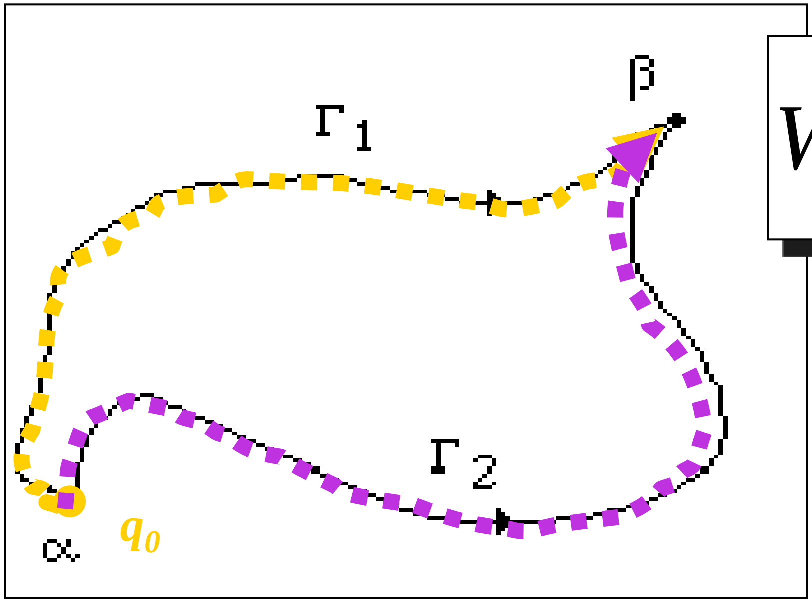


ρ

Lavoro in elettrostatica

• Lavoro ed energia potenziale sono due concetti collegati (si ricordi prima parte del corso)

• Lavoro $\boldsymbol{W}$ per portare la carica q_0 dai punti $\alpha \to \beta$ in regione di campo elettrostatico $\vec{\mathbf{E}}(P)$



$$W = \int_\alpha^\beta \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_\alpha^\beta q_0 \vec{E}(P) \cdot d\vec{l}$$

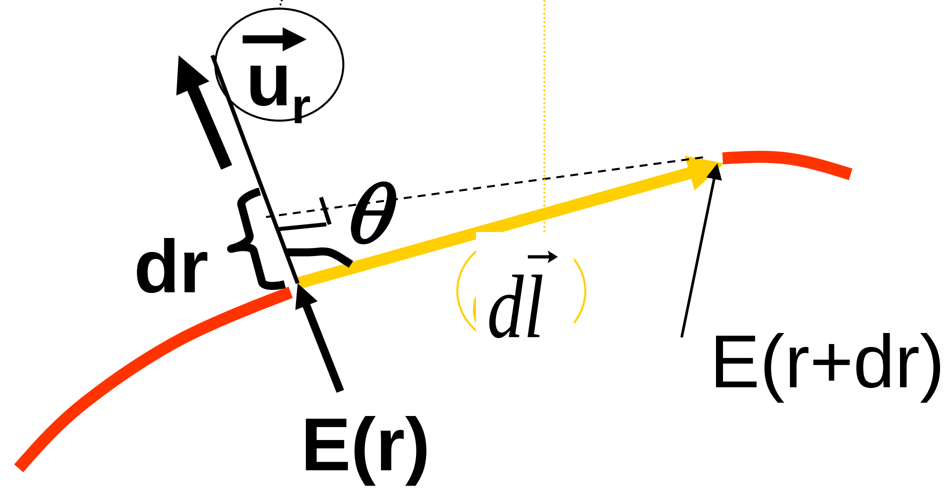
Per un campo elettrostatico NON dipende dal Γ_i scelto ma solo dagli estremi!!! E' conservativo!! Dimostriamolo

