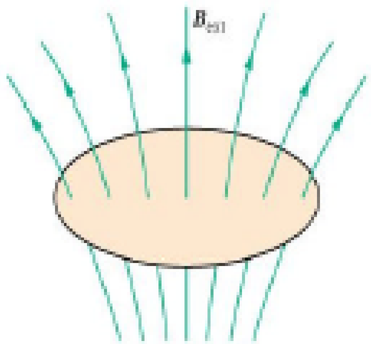
Autoinduzione



Un circuito percorso da corrente genera un **B** (legge di Ampere-Laplace):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Produce un flusso attraverso il circuito stesso (così come attraverso una qualunque S che abbia γ come contorno)

$$\boxed{\Phi = \int_S \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \bullet \vec{n} dS = iL}$$

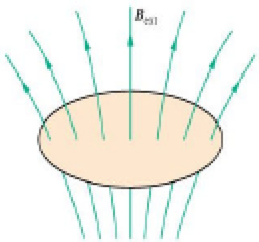
L: coefficiente di autoinduzione o **induttanza**

Dipende dalla forma del circuito ed è costante se esso è indeformabile.

[L] = Φ/i = weber/Ampere = Ωs = Henry [H]

Esempio: calcolo di L x un solenoide rettilineo indefinito

f.e.m. di autoinduzione



Se la i non è costante o cambia la forma del circuito

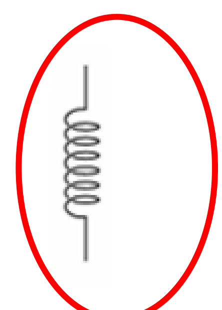
- il flusso concatenato cambia
- nel circuito compare una f.e.m indotta di autoinduzione

$$\boxed{\Phi = iL}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_L &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = \\ &= -L\frac{di}{dt} \quad (\text{se L è cost.})\end{aligned}}$$

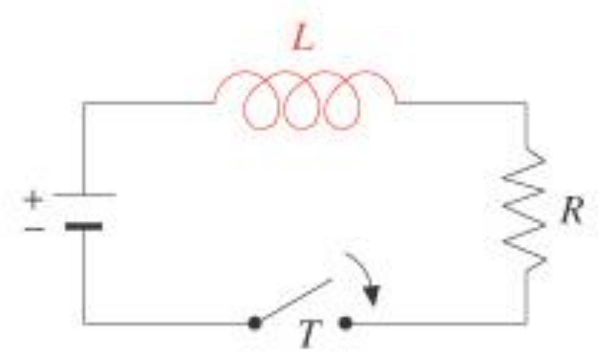
La ε_L è tale da opporsi alla variazione della corrente stessa

Un circuito con induttanza non nulla si dice induttivo e lo si indica



Circuito RL serie: chiusura

Quando l'interruttore S chiude o (apre) il circuito: l'L impedisce alla corrente di aumentare (o diminuire) **istantaneamente**, perché la variazione di i genera una f.e.m. indotta che si oppone alla variazione della corrente stessa.



1) Consideriamo il caso in cui il circuito venga **chiuso**

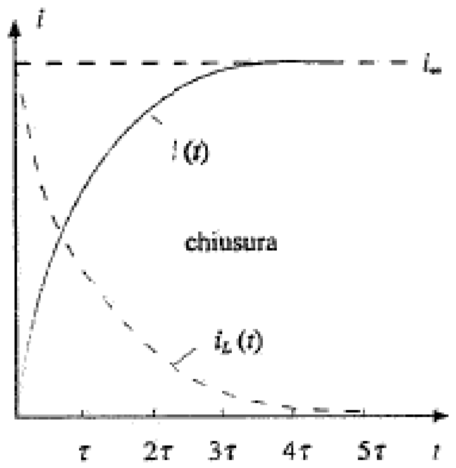
Ossia: t= 0 i = 0

$$\varepsilon + \varepsilon_L = Ri \iff \varepsilon = L\frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{di}{\varepsilon - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$\int_0^i \frac{di}{\varepsilon - Ri} = \int_0^t \frac{dt}{L} \Rightarrow \ln\frac{\varepsilon - Ri}{\varepsilon} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})}$$

Circuito RL serie: chiusura

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})}$$

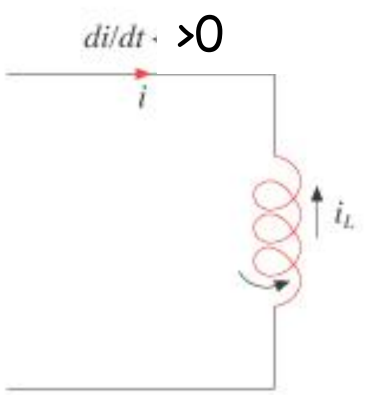


$$\boxed{\tau_L = L / R}$$

La **costante di tempo induttiva** H/Ω = s

La f.e.m di autoinduzione

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = -\varepsilon e^{-Rt/L}}$$



$$\boxed{i_\infty - i(t) = \varepsilon e^{-Rt/L} = -\varepsilon_L / R = i_L}$$

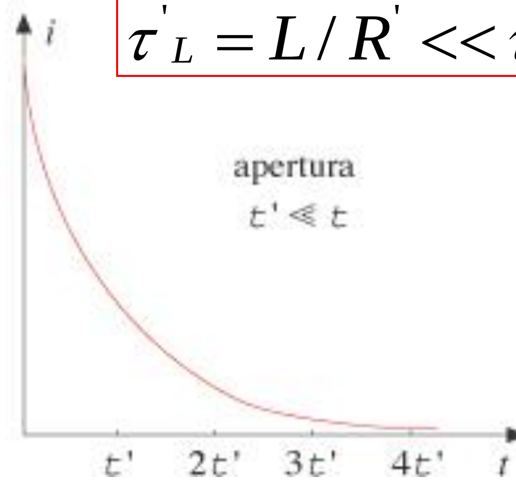
Durante la fase transitoria si ha un altra corrente, detta extracorrente di chiusura

Circuito RL serie: apertura

Dove $i_0=\varepsilon/R$ La resistenza passa da R ad R' (>> R) costante durante il transitorio

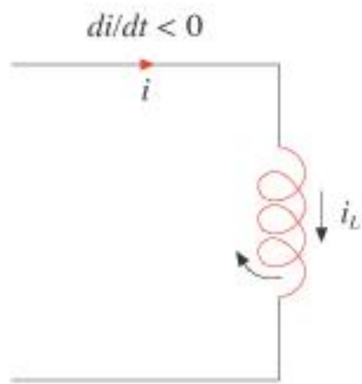
$$\int_{i_0}^{0}\frac{di}{\varepsilon - R' i} = \int_{0}^{t}\frac{dt}{L} \;\Rightarrow\; \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-R't/L} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau'_L}}$$

$$\boxed{\tau'_L = L/R' << \tau}$$



f.e.m di autoinduzione

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = -\frac{R'}{R}\varepsilon e^{-R't/L}}$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{i_L = \frac{\varepsilon_L}{R'} = i(t)}$$

extracorrente di apertura, diversa da zero x un tempo molto breve

Energia Magnetica

$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} + Ri \quad \Rightarrow \quad \varepsilon i = Li\frac{di}{dt} + Ri^2$$

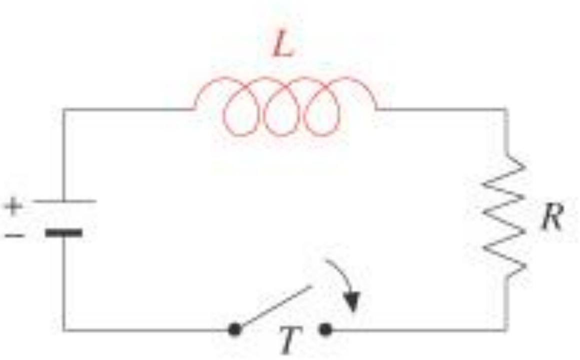
$$\Rightarrow \quad \varepsilon i dt = Lidi + Ri^2 dt$$

Energia dissipata x effetto Joule da R

Energia fornita dal generatore

Lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione x far aumentare la corrente da i a i+di

Energia Magnetica



Nell'intervallo di tempo in cui la corrente passa da 0 ad i, il generatore oltre a spendere energia x effetto joule, spende un lavoro:

$$\boxed{W = \int_0^i L i di = \frac{1}{2} L i^2}$$

Non dipende dal modo in cui avviene la variazione di corrente.

Energia intrinseca della corrrente: $$\boxed{U_L = \frac{1}{2} L i^2}$$

La cui variazione dà il lavoro fatto dal generatore contro la f.e.m. di autoinduzione

Energia Magnetica

Se si apre il circuito

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-R't/L}}$$

Nel resistore viene speso il lavoro:

$$\boxed{\int_0^{\infty} R' i^2 dt = R' \frac{\varepsilon^2}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-2R't/L} dt = \frac{1}{2} \frac{L\varepsilon^2}{R^2} = \frac{1}{2} L i^2{}_{\infty}}$$

L'energia immagazzinata nell'induttanza si ritrova alla fine dissipata sotto forma di calore nella resistenza.

Densità di energia di un campo B

Si consideri un tratto d centrale di solenoide molto lungo, di sezione A: all'interno **B** uniforme- esterno B=0. La **densità di energia:**

$$\boxed{u_m = \frac{U_L}{Ad}}$$

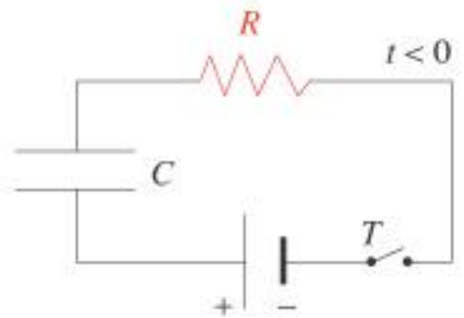
$$u_m = \frac{Li^2}{2Ad} = \frac{L}{d}\frac{i^2}{2A} = \mu_0 n^2 A \frac{i^2}{2A} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 \qquad \boxed{u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

$$B = \mu_0 n i$$

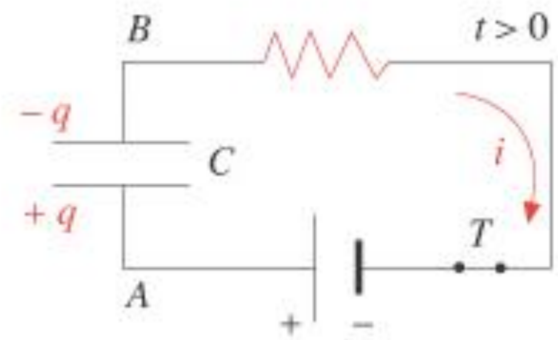
Densità di energia immagazzinata in un qualunque punto in cui sia presente un **B**

$$\boxed{U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \quad \text{energia magnetica}}$$

Carica del Condensatore: circuito RC



il condensatore si **carica**



$$\varepsilon = V_R + V_C = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\varepsilon - \frac{q(t)}{C} = R\frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dq(t)}{q - C\varepsilon} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^q \frac{dq(t)}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \qquad \boxed{q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})}$$

Carica del Condensatore: circuito RC

$$\boxed{q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})}$$

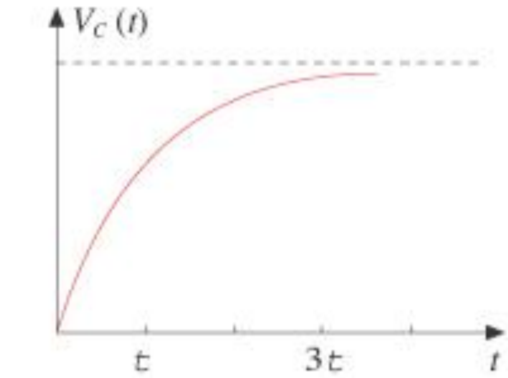
$$V_C = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

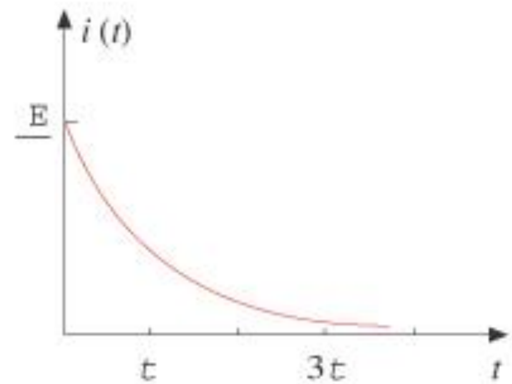
$$\tau = RC \quad \text{costante di tempo}$$

$$\mathrm{RC} = \Omega\mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

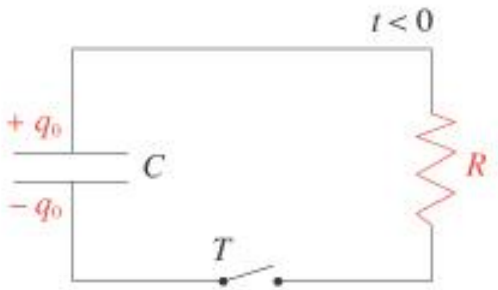
$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}}$$

$$V_R = iR = \varepsilon e^{-t/RC}$$

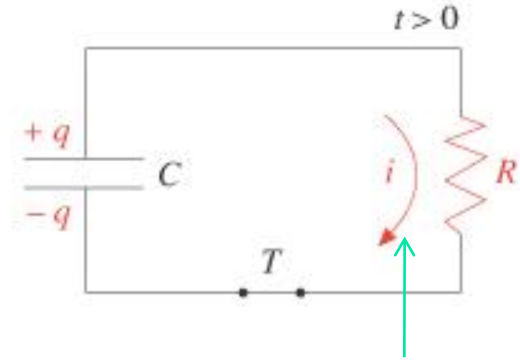




Scarica del Condensatore: circuito RC



Viene chiuso
il circuito



$$V_C = \frac{q_0}{C}$$

$$i = -\frac{dq(t)}{dt} \quad \text{(la carica diminuisce nel tempo)}$$

$$V_C = V_R \Leftrightarrow \frac{q}{C} = Ri \Leftrightarrow \frac{q}{CR} = -\frac{dq}{dt}$$

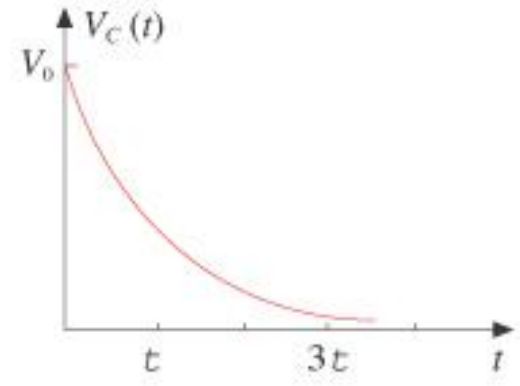
$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{CR}$$

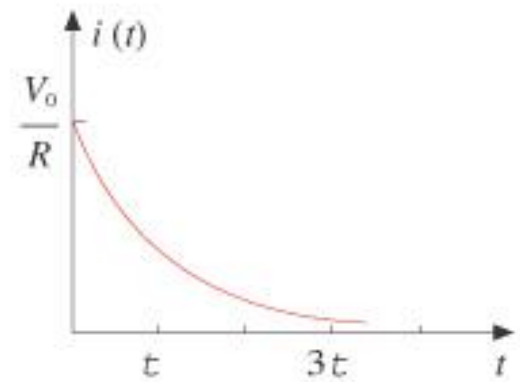
$$\boxed{q = q_0 e^{-t/RC}}$$

Scarica del Condensatore: circuito RC

$$\boxed{q = q_0 e^{-t/RC}}$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC}$$





$$\boxed{i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R}}$$

Processo di carica

la potenza istantanea erogata dal generatore:

$$\boxed{P_{gen} = \varepsilon i = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-t/RC}}$$

Quella spesa nel resistore

$$\boxed{P_R = Ri^2 = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC}}$$

Il lavoro di carica del condensatore

$$\boxed{P_C = V_C i = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2t/RC} = P_{gen} - P_R}$$

➡ La potenza erogata dal generatore viene in parte dissipata sulla resistenza ed in parte consumata per aumentare l'energia elettrostatica del condensatore.

Processo di carica: conservazione energia

Il lavoro fornito dal generatore, quello consumato nella resistenza e l'energia elettrostatica del condensatore:

$$\boxed{W_{gen} = \int_0^{\infty} P_{gen} dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-t/RC} dt = C\varepsilon^2}$$

$$\boxed{W_R = \int_0^{\infty} P_R dt = \frac{1}{2} C\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\Delta U_e = \int_0^{\infty} P_C dt = \frac{1}{2} C\varepsilon^2}$$

Processo di scarica: conservazione energia

Ne processo di scarica viene dissipata energia, pari all'energia elettrostatica iniziale del condensatore:

$$\boxed{W_{gen} = \int_0^\infty P_R dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 = \frac{q^2{}_0}{2C}}$$

Densità di energia di un campo E

Si consideri un condensatore piano: all'interno **E** uniforme. La capacità $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

La **densità di energia:**

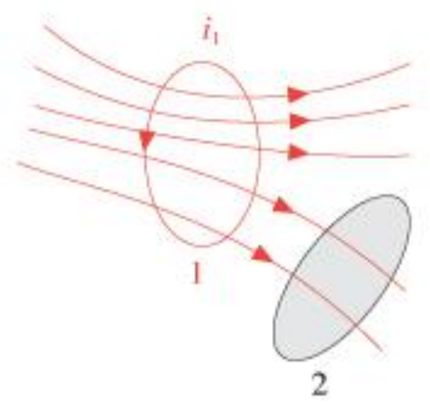
$$u_E = \frac{U_E}{V} = \frac{q^2}{2CSd} = \frac{q^2 \cancel{d}}{2\varepsilon_0 SS\cancel{d}} \Rightarrow$$

$$u_E = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Densità di energia immagazzinata in un qualunque punto in cui sia presente un **E**

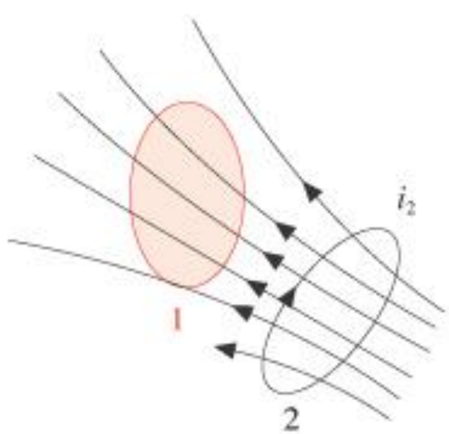
Mutua induzione



$F_{1,2} = M\, i_1$

$$\left.\begin{array}{r} \Phi_{1,2} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \bullet \vec{n}\, dS = M_{1,2} i_1 \\[2ex] \Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2 \end{array}\right\} M_{2,1} = M_{1,2}$$

M costante, i variabile..



$F_{2,1} = M\, i_2$

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M_{2,1}\frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$