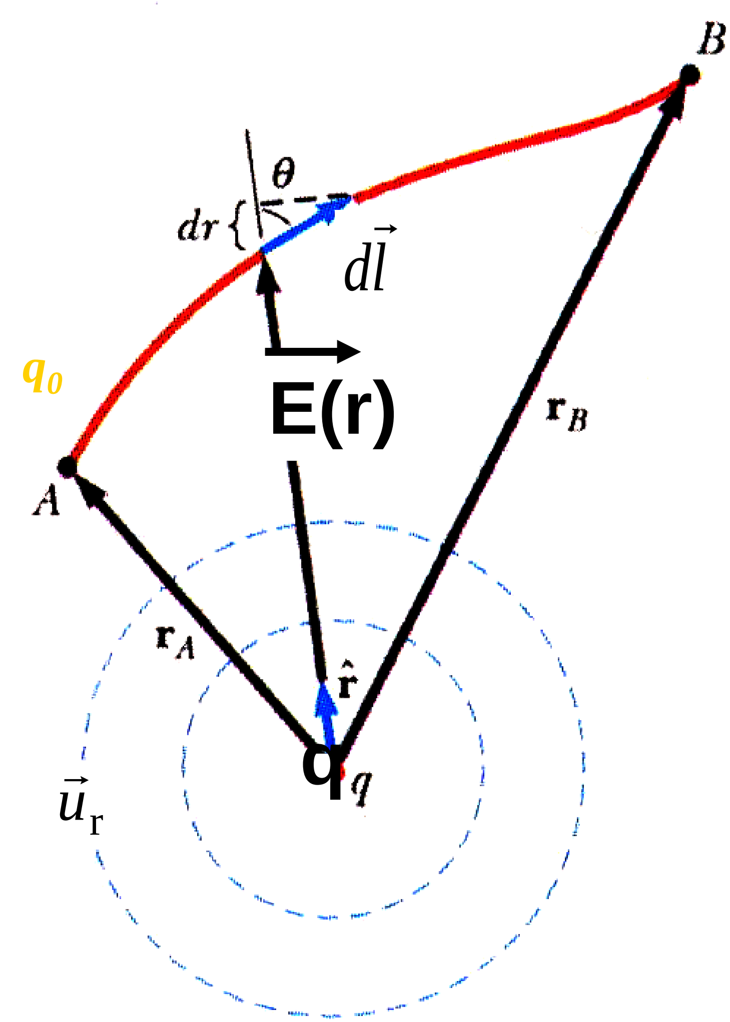
Calcolo del lavoro

Lavoro su **q'** nel campo prodotto della sorgente **q**

$$W=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\int_A^B\frac{\vec{u}_r\cdot d\vec{l}}{r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\int_A^B\frac{\cos\vartheta\, \mathbf{d}l}{r^2}$$

$$=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$





Energia Potenziale

- Ricordiamo che ad ogni forza conservativa è associata una energia potenziale. Nel caso del campo elettrostatico:

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

Posto V(infinito) =0

Infinito

L'energia potenziale è nota a meno di una costante. Si sceglie arbitrariamente il suo valore in un punto. $\Rightarrow$ Di solito $\boxed{U(\infty) = 0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(P) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_o r}}$$

L'energia potenziale di una carica q_0 nel campo generato da una carica puntiforme q

Potenziale di una carica puntiforme

Analogamente a quanto effettuato per passare da Forza → Campo elettrico... …si può "privilegiare" **q** ("*sorgente*") rispetto a **q_0** ("*di prova*") passando da

<u>Lavoro</u> → <u>Diff. di potenziale:</u>

$$\boxed{\frac{W_{AB}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = V_A - \cancel{V_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

Posto $V_B(\infty) = 0$ $\Rightarrow$

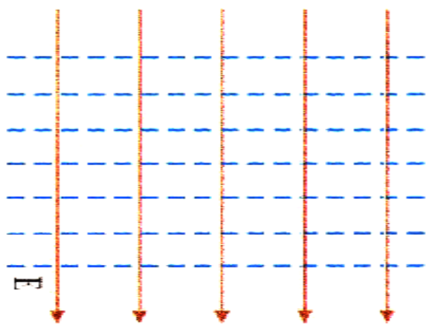
$$\boxed{V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}}$$

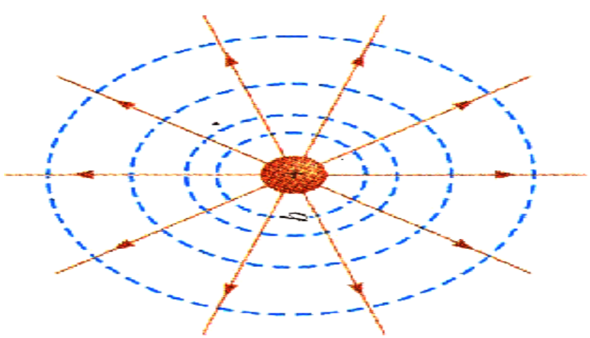
Il **POTENZIALE *V* (*P*)** è il LAVORO (compiuto dal campo elettrico) NECESSARIO PER PORTARE UNA CARICA UNITARIA DAL PUNTO *P* DISTANTE *r* DALLA SORGENTE *q* ALL' INFINITO

*L'unità di misura: per il potenziale è il **<u>Volt</u>** [V] = **V = J/C***
per il campo elettrico ***[E]=V/m***

Le superfici equipotenziali

Luogo dei punti aventi lo stesso potenziale elettrico: **V(P) = costante**





Sono in ogni punto **perpendicolari alle linee di forza** del campo:

consideriamo uno spostamento $d\vec{r}$ sulla supercie equipo.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$$

Potenziale di distribuzione di cariche

<u>DISTRIBUZIONE DISCRETA</u>:

Date i=1,2,…, ***N***

cariche $\boldsymbol{q_i}$ ognuna delle quali

genera in ***P*** un potenziale $\boldsymbol{V_i(P)} = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_{P,i}}$

$$\boxed{V(P) = \sum_{i=1}^{N} V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_{P,i}}}$$

<u>DISTRIBUZIONE CONTINUA</u>:

Data una carica ***q*** continua

si scompone lo spazio in tanti volumetti ***dV***

di carica volumica ρ = ***dq / dV*** ognuno dei quali genera un potenziale

$$dV(P) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r}$$

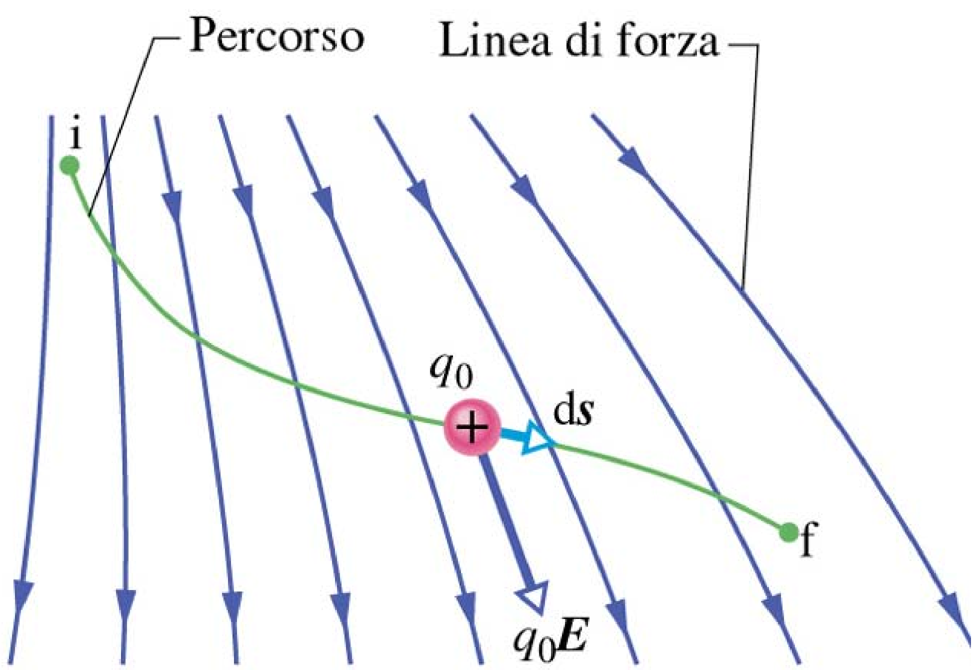
$$\boxed{V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dq}{r} + \text{costante}}$$

Relazione tra E e V: noto il campo

Il potenziale elettrostatico è **<u>definito a partire dal lavoro</u>** per unità di carica effettuato dal campo.

$$W = \int q_o \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_o \Delta V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

$$\boxed{V_f - V_i = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$



Relazione tra E e V: ***NOTO il POTENZIALE***

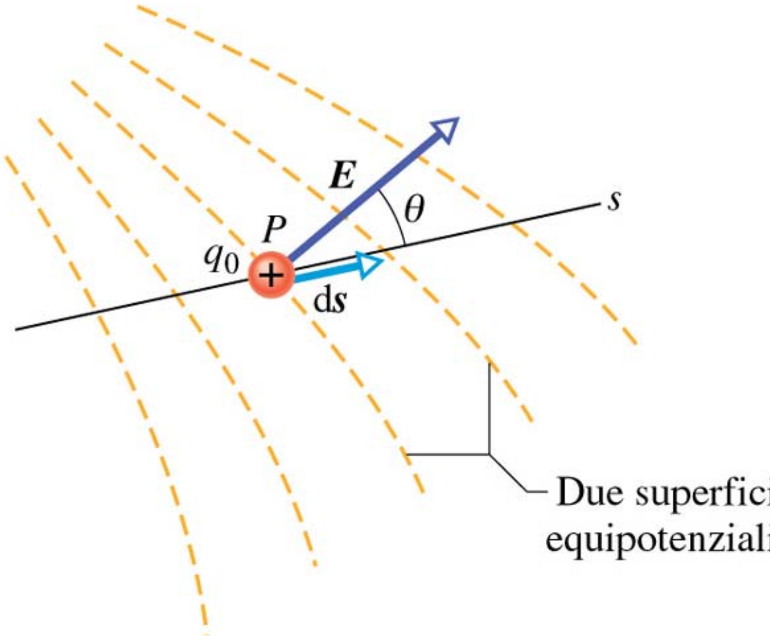
$$dW = -q_o\, dV$$

$$dW = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E ds \cos\theta = q_0 E_s ds$$

$$\boxed{dV = -E_s ds}$$

E**$_s$* è la componente del campo in direzione ***ds.
Quindi in coordinate cartesiane:

$$\boxed{\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right] = -\vec{\nabla} V}$$



Proprietà del campo elettrostatico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

<u>IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO</u>

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{n} dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

<u>Teorema di Gauss</u>

Ricordiamo che il termine Elettrostatico sta ad indicare un campo in cui le cariche che lo generano sono fisse e costanti e che un eventuale carica di prova è fissa o si muove senza perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti.